Equivalencias de productos cruzados débiles

Ramón González Rodríguez

http://www.dma.uvigo.es/~rgon/

Departamento de Matemática Aplicada II. Universidade de Vigo

Basado en un trabajo conjunto con A.B. Rodríguez Raposo y J.M. Fernández Vilaboa

Proyecto MTM2013-43687-P. Ministerio de Economía y Competitividad y FEDER

Índice

1. Productos cruzados débiles
2. Equivalencias entre productos cruzados débiles
3. Productos asociados a álgebras de Hopf débiles

Notación.

- Con $\mathcal{C}$ denotaremos una categoría monoidal estricta con producto tensor $\otimes$ y objeto base K. También asumiremos que todo morfismo idempotente $q : Y \to Y$ rompe, i.e., existen un objeto Z (llamado imagen de q) y morfismos $i : Z \to Y$ y $p : Y \to Z$ tales que $q = i \circ p$ y $p \circ i = id_Z$.

Notación.

- Con $\mathcal{C}$ denotaremos una categoría monoidal estricta con producto tensor $\otimes$ y objeto base K. También asumiremos que todo morfismo idempotente $q : Y \to Y$ rompe, i.e., existen un objeto Z (llamado imagen de q) y morfismos $i : Z \to Y$ y $p : Y \to Z$ tales que $q = i \circ p$ y $p \circ i = id_Z$.
- (A, η_A, μ_A) es un monoide con producto μ_A y unidad η_A.

Notación.

- Con $\mathcal{C}$ denotaremos una categoría monoidal estricta con producto tensor $\otimes$ y objeto base K. También asumiremos que todo morfismo idempotente $q : Y \to Y$ rompe, i.e., existen un objeto Z (llamado imagen de q) y morfismos $i : Z \to Y$ y $p : Y \to Z$ tales que $q = i \circ p$ y $p \circ i = id_Z$.
- (A, η_A, μ_A) es un monoide con producto μ_A y unidad η_A.
- Para simplificar la notación, dados tres objetos V, U, B en $\mathcal{C}$ y un morfismo $f : V \to U$, escribiremos

$$B \otimes f \text{ para } id_B \otimes f \text{ y } f \otimes B \text{ para } f \otimes id_B.$$

Productos cruzados débiles

1. Productos cruzados débiles
2. Equivalencias entre productos cruzados débiles
3. Productos asociados a álgebras de Hopf débiles

J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Preunits and weak crossed products, **J. Pure Appl. Algebra** (2009).

J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Preunits and weak crossed products, **J. Pure Appl. Algebra** (2009).

Sea A un monoide y sea V un objeto en $\mathcal{C}$. Supongamos que existe un morfismo

$$\psi_V^A : V \otimes A \to A \otimes V$$

tal que se cumple la siguiente igualdad

$$\textbf{(1)} \qquad (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \psi_V^A) \circ (\psi_V^A \otimes A) = \psi_V^A \circ (V \otimes \mu_A).$$

El morfismo

$$\nabla_{A\otimes V} = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \psi_V^A) \circ (A \otimes V \otimes \eta_A) : A \otimes V \to A \otimes V$$

es idempotente.

El morfismo

$$\nabla_{A\otimes V} = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \psi_V^A) \circ (A \otimes V \otimes \eta_A) : A \otimes V \to A \otimes V$$

es idempotente.

Para el morfismo $\nabla_{A\otimes V}$ denotaremos por $A \times V$ su imagen. Entonces

$$p_{A\otimes V} \circ i_{A\otimes V} = id_{A\times V}, \ \ i_{A\otimes V} \circ p_{A\otimes V} = \nabla_{A\otimes V}$$

donde

$$i_{A\otimes V} : A \times V \to A \otimes V, \quad p_{A\otimes V} : A \otimes V \to A \times V$$

son los morfismos asociados a la factorización de $\nabla_{A\otimes V}$.

El morfismo

$$\nabla_{A\otimes V} = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \psi_V^A) \circ (A \otimes V \otimes \eta_A) : A \otimes V \to A \otimes V$$

es idempotente.

Para el morfismo $\nabla_{A\otimes V}$ denotaremos por $A \times V$ su imagen. Entonces

$$p_{A\otimes V} \circ i_{A\otimes V} = id_{A\times V}, \quad i_{A\otimes V} \circ p_{A\otimes V} = \nabla_{A\otimes V}$$

donde

$$i_{A\otimes V} : A \times V \to A \otimes V, \quad p_{A\otimes V} : A \otimes V \to A \times V$$

son los morfismos asociados a la factorización de $\nabla_{A\otimes V}$.

A partir de este momento consideramos cuádruplas $\mathbb{A}_V = (A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ donde A es un monoide, V un objeto, $\psi_V^A : V \otimes A \to A \otimes V$ satisface **(1)**, y

$$\sigma_V^A : V \otimes V \to A \otimes V$$

es un morfismo en $\mathcal{C}$.

Para la cuádrupla $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ definimos los productos

$$\mu_{A\otimes V} = (\mu_A \otimes V) \circ (\mu_A \otimes \sigma_V^A) \circ (A \otimes \psi_V^A \otimes V) : A \otimes V \otimes A \otimes V \to A \otimes V$$

$$\mu_{A\times V} = p_{A\otimes V} \circ \mu_{A\otimes V} \circ (i_{A\otimes V} \otimes i_{A\otimes V}) : A \times V \otimes A \times V \to A \times V.$$

Para la cuádrupla $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ definimos los productos

$$\mu_{A\otimes V} = (\mu_A \otimes V) \circ (\mu_A \otimes \sigma_V^A) \circ (A \otimes \psi_V^A \otimes V) : A \otimes V \otimes A \otimes V \to A \otimes V$$

$$\mu_{A\times V} = p_{A\otimes V} \circ \mu_{A\otimes V} \circ (i_{A\otimes V} \otimes i_{A\otimes V}) : A \times V \otimes A \times V \to A \times V.$$

La primera cuestión es la siguiente:
¿Qué condiciones necesitamos para garantizar que $\mu_{A\otimes V}$ y $\mu_{A\times V}$ son asociativos?

Condición Twisted

Diremos que $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ satisface la condición twisted si se cumple que

$$(\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \psi_V^A) \circ (\sigma_V^A \otimes A) = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \sigma_V^A) \circ (\psi_V^A \otimes V) \circ (V \otimes \psi_V^A)$$

Condición Twisted

Diremos que $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ satisface la condición twisted si se cumple que

$$(\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \psi_V^A) \circ (\sigma_V^A \otimes A) = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \sigma_V^A) \circ (\psi_V^A \otimes V) \circ (V \otimes \psi_V^A)$$

Condición de cociclo

Diremos que $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ satisface la condición de cociclo si se cumple que

$$(\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \sigma_V^A) \circ (\sigma_V^A \otimes V) = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \sigma_V^A) \circ (\psi_V^A \otimes V) \circ (V \otimes \sigma_V^A).$$

Teorema

Sea $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ una cuádrupla satisfaciendo las condiciones twisted y de cociclo. El producto $\mu_{A\otimes V}$ es asociativo y normalizado respecto de $\nabla_{A\otimes V}$.

Teorema

Sea $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ una cuádrupla satisfaciendo las condiciones twisted y de cociclo. El producto $\mu_{A\otimes V}$ es asociativo y normalizado respecto de $\nabla_{A\otimes V}$.

