CURSO CERO

Iván C. Area Carracedo
Ramón González Rodríguez
Alberto Martín Méndez

Edita: Servicio de Publicacións de Teleco Vigo, Sociedade Cooperativa Galega.
Depósito Legal: VG: 915–2003.
ISBN: 84–932797–6–5.

Índice

Obxecto das Presentes Notas

Nos últimos anos ven–se constatando un grande aumento nas diferenzas entre os saberes e habilidades que as/os alunas/os posuen ao acceder ao primeiro curso da Escola e os que son necesários para obter o máximo rendemento das explicacións dos docentes.

Evidentemente, e como case todas as cousas, a afirmación anterior é relativa e depende de cada caso concreto, e quixeramos indicar que é aplicable ao aluno medio que accede á Escola.

Con obxecto de tentar paliar estas diferenzas, a Dirección da E.T.S.E. de Telecomunicación ven de pór en marcha este "CURSO CERO" coa finalidade de repasar os coñecementos básicos e fundamentais, tanto en Física como en Matemáticas, tentando mellorar o seguimento do primeiro curso actualmente impartido nas titulacións de Enxeñeiro de Telecomunicación e Enxeñeiro Técnico de Telecomunicación.

A nosa ideia é desenvolver e lembrar certos temas que aparecen nos obxectivos do Bacharelato ou Formación Profisional e que ao alunado non domina coa soltura necesária neste seu primeiro curso universitário. Pensamos que pode ser útil para o aluno coñecer a diferenza real no seu caso concreto con obxecto de que poda ir tomando as medidas axeitadas para a sua solución.

Estas notas pretenden ser un guión (e non un substituto do profesor) para as aulas adicadas a Matemáticas. Polo tempo do que se dispón tampouco se pretende poder repasar todo o necesário, sendo conscientes de que moitos temas importantes quedaron fóra desta primeira vez que se imparte o curso cero.

Nas presentes notas, escritas en LaTeX empregando unha tradución do estilo `amsbook`, incluen–se algúns exemplos resoltos e bastantes exercícios propostos:

"Mallando e mallando aprendin a mallar."

Agradecimento especial para Félix Balado Pumariño pola axuda lingüística, onde os autores consideraron a gramática descrita en Costas Casas et al.[1] servindo de inestimable axuda o Vocabulario de Matemáticas de X.M. Masa[2].

[1]X.X. Costas Casas, M. dos Anxos González Refoxo, C.C. Morán Fraga, e X.C. Rábade Castiñeira. *Nova Gramática para a aprendizaxe da língua*. Vía Láctea, A Coruña, 1988.

[2]X.M. Masa Váquez (Coordinador) e B. Fortes López (Asesora Lingüística). *Vocabulario de Matemáticas (galego–español–inglés–portugués)*. Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1995. Servicio de Normalización Lingüística.

Por outra banda, sinalar que en `http://www.dma.uvigo.es/~area` manten–se unha fé de erratas detectadas. Tamén pode ser interesante dar a coñecer que os autores non reciben nengún tipo de retribución polos textos publicados, preferindo que o posible benefício redunde tanto na calidade da impresión como no prezo de venda ao público.

Finalmente, agradecer ao Servicio de Publicacións de Teleco Vigo, Sociedade Cooperativa Galega polas facilidades para publicar o material.

TEMA 1

Fundamentos de lóxica

No desenvolvimento de calquer matéria de matemáticas cumpre coñecer e manexar con soltura unha série de coñecimentos básicos de lóxica. O que se pretende neste primeiro capítulo é introducir dun xeito moi elemental ditos coñecimentos.

1.1. Axiomas. Teoremas, proposicións, lemas e corolários

A Matemática apresenta–se hoxe en dia como unha ciéncia formal que estuda as relacións existentes entre certos entes de naturaleza abstracta, que chamaremos obxectos matemáticos e que poden ser caracterizados por verificar unha série de propriedades, denominadas axiomas, que se aceitan sen necesidade de demonstración e que non deben dar lugar a incoeréncias nen contradicións. Partindo destas premisas ou axiomas, e empregando as regras da lóxica van–se deducindo as diversas propriedades do obxecto matemático, enunciados como Proposicións, Lemas, Teoremas ou Corolários.

Esta nomenclatura é normalmente empregada do seguinte xeito: un resultado moi importante recebe o nome de Teorema. Outros resultados que inicialmente non semellan tan importantes, Proposicións. Para obter unha propriedade normalmente proban–se outras relacións con anterioridade, recibindo o nome de Lemas. As consecuéncias dos Teoremas e Proposicións receben o nome de Corolários, as mais das veces extremadamente úteis.