Normalización respecto de $\nabla_{A\otimes V}$

$$\nabla_{A\otimes V} \circ \mu_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes V} \circ (\nabla_{A\otimes V} \otimes \nabla_{A\otimes V}).$$

Teorema

Sea $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ una cuádrupla satisfaciendo las condiciones twisted y de cociclo. El producto $\mu_{A\otimes V}$ es asociativo y normalizado respecto de $\nabla_{A\otimes V}$.

Normalización respecto de $\nabla_{A\otimes V}$

$$\nabla_{A\otimes V} \circ \mu_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes V} \circ (\nabla_{A\otimes V} \otimes \nabla_{A\otimes V}).$$

Corolario

Sea $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ una cuádrupla satisfaciendo las condiciones twisted y de cociclo. El producto $\mu_{A\times V}$ es asociativo.

Teorema

Sea $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ una cuádrupla satisfaciendo las condiciones twisted y de cociclo. El producto $\mu_{A\otimes V}$ es asociativo y normalizado respecto de $\nabla_{A\otimes V}$.

Normalización respecto de $\nabla_{A\otimes V}$

$$\nabla_{A\otimes V} \circ \mu_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes V} \circ (\nabla_{A\otimes V} \otimes \nabla_{A\otimes V}).$$

Corolario

Sea $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ una cuádrupla satisfaciendo las condiciones twisted y de cociclo. El producto $\mu_{A\times V}$ es asociativo.

Si se cumplen las condiciones twisted y de cociclo, es posible asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$\nabla_{A\otimes V} \circ \sigma_V^A = \sigma_V^A.$$

Definición

Si la cuádrupla $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ satisface las condiciones twisted y de cociclo, diremos que el par $(A \otimes V, \mu_{A\otimes V})$ es un producto cruzado débil.

Definición

Si la cuádrupla $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ satisface las condiciones twisted y de cociclo, diremos que el par $(A \otimes V, \mu_{A \otimes V})$ es un producto cruzado débil.

La segunda cuestión es la siguiente:
¿Qué condiciones necesitamos para garantizar que $\mu_{A \times V}$ admite una unidad?

Definición

Si la cuádrupla $(A, V, \psi_V^A, \sigma_V^A)$ satisface las condiciones twisted y de cociclo, diremos que el par $(A \otimes V, \mu_{A\otimes V})$ es un producto cruzado débil.

La segunda cuestión es la siguiente:
¿Qué condiciones necesitamos para garantizar que $\mu_{A\times V}$ admite una unidad?

Definición

Si $m_{A\otimes V}$ es un producto asociativo definido en $A \otimes V$, una preunidad para $m_{A\otimes V}$ es un morfismo

$$\nu : K \to A \otimes V$$

tal que

$$m_{A\otimes V} \circ (A \otimes V \otimes \nu) = m_{A\otimes V} \circ (\nu \otimes A \otimes V), \quad \nu = m_{A\otimes V} \circ (\nu \otimes \nu).$$

Asociado a toda preunidad tenemos un morfismo idempotente

$$\nabla^{\nu}_{A\otimes V} = m_{A\otimes V} \circ (A \otimes V \otimes \nu) : A \otimes V \to A \otimes V.$$

Tomemos la imagen $A \times^{\nu} V$ de $\nabla^{\nu}_{A\otimes V}$, $p^{\nu}_{A\otimes V}$ la proyección, e $i^{\nu}_{A\otimes V}$ la correspondiente inyección.

Asociado a toda preunidad tenemos un morfismo idempotente

$$\nabla^{\nu}_{A\otimes V} = m_{A\otimes V} \circ (A \otimes V \otimes \nu) : A \otimes V \to A \otimes V.$$

Tomemos la imagen $A \times^{\nu} V$ de $\nabla^{\nu}_{A\otimes V}$, $p^{\nu}_{A\otimes V}$ la proyección, e $i^{\nu}_{A\otimes V}$ la correspondiente inyección.

Entonces $A \times^{\nu} V$ es un monoide con producto

$$m_{A\times^{\nu} V} = p^{\nu}_{A\otimes V} \circ m_{A\otimes V} \circ (i^{\nu}_{A\otimes V} \otimes i^{\nu}_{A\otimes V})$$

y unidad $\eta_{A\times^{\nu} V} = p^{\nu}_{A\otimes V} \circ \nu$.

Si además, $m_{A\otimes V}$ es un morfismo de A-módulos por la izquierda para las acciones

$$\varphi_{A\otimes V} = \mu_A \otimes V, \qquad \varphi_{A\otimes V\otimes A\otimes V} = \varphi_{A\otimes V} \otimes A \otimes V,$$

y normalizado respecto a $\nabla^{\nu}_{A\otimes V}$, el morfismo

$$\beta_\nu = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \nu) : A \to A \otimes V,$$

es multiplicativo y de A-módulos por la izquierda para $\varphi_A = \mu_A$.

Si además, $m_{A\otimes V}$ es un morfismo de A-módulos por la izquierda para las acciones

$$\varphi_{A\otimes V} = \mu_A \otimes V, \quad \varphi_{A\otimes V\otimes A\otimes V} = \varphi_{A\otimes V} \otimes A \otimes V,$$

y normalizado respecto a $\nabla^{\nu}_{A\otimes V}$, el morfismo

$$\beta_{\nu} = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \nu) : A \to A \otimes V,$$

es multiplicativo y de A-módulos por la izquierda para $\varphi_A = \mu_A$.

A pesar de que β_{ν} no es un morfismo de monoides, ya que $A \otimes V$ no es un monoide, tenemos que $\beta_{\nu} \circ \eta_A = \nu$. Por lo tanto,

$$\bar{\beta_{\nu}} = p^{\nu}_{A\otimes V} \circ \beta_{\nu} : A \to A \times^{\nu} V$$

es un morfismo de monoides.

Teorema

Sea A un monoide y $m_{A\otimes V} : A\otimes V\otimes A\otimes V \to A\otimes V$ un morfismo de A-módulos por la izquierda para las acciones $\varphi_{A\otimes V}$ y $\varphi_{A\otimes V\otimes A\otimes V}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) El producto $m_{A\otimes V}$ es asociativo con preunidad ν y normalizado respecto a $\nabla^{\nu}_{A\otimes V}$.

(ii) Existen morfismos $\psi_V^A : V\otimes A\to A\otimes V$, $\sigma_V^A : V\otimes V\to A\otimes V$ y $\nu : K\to A\otimes V$ tales que el par $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ es un producto cruzado débil con $m_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes V}$ y satisfaciendo:

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\sigma_V^A)\circ(\psi_V^A\otimes V)\circ(V\otimes\nu) = \nabla_{A\otimes V}\circ(\eta_A\otimes V),$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\sigma_V^A)\circ(\nu\otimes V) = \nabla_{A\otimes V}\circ(\eta_A\otimes V),$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\psi_V^A)\circ(\nu\otimes A) = \beta_{\nu}.$$

En este caso ν es una preunidad para $\mu_{A\otimes V}$ y $\nabla_{A\otimes V} = \nabla^{\nu}_{A\otimes V}$.

J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Weak crossed biproducts and weak projections, **Sci. China Math.** (2012).

J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Weak crossed biproducts and weak projections, **Sci. China Math.** (2012).

Teorema

Sea B un monoide en $\mathcal{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe un producto cruzado débil $(A \otimes V, \mu_{A\otimes V})$ con preunidad ν y un isomorfismo de monoides $\omega : A \times V \to B$.

(ii) Existe un monoide A, un objeto V y morfismos

$$i_A : A \to B, \quad i_V : V \to B, \quad \nabla_{A\otimes V} : A \otimes V \to A \otimes V, \quad \omega : A \times V \to B$$

tales que i_A es un morfismo de monoides, $\nabla_{A\otimes V}$ es un morfismo idempotente de A-módulos por la izquierda para la acción $\varphi_{A\otimes V} = \mu_A \otimes V$, y ω es un isomorfismo tal que

$$\omega \circ p_{A\otimes V} = \mu_B \circ (i_A \otimes i_V),$$

donde $A \times V$ es la imagen de $\nabla_{A\otimes V}$ and $p_{A\otimes V}$ la proyección asociada.

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} = id_{A\otimes V}$.

- Brzeziński, **Commun. in Algebra** (1997).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} = id_{A\otimes V}$.

- Brzeziński, **Commun. in Algebra** (1997).
- Blattner, Cohen y Montgomery, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **T. Am. Math. Soc.** (1986)

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} = id_{A\otimes V}$.

- Brzeziński, **Commun. in Algebra** (1997).
- Blattner, Cohen y Montgomery, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **T. Am. Math. Soc.** (1986)
- Doi y Takeuchi, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **Commun. Algebra** (1986).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} = id_{A\otimes V}$.

- Brzeziński, **Commun. in Algebra** (1997).
- Blattner, Cohen y Montgomery, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **T. Am. Math. Soc.** (1986)
- Doi y Takeuchi, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **Commun. Algebra** (1986).
- Majid, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf en contexto trenzado (braided)), **J. Algebra** (1994).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} = id_{A\otimes V}$.

- Brzeziński, **Commun. in Algebra** (1997).
- Blattner, Cohen y Montgomery, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **T. Am. Math. Soc.** (1986)
- Doi y Takeuchi, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **Commun. Algebra** (1986).
- Majid, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf en contexto trenzado (braided)), **J. Algebra** (1994).
- Bespalov y Drabant, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf en contexto trenzado), **J. Algebra** (1999)-(2001).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} = id_{A\otimes V}$.

- Brzeziński, **Commun. in Algebra** (1997).
- Blattner, Cohen y Montgomery, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **T. Am. Math. Soc.** (1986)
- Doi y Takeuchi, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **Commun. Algebra** (1986).
- Majid, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf en contexto trenzado (braided)), **J. Algebra** (1994).
- Bespalov y Drabant, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf en contexto trenzado), **J. Algebra** (1999)-(2001).
- Lack y Street (productos corona (wreath) asociados a leyes distributivas), **J. Pure Appl. Algebra** (2002).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} = id_{A\otimes V}$.

- Brzeziński, **Commun. in Algebra** (1997).
- Blattner, Cohen y Montgomery, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **T. Am. Math. Soc.** (1986)
- Doi y Takeuchi, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf), **Commun. Algebra** (1986).
- Majid, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf en contexto trenzado (braided)), **J. Algebra** (1994).
- Bespalov y Drabant, (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf en contexto trenzado), **J. Algebra** (1999)-(2001).
- Lack y Street (productos corona (wreath) asociados a leyes distributivas), **J. Pure Appl. Algebra** (2002).
- Agore y Militaru (productos unificados de álgebras de Hopf), **Contemp. Math.** (2013).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} \neq id_{A\otimes V}$.

- Caenepeel y De Groot, (productos smash débiles) **Contemp. Math.** (2000).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} \neq id_{A\otimes V}$.

- Caenepeel y De Groot, (productos smash débiles) **Contemp. Math.** (2000).
- Alonso Álvarez, Fernández Vilaboa, González Rodríguez y Rodríguez Raposo (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf débiles), **Commun. Algebra** (2009), **Homol. Homotopy Appl.** (2014).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} \neq id_{A\otimes V}$.

- Caenepeel y De Groot, (productos smash débiles) **Contemp. Math.** (2000).
- Alonso Álvarez, Fernández Vilaboa, González Rodríguez y Rodríguez Raposo (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf débiles), **Commun. Algebra** (2009), **Homol. Homotopy Appl.** (2014).
- Street (productos corona débiles asociados a leyes distributivas débiles), **Theor. Appl. Categ.** (2009).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} \neq id_{A\otimes V}$.

- Caenepeel y De Groot, (productos smash débiles) **Contemp. Math.** (2000).
- Alonso Álvarez, Fernández Vilaboa, González Rodríguez y Rodríguez Raposo (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf débiles), **Commun. Algebra** (2009), **Homol. Homotopy Appl.** (2014).
- Street (productos corona débiles asociados a leyes distributivas débiles), **Theor. Appl. Categ.** (2009).
- Böhm y Gómez Torrecillas (productos corona débiles asociados a estructuras de factorización bilineal y productos cruzados dobles de álgebras de Hopf débiles), **B. Bel. Math. Soc-Sim.** (2013), **Contemp. Math.** (2013).

Ejemplos con $\nabla_{A\otimes V} \neq id_{A\otimes V}$.

- Caenepeel y De Groot, (productos smash débiles) **Contemp. Math.** (2000).
- Alonso Álvarez, Fernández Vilaboa, González Rodríguez y Rodríguez Raposo (productos cruzados asociados a álgebras de Hopf débiles), **Commun. Algebra** (2009), **Homol. Homotopy Appl.** (2014).
- Street (productos corona débiles asociados a leyes distributivas débiles), **Theor. Appl. Categ.** (2009).
- Böhm y Gómez Torrecillas (productos corona débiles asociados a estructuras de factorización bilineal y productos cruzados dobles de álgebras de Hopf débiles), **B. Bel. Math. Soc-Sim.** (2013), **Contemp. Math.** (2013).
- Alves, Batista, Dokuchaev y Paques, (productos cruzados asociados a acciones parciales de álgebras de Hopf), **Isr. J. Math.** (2013).

G. Böhm, The weak theory of monads, **Adv. Math.** (2010).

G. Böhm, The weak theory of monads, **Adv. Math.** (2010).

Sea $\mathcal{K}$ la 2-categoría de un único objeto correspondiente a $\mathcal{C}$. En el trabajo citado previamente, se introduce una nueva 2-categoría $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$ donde

- 0-celdas: monoides S en $\mathcal{C}$.
- 1-celdas: $S \to T$. Son pares $(F, \psi_F^{S,T})$ tales que F es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\psi_F^{S,T} : F \otimes T \to S \otimes F$ un morfismo tal que

$$\psi_F^{S,T} \circ (F \otimes \mu_T) = (\mu_S \otimes F) \circ (S \otimes \psi_F^{S,T}) \circ (\psi_F^{S,T} \otimes T).$$

- 2-celdas: $(F, \psi_F^{S,T}) \Rightarrow (G, \psi_G^{S,T})$. Son morfismos en $\mathcal{C}$, $\rho : F \to S \otimes G$, tales que

$$(\mu_S \otimes G) \circ (S \otimes \rho) \circ \psi_F^{S,T} = (\mu_S \otimes G) \circ (S \otimes \psi_G^{S,T}) \circ (\rho \otimes T),$$

$$\rho = (\mu_S \otimes G) \circ (S \otimes \psi_G^{S,T}) \circ (\rho \otimes \eta_T).$$

G. Böhm, The weak theory of monads, **Adv. Math.** (2010).

Sea $\mathcal{K}$ la 2-categoría de un único objeto correspondiente a $\mathcal{C}$. En el trabajo citado previamente, se introduce una nueva 2-categoría $\mathrm{EM}^{w}(\mathcal{K})$ donde

- 0-celdas: monoides S en $\mathcal{C}$.
- 1-celdas: $S \to T$. Son pares $(F, \psi_F^{S,T})$ tales que F es un objeto en $\mathcal{C}$ y $\psi_F^{S,T} : F \otimes T \to S \otimes F$ un morfismo tal que

$$\psi_F^{S,T} \circ (F \otimes \mu_T) = (\mu_S \otimes F) \circ (S \otimes \psi_F^{S,T}) \circ (\psi_F^{S,T} \otimes T).$$

- 2-celdas: $(F, \psi_F^{S,T}) \Rightarrow (G, \psi_G^{S,T})$. Son morfismos en $\mathcal{C}$, $\rho : F \to S \otimes G$, tales que

$$(\mu_S \otimes G) \circ (S \otimes \rho) \circ \psi_F^{S,T} = (\mu_S \otimes G) \circ (S \otimes \psi_G^{S,T}) \circ (\rho \otimes T),$$

$$\rho = (\mu_S \otimes G) \circ (S \otimes \psi_G^{S,T}) \circ (\rho \otimes \eta_T).$$

Toda monada en $\mathrm{EM}^{w}(\mathcal{K})$ es un producto cruzado débil en $\mathcal{C}$ y viceversa, todo producto cruzado débil en $\mathcal{C}$ se puede interpretar como una mónada en $\mathrm{EM}^{w}(\mathcal{K})$.

Equivalencias entre productos cruzados débiles

1 Productos cruzados débiles

2 Equivalencias entre productos cruzados débiles

3 Productos asociados a álgebras de Hopf débiles

Definición

Sean $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ y $(A\otimes W, \mu_{A\otimes W})$ productos cruzados débiles con preunidades ν_V y ν_W respectivamente. Diremos que $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ y $(A\otimes W, \mu_{A\otimes W})$ son equivalentes, si existe un isomorfismo de monoides

$$\alpha : A\times V \to A\times W$$

y de A-módulos por la izquierda para las acciones

$$\varphi_{A\times V} = p_{A\otimes V}\circ(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes i_{A\otimes V}),$$

$$\varphi_{A\times W} = p_{A\otimes W}\circ(\mu_A\otimes W)\circ(A\otimes i_{A\otimes W}).$$

Teorema

Sean $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ y $(A\otimes W, \mu_{A\otimes W})$ productos cruzados débiles con preunidades ν_V y ν_W respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Los productos cruzados débiles $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ and $(A\otimes W, \mu_{A\otimes W})$ son equivalentes.

(ii) Existen dos morfismos $T : A\otimes V \to A\otimes W$, $\;S : A\otimes W \to A\otimes V$ de A-módulos por la izquierda para las acciones $\varphi_{A\otimes V}$, $\varphi_{A\otimes W}$ satisfaciendo las condiciones

$$T\circ \nu_V = \nu_W, \quad T\circ \mu_{A\otimes V} = \mu_{A\otimes W}\circ (T\otimes T),$$

$$S\circ T = \nabla_{A\otimes V}, \quad T\circ S = \nabla_{A\otimes W},$$

(iii) Existen dos morfismos $\gamma : V \to A\otimes W$, $\theta : W \to A\otimes V$ satisfaciendo las condiciones

$$\theta = \nabla_{A\otimes V}\circ \theta,$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ (A\otimes \theta)\circ \gamma = \nabla_{A\otimes V}\circ (\eta_A\otimes V),$$

$$\psi_W^A = (\mu_A\otimes W)\circ (\mu_A\otimes \gamma)\circ (A\otimes \psi_V^A)\circ (\theta\otimes A),$$

$$\sigma_W^A = (\mu_A\otimes W)\circ (A\otimes \gamma)\circ \mu_{A\otimes V}\circ (\theta\otimes \theta),$$

$$\nu_W = (\mu_A\otimes V)\circ (A\otimes \gamma)\circ \nu_V.$$

Teorema

Sea $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ un producto cruzado débil con preunidad ν_V y sea W un objeto de $\mathcal{C}$ cualquiera. Supongamos que existen dos morfismos $\gamma : V \to A\otimes W$, $\theta : W \to A\otimes V$ satisfaciendo las condiciones

$$\theta = \nabla_{A\otimes V} \circ \theta,$$

$$(\mu_A \otimes V) \circ (A\otimes\theta) \circ \gamma = \nabla_{A\otimes V} \circ (\eta_A \otimes V).$$

Entonces si definimos ψ_W^A, σ_W^A y ν_W como

$$\psi_W^A = (\mu_A \otimes W) \circ (\mu_A \otimes \gamma) \circ (A \otimes \psi_V^A) \circ (\theta \otimes A),$$

$$\sigma_W^A = (\mu_A \otimes W) \circ (A\otimes \gamma) \circ \mu_{A\otimes V} \circ (\theta \otimes \theta),$$

$$\nu_W = (\mu_A \otimes V) \circ (A \otimes \gamma) \circ \nu_V,$$

se tiene que $(A\otimes W, \mu_{A\otimes W})$ es un producto cruzado débil con preunidad ν_W y equivalente a $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$.

El caso de los productos cruzados de Brzeziński

(Brzeziński **Commun. in Algebra** (1997)) Sea (A, η_A, μ_A) un monoide y V un objeto equipado con un morfismo $\eta_V : K \to V$.
El objeto $A \otimes V$ es un monoide con unidad $\eta_A \otimes \eta_V$ y cuyo producto cumple la igualdad $\mu_{A\otimes V} \circ (A \otimes \eta_V \otimes A \otimes V) = \mu_A \otimes V$, si y sólo si existen dos morfismos

$$\psi_V^A : V \otimes A \to A \otimes V, \;\; \sigma_V^A : V \otimes V \to A \otimes V$$

satisfaciendo **(1)**, la condición twisted, la condición de cociclo y

$$\psi_V^A \circ (\eta_V \otimes A) = A \otimes \eta_V, \;\; \psi_V^A \circ (V \otimes \eta_A) = \eta_A \otimes V,$$

$$\sigma_V^A \circ (\eta_V \otimes V) = \sigma_V^A \circ (V \otimes \eta_V) = \eta_A \otimes V.$$

En este caso, el producto en $A \otimes V$ es el definido en la primera parte de esta charla.

El caso de los productos cruzados de Brzeziński

(Brzeziński **Commun. in Algebra** (1997)) Sea (A, η_A, μ_A) un monoide y V un objeto equipado con un morfismo $\eta_V : K \to V$.
El objeto $A \otimes V$ es un monoide con unidad $\eta_A \otimes \eta_V$ y cuyo producto cumple la igualdad $\mu_{A\otimes V} \circ (A \otimes \eta_V \otimes A \otimes V) = \mu_A \otimes V$, si y sólo si existen dos morfismos

$$\psi_V^A : V \otimes A \to A \otimes V, \;\; \sigma_V^A : V \otimes V \to A \otimes V$$

satisfaciendo **(1)**, la condición twisted, la condición de cociclo y

$$\psi_V^A \circ (\eta_V \otimes A) = A \otimes \eta_V, \;\; \psi_V^A \circ (V \otimes \eta_A) = \eta_A \otimes V,$$

$$\sigma_V^A \circ (\eta_V \otimes V) = \sigma_V^A \circ (V \otimes \eta_V) = \eta_A \otimes V.$$

En este caso, el producto en $A \otimes V$ es el definido en la primera parte de esta charla.

Resaltar, otra vez, que los productos cruzados de Brzeziński son ejemplos de productos cruzados débiles cuyo idempotente asociado es la identidad. También, en este caso, la preunidad $\nu_V = \eta_A \otimes \eta_V$ es una unidad.

Teorema (equivalencia para los productos cruzados de Brzeziński)

Sean $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ y $(A\otimes W, \mu_{A\otimes W})$ dos productos cruzados de Brzeziński con morfismos η_V y η_W respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Los productos cruzados $(A\otimes V, \mu_{A\otimes V})$ y $(A\otimes W, \mu_{A\otimes W})$ son equivalentes.

(ii) Existen dos morfismos $\gamma : V \rightarrow A\otimes W, \quad \theta : W \rightarrow A\otimes V$ satisfaciendo las condiciones:

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\theta)\circ\gamma = \eta_A\otimes V,$$

$$\psi_W^A = (\mu_A\otimes W)\circ(\mu_A\otimes\gamma)\circ(A\otimes\psi_V^A)\circ(\theta\otimes A),$$

$$\sigma_W^A = (\mu_A\otimes W)\circ(A\otimes\gamma)\circ\mu_{A\otimes V}\circ(\theta\otimes\theta).$$

Mejora de otros resultados: Equivalencias para los productos cruzados de Brzeziński

- F. Panaite, Invariance under twisting for crossed products, **P. Am. Math. Soc.** (2012).
- F. Panaite, Equivalent crossed products and cross product bialgebras, **Commun. Algebra** (2014).

Panaite probó que dos productos cruzados de Brzeziński

$$(A\otimes V, \mu^1_{A\otimes V}),\ \ (A\otimes V, \mu^2_{A\otimes V}),$$

asociados a las cuádruplas

$$\mathbb{A}^1_V=(A,V,\psi_V^{A,1},\sigma_V^{A,1}),\ \ \mathbb{A}^2_V=(A,V,\psi_V^{A,2},\sigma_V^{A,2}),$$

con morfismos η^1_V and η^2_V, son equivalentes, si y sólo si, existen dos morfismos

$$\gamma,\ \theta : V\rightarrow A\otimes V$$

tales que:

$$\psi_V^{A,2}=(\mu_A\otimes V)\circ(\mu_A\otimes\gamma)\circ(A\otimes\psi_V^{A,1})\circ(\theta\otimes A),$$

$$\sigma_V^{A,2}=(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\gamma)\circ\mu^1_{A\otimes V}\circ(\theta\otimes\theta),$$

$$\theta\circ\eta^2_V=\eta_A\otimes\eta^1_V,\ \ \gamma\circ\eta^1_V=\eta_A\otimes\eta^2_V,$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\theta)\circ\gamma=\eta_A\otimes V,$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\gamma)\circ\theta=\eta_A\otimes V,$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(\mu_A\otimes\sigma_V^{A,2})\circ(A\otimes\gamma\otimes V)\circ(\psi_V^{A,1}\otimes V)\circ(V\otimes\gamma)=(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\gamma)\circ\sigma_V^{A,1}.$$

Panaite probó que dos productos cruzados de Brzeziński

$$(A\otimes V, \mu^{1}_{A\otimes V}),\ \ (A\otimes V, \mu^{2}_{A\otimes V}),$$

asociados a las cuádruplas

$$\mathbb{A}^{1}_{V} = (A, V, \psi^{A,1}_{V}, \sigma^{A,1}_{V}),\ \ \mathbb{A}^{2}_{V} = (A, V, \psi^{A,2}_{V}, \sigma^{A,2}_{V}),$$

con morfismos η^{1}_{V} y η^{2}_{V}, son equivalentes, si y sólo si, existen dos morfismos

$$\gamma,\ \theta : V \to A\otimes V$$

tales que:

$$\psi^{A,2}_{V} = (\mu_A\otimes V)\circ(\mu_A\otimes\gamma)\circ(A\otimes\psi^{A,1}_{V})\circ(\theta\otimes A),$$

$$\sigma^{A,2}_{V} = (\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\gamma)\circ\mu^{1}_{A\otimes V}\circ(\theta\otimes\theta),$$

$$\theta\circ\eta^{2}_{V} = \eta_A\otimes\eta^{1}_{V},\ \ \gamma\circ\eta^{1}_{V} = \eta_A\otimes\eta^{2}_{V},$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\theta)\circ\gamma = \eta_A\otimes V,$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\gamma)\circ\theta = \eta_A\otimes V,$$

$$(\mu_A\otimes V)\circ(\mu_A\otimes\sigma^{A,2}_{V})\circ(A\otimes\gamma\otimes V)\circ(\psi^{A,1}_{V}\otimes V)\circ(V\otimes\gamma) = (\mu_A\otimes V)\circ(A\otimes\gamma)\circ\sigma^{A,1}_{V}.$$

Productos asociados a álgebras de Hopf débiles

1. Productos cruzados débiles
2. Equivalencias entre productos cruzados débiles
3. Productos asociados a álgebras de Hopf débiles

En esta sección asumiremos que la categoría $\mathcal{C}$ es simétrica con isomorfismo natural de simetría c.

En esta sección asumiremos que la categoría $\mathcal{C}$ es simétrica con isomorfismo natural de simetría c.

Definición

Una biálgebra débil H en $\mathcal{C}$ es un monoide-comonoide $(H, \eta_H, \mu_H, \varepsilon_H, \delta_H)$ tal que:

(a1) $\delta_H \circ \mu_H = (\mu_H \otimes \mu_H) \circ \delta_{H^2}$,

(a2) $\varepsilon_H \circ \mu_H \circ (\mu_H \otimes H) = (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes \delta_H \otimes H)$
$= (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) \circ (\mu_H \otimes \mu_H) \circ (H \otimes (c_{H,H} \circ \delta_H) \otimes H)$,

(a3) $(\delta_H \otimes H) \circ \delta_H \circ \eta_H = (H \otimes \mu_H \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H)$
$= (H \otimes (\mu_H \circ c_{H,H}) \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H) \circ (\eta_H \otimes \eta_H)$.

donde $\delta_{H^2} = (H \otimes c_{H,H} \otimes H) \circ (\delta_H \otimes \delta_H)$.
Si además,

(a4) existe un morfismo $\lambda_H : H \to H$ en $\mathcal{C}$ (llamado la antípoda de H) satisfaciendo:

- (a4-1) $id_H * \lambda_H = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H)$,
- (a4-2) $\lambda_H * id_H = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H))$,
- (a4-3) $\lambda_H * id_H * \lambda_H = \lambda_H$.

diremos que H es un álgebra de Hopf débil en $\mathcal{C}$.

Para H, podemos definir cuatro morfismos idempotentes

$$\Pi_H^L = id_H * \lambda_H = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H),$$

$$\Pi_H^R = \lambda_H * id_H = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)),$$

$$\overline{\Pi}_H^L = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H),$$

$$\overline{\Pi}_H^R = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)).$$

Para H, podemos definir cuatro morfismos idempotentes

$$\Pi_H^L = id_H * \lambda_H = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,H}) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H),$$

$$\Pi_H^R = \lambda_H * id_H = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ (c_{H,H} \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)),$$

$$\overline{\Pi}_H^L = (H \otimes (\varepsilon_H \circ \mu_H)) \circ ((\delta_H \circ \eta_H) \otimes H),$$

$$\overline{\Pi}_H^R = ((\varepsilon_H \circ \mu_H) \otimes H) \circ (H \otimes (\delta_H \circ \eta_H)).$$

Proposición

Sea H un álgebra de Hopf débil. Se cumplen las siguientes igualdades:

$$\Pi_H^L \circ \overline{\Pi}_H^L = \Pi_H^L, \quad \Pi_H^L \circ \overline{\Pi}_H^R = \overline{\Pi}_H^R, \quad \overline{\Pi}_H^L \circ \Pi_H^L = \overline{\Pi}_H^L, \quad \overline{\Pi}_H^R \circ \Pi_H^L = \Pi_H^L,$$

$$\Pi_H^R \circ \overline{\Pi}_H^L = \overline{\Pi}_H^L, \quad \Pi_H^R \circ \overline{\Pi}_H^R = \Pi_H^R, \quad \overline{\Pi}_H^L \circ \Pi_H^R = \Pi_H^R, \quad \overline{\Pi}_H^R \circ \Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^R.$$

Proposición

Sea H un álgebra de Hopf débil. Se cumplen las siguientes igualdades:

$$\Pi_H^L \circ \lambda_H = \Pi_H^L \circ \Pi_H^R = \lambda_H \circ \Pi_H^R, \quad \Pi_H^R \circ \lambda_H = \Pi_H^R \circ \Pi_H^L = \lambda_H \circ \Pi_H^L,$$

$$\Pi_H^L = \overline{\Pi}_H^R \circ \lambda_H = \lambda_H \circ \overline{\Pi}_H^L, \quad \Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^L \circ \lambda_H = \lambda_H \circ \overline{\Pi}_H^R.$$

Proposición

Sea H un álgebra de Hopf débil. Se cumplen las siguientes igualdades:

$$\Pi_H^L \circ \lambda_H = \Pi_H^L \circ \Pi_H^R = \lambda_H \circ \Pi_H^R, \quad \Pi_H^R \circ \lambda_H = \Pi_H^R \circ \Pi_H^L = \lambda_H \circ \Pi_H^L,$$

$$\Pi_H^L = \overline{\Pi}_H^R \circ \lambda_H = \lambda_H \circ \overline{\Pi}_H^L, \quad \Pi_H^R = \overline{\Pi}_H^L \circ \lambda_H = \lambda_H \circ \overline{\Pi}_H^R.$$

Proposición

Sea H un álgebra de Hopf débil. Se cumplen las siguientes igualdades:

$$\lambda_H \circ \mu_H = \mu_H \circ c_{H,H} \circ (\lambda_H \otimes \lambda_H),$$

$$\delta_H \circ \lambda_H = (\lambda_H \otimes \lambda_H) \circ c_{H,H} \circ \delta_H,$$

Definición

Dada un álgebra de Hopf débil H y un monoide B, una acción débil sobre B es un morfismo $\varphi_B : H \otimes B \to B$ satisfaciendo

$$\varphi_B \circ (H \otimes \mu_B) = \mu_B \circ (\varphi_B \otimes \varphi_B) \circ (H \otimes c_{H,B} \otimes B) \circ (\delta_H \otimes B \otimes B).$$

Definición

Dada un álgebra de Hopf débil H y un monoide B, una acción débil sobre B es un morfismo $\varphi_B : H \otimes B \to B$ satisfaciendo

$$\varphi_B \circ (H \otimes \mu_B) = \mu_B \circ (\varphi_B \otimes \varphi_B) \circ (H \otimes c_{H,B} \otimes B) \circ (\delta_H \otimes B \otimes B).$$

Proposición

Dada un álgebra de Hopf débil H, un monoide B y una acción débil $\varphi_B : H \otimes B \to B$ sobre B, si denotamos por $u_1^{\varphi_B}$ el morfismo $\varphi_B \circ (H \otimes \eta_B)$, se tiene que

$$u_1^{\varphi_B} * u_1^{\varphi_B} = u_1^{\varphi_B}.$$

Definición

Dada un álgebra de Hopf débil H y un monoide B, una acción débil sobre B es un morfismo $\varphi_B : H \otimes B \to B$ satisfaciendo

$$\varphi_B \circ (H \otimes \mu_B) = \mu_B \circ (\varphi_B \otimes \varphi_B) \circ (H \otimes c_{H,B} \otimes B) \circ (\delta_H \otimes B \otimes B).$$

Proposición

Dada un álgebra de Hopf débil H, un monoide B y una acción débil $\varphi_B : H \otimes B \to B$ sobre B, si denotamos por $u_1^{\varphi_B}$ el morfismo $\varphi_B \circ (H \otimes \eta_B)$, se tiene que

$$u_1^{\varphi_B} * u_1^{\varphi_B} = u_1^{\varphi_B}.$$

Para una acción débil φ_B y cualquier morfismo $\sigma : H \otimes H \to B$, se definen los morfismos

$$\psi_H^B : H \otimes B \to B \otimes H, \quad \sigma_H^B : H \otimes H \to B \otimes H,$$

por

$$\psi_H^B = (\varphi_B \otimes H) \circ (H \otimes c_{H,B}) \circ (\delta_H \otimes B)$$

y

$$\sigma_H^B = (\sigma \otimes \mu_H) \circ \delta_{H^2}.$$

Proposición

Dada un álgebra de Hopf débil H, un monoide B y una acción débil $\varphi_B : H \otimes B \to B$ sobre B, el morfismo ψ_H^B satisface

$$(\mu_B \otimes H) \circ (B \otimes \psi_H^B) \circ (\psi_H^B \otimes B) = \psi_H^B \circ (H \otimes \mu_B).$$

Por lo tanto,

$$\nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} = (\mu_B \otimes H) \circ (B \otimes \psi_H^B) \circ (B \otimes H \otimes \eta_B)$$

es idempotente y además:

$$\psi_H^B \circ (H \otimes \eta_B) = (u_1^{\varphi_B} \otimes H) \circ \delta_H, \quad (B \otimes \varepsilon_H) \circ \psi_H^B = \varphi_B, \quad (B \otimes \varepsilon_H) \circ \psi_H^B \circ (H \otimes \eta_B) = u_1^{\varphi_B},$$

$$\nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} = (\mu_B \otimes H) \circ (B \otimes ((u_1^{\varphi_B} \otimes H) \circ \delta_H)), \quad \nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} \circ \psi_H^B = \psi_H^B$$

$$\nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} \circ (\eta_B \otimes H) = (u_1^{\varphi_B} \otimes H) \circ \delta_H, \quad (\mu_B \otimes H) \circ (B \otimes \nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B}) = (B \otimes \nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B}) \circ (\mu_B \otimes H),$$

$$(B \otimes \varepsilon_H) \circ \nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} = \mu_B \circ (B \otimes u_1^{\varphi_B}), \quad (B \otimes \delta_H) \circ \nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} = (\nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} \otimes H) \circ (H \otimes \delta_H).$$

$$\mu_B \circ (u_1^{\varphi_B} \otimes \varphi_B) \circ (\delta_H \otimes B) = \varphi_B,$$

$$(\mu_B \otimes H) \circ (u_1^{\varphi_B} \otimes \psi_H^B) \circ (\delta_H \otimes B) = \psi_H^B,$$

Proposición

Dada un álgebra de Hopf débil H, un monoide B, una acción débil $\varphi_B : H \otimes B \to B$, y un morfismo $\sigma : H \otimes H \to B$, el morfismo σ_H^B cumple la siguiente igualdad:

$$(B \otimes \delta_H) \circ \sigma_H^B = (\sigma_H^B \otimes \mu_H) \circ \delta_{H^2}.$$

Proposición

Dada un álgebra de Hopf débil H, un monoide B, una acción débil $\varphi_B : H \otimes B \to B$, y un morfismo $\sigma : H \otimes H \to B$, el morfismo σ_H^B cumple la siguiente igualdad:

$$(B \otimes \delta_H) \circ \sigma_H^B = (\sigma_H^B \otimes \mu_H) \circ \delta_{H^2}.$$

Proposición

Sean H un álgebra de Hopf débil, B un monoide, y $\varphi_B : H \otimes B \to B$ una acción débil. Entonces:

$$\mu_B \circ (B \otimes u_1^{\varphi_B}) \circ \psi_H^B = \varphi_B.$$

Sea $\sigma : H \otimes H \to B$ un morfismo. Definamos $u_2^{\varphi_B} : H \otimes H \to B$ como $u_2^{\varphi_B} = u_1^{\varphi_B} \circ \mu_H$. Si $\sigma * u_2^{\varphi_B} = \sigma$, entonces:

$$\mu_B \circ (B \otimes u_1^{\varphi_B}) \circ \sigma_H^B = \sigma,$$

$$\nabla_{B \otimes H}^{\varphi_B} \circ \sigma_H^B = \sigma_H^B,$$

$$(B \otimes \varepsilon_H) \circ \sigma_H^B = \sigma.$$

Como consecuencia de los resultados previos, si $\varphi_B : H \otimes B \to B$ es una acción débil y $\sigma : H \otimes H \to B$ es un morfismo tal que $\sigma * u_2^{\varphi_B} = \sigma$, obtenemos una cuádrupla

$$\mathbb{B}_H = (B, H, \psi_H^B, \sigma_H^B)$$

que induce productos en $B \otimes H$ y en $B \times_{\varphi_B}^{\sigma} H$ dados por

$$\mu_{B \otimes_{\varphi_B}^{\sigma} H} = (\mu_B \otimes H) \circ (\mu_B \otimes \sigma_H^B) \circ (B \otimes \psi_H^B \otimes H),$$

$$\mu_{B \times_{\varphi_B}^{\sigma} H} = p_{B \otimes H}^{\varphi_B} \circ \mu_{B \otimes H} \circ (i_{B \otimes H}^{\varphi_B} \otimes i_{B \otimes H}^{\varphi_B}),$$

donde $B \times_{\varphi_B}^{\sigma} H$, $i_{B \otimes H}^{\varphi_B} : B \times_{\varphi_B}^{\sigma} H \to B \otimes H$ y $p_{B \otimes H}^{\varphi_B} : B \otimes H \to B \times_{\varphi_B}^{\sigma} H$ denotan la imagen, la inyección, y la proyección asociadas al idempotente $\nabla_{B \otimes H}^{\varphi_B}$.

Teorema

Sean H un álgebra de Hopf débil, B un monoide, y $\varphi_B : H \otimes B \to B$ una acción débil. Tomemos un morfismo $\sigma : H \otimes H \to B$ tal que $\sigma * u_2^{\varphi_B} = \sigma$ y sea $\mathbb{B}_H$ su cuádrupla asociada. Entonces:

(i) La cuádrupla $\mathbb{B}_H$ satisface la condición twisted si, y sólo si, σ satisface la condición twisted

$$\mu_B \circ (B \otimes \sigma) \circ (\psi_H^B \otimes H) \circ (H \otimes \psi_H^B) = \mu_B \circ (B \otimes \varphi_B) \circ (\sigma_H^B \otimes B).$$

(ii) La cuádrupla $\mathbb{B}_H$ satisface la condición de cociclo si, y sólo si, σ satisface la condición de cociclo

$$\mu_B \circ (B \otimes \sigma) \circ (\psi_H^B \otimes H) \circ (H \otimes \sigma_H^B) = \mu_B \circ (B \otimes \sigma) \circ (\sigma_H^B \otimes B).$$

Teorema

Sean H un álgebra de Hopf débil, B un monoide, y $\varphi_B : H \otimes B \to B$ una acción débil. Tomemos un morfismo $\sigma : H \otimes H \to B$ tal que $\sigma * u_2^{\varphi_B} = \sigma$ y sea $\mathbb{B}_H$ su cuádrupla asociada. Supongamos que $\mathbb{B}_H$ satisface las condiciones twisted y de cociclo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) El morfismo $\nu = \nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} \circ (\eta_B \otimes \eta_H)$ es una preunidad para el producto cruzado débil asociado a $\mathbb{B}_H$.

(ii) El morfismo σ_H^B satisface la condición de normalidad

$$\sigma_H^B \circ (\eta_H \otimes H) = \sigma_H^B \circ (H \otimes \eta_H) = \nabla_{B\otimes H}^{\varphi_B} \circ (\eta_B \otimes H).$$

(ii3) El morfismo σ satisface la condición de normalidad

$$\sigma \circ (\eta_H \otimes H) = \sigma \circ (H \otimes \eta_H) = u_1^{\varphi_B}.$$

Definición

Sean H un álgebra de Hopf débil, B un monoide, $\varphi_B, \phi_B : H \otimes B \to B$ acciones débiles, y $\sigma, \tau : H \otimes H \to B$ morfismos tales que $\sigma * u_2^{\varphi_B} = \sigma$, $\tau * u_2^{\phi_B} = \tau$. Asumamos que σ, τ satisfacen las condiciones twisted y de cociclo, y supongamos que ν es una preunidad para $\mu_{B\otimes^{\sigma}_{\varphi_B}H}$, y que u es una preunidad para $\mu_{B\otimes^{\tau}_{\phi_B}H}$.

Diremos que $(B \otimes H, \mu_{B\otimes^{\sigma}_{\varphi_B}H})$ y $(B \otimes H, \mu_{B\otimes^{\tau}_{\phi_B}H})$ son productos cruzados débiles equivalentes si existe un isomorfismo de B-módulos por la izquierda, de H-comódulos por la derecha, y de monoides

$$\alpha : B \times^{\sigma}_{\varphi_B} H \to B \times^{\tau}_{\phi_B} H,$$

donde

$$\varphi_{B\times^{\sigma}_{\varphi_B}H} = p^{\varphi_B}_{B\otimes H} \circ (\mu_B \otimes H) \circ (B \otimes i^{\varphi_B}_{B\otimes H}), \quad \varphi_{B\times^{\tau}_{\phi_B}H} = p^{\phi_B}_{B\otimes H} \circ (\mu_B \otimes H) \circ (B \otimes p^{\phi_B}_{B\otimes H}),$$

$$\rho_{B\times^{\sigma}_{\varphi_B}H} = (p^{\varphi_B}_{B\otimes H} \otimes H) \circ (B \otimes \delta_H) \circ i^{\varphi_B}_{B\otimes H}, \quad \rho_{B\times^{\tau}_{\phi_B}H} = (p^{\phi_B}_{B\otimes H} \otimes H) \circ (B \otimes \delta_H) \circ i^{\phi_B}_{B\otimes H}.$$

Teorema

Sean H un álgebra de Hopf débil, B un monoide, $\varphi_B, \phi_B : H\otimes B \to B$ acciones débiles, y $\sigma, \tau : H\otimes H \to B$ morfismos tales que $\sigma * u_2^{\varphi_B} = \sigma$, $\tau * u_2^{\phi_B} = \tau$. Asumamos que σ, τ satisfacen las condiciones twisted y de cociclo, y supongamos que ν es una preunidad para $\mu_{B\otimes_{\varphi_B}^{\sigma} H}$, y que u es una preunidad para $\mu_{B\otimes_{\phi_B}^{\tau} H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Los productos cruzados débiles $(B\otimes H, \mu_{B\otimes_{\varphi_B}^{\sigma} H})$ and $(B\otimes H, \mu_{B\otimes_{\phi_B}^{\tau} H})$ son equivalentes.

(ii) Existen dos morfismos $h, h^{-1} : H \to B$ tales que

$$h^{-1} * h = u_1^{\varphi_B},$$

$$h * h^{-1} * h = h, \quad h^{-1} * h * h^{-1} = h^{-1},$$

$$\phi_B = \mu_B \circ ((\mu_B \circ (h \otimes \varphi_B)) \otimes h^{-1}) \circ (\delta_H \otimes c_{H,B}) \circ (\delta_H \otimes B),$$

$$\tau = \mu_B \circ (B \otimes h^{-1}) \circ \mu_{B\otimes_{\varphi_B}^{\sigma} H} \circ (((h \otimes H) \circ \delta_H) \otimes ((h \otimes H) \circ \delta_H)),$$

$$u = ((\mu_B \circ (B \otimes h^{-1})) \otimes H) \circ (B \otimes \delta_H) \circ \nu.$$

Definición

Dada un álgebra de Hopf débil H y un monoide B, diremos que (B, φ_B) es un H-módulo álgebra débil por la izquierda si $\varphi_B : H \otimes B \to B$ es una acción débil,

$$\varphi_B \circ (\eta_H \otimes B) = id_B,$$

$$u_2^{\varphi_B} = \varphi_B \circ (H \otimes u_1^{\varphi_B}),$$

y se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

$$\varphi_B \circ (\Pi_H^L \otimes B) = \mu_B \circ (u_1^{\varphi_B} \otimes B),$$

$$\varphi_B \circ (\overline{\Pi}_H^L \otimes B) = \mu_B \circ c_{B,B} \circ (u_1^{\varphi_B} \otimes B),$$

$$u_1^{\varphi_B} \circ \Pi_H^L = u_1^{\varphi_B},$$

$$u_1^{\varphi_B} \circ \overline{\Pi}_H^L = u_1^{\varphi_B},$$

$$u_1^{\varphi_B} \circ \mu_H = u_1^{\varphi_B} \circ \mu_H \circ (H \otimes \overline{\Pi}_H^L),$$

$$u_1^{\varphi_B} \circ \mu_H = u_1^{\varphi_B} \circ \mu_H \circ (H \otimes \Pi_H^L).$$

Teorema

Sean H un álgebra de Hopf débil, B un monoide, (B, φ_B), (B, ϕ_B) H-módulo álgebras débiles por la izquierda, y $\sigma, \tau : H \otimes H \to B$ morfismos tales que $\sigma * u_2^{\varphi_B} = \sigma$, $\tau * u_2^{\phi_B} = \tau$. Asumamos que $(B, H, \psi_H^B, \sigma_H^B)$, $(B, H, \Gamma_H^B, \tau_H^B)$ son las cuádruplas asociadas a (φ_B, σ), (ϕ_B, τ) y que satisfacen las condiciones twisted, de cociclo, y de normalidad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Los productos cruzados débiles $(B \otimes H, \mu_{B \otimes_{\varphi_B}^{\sigma} H})$ and $(B \otimes H, \mu_{B \otimes_{\phi_B}^{\tau} H})$ son equivalentes.

(ii) Existen dos morfismos $h, h^{-1} : H \to B$ tales que

$$h \circ \eta_H = \eta_B,$$

$$h^{-1} * h = u_1^{\varphi_B}, \quad h * h^{-1} = u_1^{\phi_B}$$

$$h * h^{-1} * h = h, \quad h^{-1} * h * h^{-1} = h^{-1},$$

$$\mu_B \circ (B \otimes h) \circ \Gamma_H^B = \mu_B \circ (h \otimes \varphi_B) \circ (\delta_H \otimes B),$$

$$\mu_B \circ (B \otimes h) \circ \tau_H^B = (\mu_B \otimes H) \circ (\mu_B \otimes \sigma) \circ (B \otimes \psi_H^B \otimes H) \circ (((h \otimes H) \circ \delta_H) \otimes ((h \otimes H) \circ \delta_H)).$$

- J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Preunits and weak crossed products, **J. Pure Appl. Algebra** (2009).
- A.B. Rodríguez Raposo, Crossed products for weak Hopf algebras, **Comm. Algebra** (2009).
- J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Weak crossed biproducts and weak projections, **Sci. China Math.** (2012).
- J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Partial and unified crossed products are weak crossed products. **Contemp. Math.** (2013).
- N. Alonso Álvarez, J.M.Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Cohomology of algebras over weak Hopf algebras, **Homol. Homotopy Appl.** (2014).
- J.M.Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, A.B. Rodríguez Raposo Equivalences for weak crossed products, **Comm. Algebra** (en prensa) (2016) (disponible en arXiv:1505.055329)
- N. Alonso Álvarez, J.M.Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Cohomological obstructions for cleft extensions over weak Hopf algebras, (en preparación) (2016).

- J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Preunits and weak crossed products, **J. Pure Appl. Algebra** (2009).
- A.B. Rodríguez Raposo, Crossed products for weak Hopf algebras, **Comm. Algebra** (2009).
- J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Weak crossed biproducts and weak projections, **Sci. China Math.** (2012).
- J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, R., A.B. Rodríguez Raposo, Partial and unified crossed products are weak crossed products. **Contemp. Math.** (2013).
- N. Alonso Álvarez, J.M.Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Cohomology of algebras over weak Hopf algebras, **Homol. Homotopy Appl.** (2014).
- J.M.Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, A.B. Rodríguez Raposo Equivalences for weak crossed products, **Comm. Algebra** (en prensa) (2016) (disponible en arXiv:1505.055329)
- N. Alonso Álvarez, J.M.Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez, Cohomological obstructions for cleft extensions over weak Hopf algebras, (en preparación) (2016).

Muchas gracias