Por exemplo, na construcción do obxecto matemático coñecido como grupo achamos que se define como un conxunto G onde temos definida unha operación

$$G \times G \xrightarrow{*} G \quad (a, b) \to a * b$$

que verifica as siguientes propriedades (chamadas axiomas da estrutura):

i) **Propriedade asociativa**: $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in G$.
ii) **Existéncia de elemento neutro**: Existe $e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$ para todo $a \in G$.
iii) **Existéncia de elemento inverso**: Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Se ademais se verifica o axioma $a * b = b * a$ para todos $a, b \in G$, diremos que o grupo G é conmutativo ou abeliano.

Acabamos de dar unha série de axiomas que son necesários para que un conxunto cunha operación receba o nome de grupo. Este tipo de axiomas son normalmente o resultado de observar moitos casos particulares, que unha vez definido o conceito de grupo pasan a ser exemplos.

Exemplos de grupos existen moitos e a teoria matemática que os estuda chama–se teoria de grupos. A continuación damos algúns exemplos de conxuntos que son grupos coa operación indicada.

Exemplos 1.1.

i) Consideremos o conxunto $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dos números inteiros e a soma de números inteiros

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \xrightarrow{+} \mathbf{Z} \quad (a, b) \to a + b.$$

O par $(\mathbf{Z}, +)$ é un grupo conmutativo xá que a soma de números inteiros é conmutativa. O elementro neutro é o número cero e o oposto de a é $-a$ para todo $a \in \mathbf{Z}$.

ii) Sexa $\mathbf{R}$ o conxunto dos números reais. É evidente que $\mathbf{R}$ coa soma de números reais é un grupo conmutativo; sen embargo, se consideramos o produto de números reais en lugar da soma, o elemento neutro é o número 1 e non se obtén unha estutura de grupo en $\mathbf{R}$ xá que existe un elemento, o cero, que non ten inverso para a multiplicación. Non obstante, $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ co produto si é un grupo conmutativo.

iii) Supoñamos que $G = \{e, a, b, c\}$ é un conxunto formado por catro elementos. Se definimos o produto da forma que indica a tabela

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

obtén–se que $(G, *)$ é un grupo conmutativo que se coñece como grupo do rectángulo ou Viergruppe de Felix Klein.

iv) Sexa G o conxunto dos números reais x tais que $-1 < x < 1$. Daquela, se en G consideramos a operación

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

ten–se que $(G, *)$ é un grupo conmutativo.

v) Sexa n un número natural ímpar. Se no conxunto dos números reais definimos a operación

$$x * y = (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}}$$

ten–se que $(\mathbf{R}, *)$ é un grupo conmutativo.

vi) Sexa G o conxunto das matrices cadradas de orden 3 con coeficientes reais e determinante non nulo. Entón, G co produto de matrices é un grupo non conmutativo, xá que o produto de matrices non é conmutativo.

vii) Todo conxunto G formado por un único elemento e é un grupo, definindo a operación mediante $e * e = e$. Este grupo denomina–se grupo trivial.

Destes axiomas que interveñen na definición deducen–se os teoremas, proposicións, lemas e corolários. En teoria de grupos, un exemplo de proposición é a seguinte:

Proposición 1.1.1. *Supoñamos que* $(G, *)$ *é un grupo. Entón, verifican–se as seguintes propriedades:*

i) *O elemento neutro de* G *é único.*
ii) *Para todo* $a \in G$ *o seu inverso é único.*
iii) *Para todo* $a \in G$*,* $(a^{-1})^{-1} = a$*.*
iv) *Para todos* $a, b \in G$*,* $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$*.*

Recomenda–se pensar se as afirmacións anteriores son certas nos exemplos xá vistos de grupo.

1.2. Hipóteses e teses. Condicións necesárias e suficientes

En cada un dos resultados que forman parte dunha teoria matemática, é preciso supor unha ou várias verdades, que receben o nome de hipóteses do resultado, co obxecto de deducir unha ou várias propriedades novas, que receben o nome de teses do resultado correspondente. Asi, por exemplo, no celebérrimo teorema de Rolle

Teorema 1.2.1. **(de Rolle)** *Sexa* $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *unha función contínua no intervalo fechado* $[a, b]$*, derivable no intervalo aberto* (a, b) *e tal que* $f(a) = f(b)$*. Entón, existe* $\beta \in (a, b)$ *tal que* $f'(\beta) = 0$*.*

aparecen as seguintes hipóteses:

1) $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é unha función contínua nun intervalo fechado $[a, b]$,
2) f é unha función derivable no intervalo aberto (a, b),
3) f verifica que $f(a) = f(b)$,

e unha única tese, na que se afirma que existe $\beta \in (a, b)$ tal que $f'(\beta) = 0$.

Dun xeito mais abstracto, podemos afirmar que o enunciado típico dunha proposición, dun lema ou dun teorema, estabelece que

Se H é certo, entón T és certo

onde H é o conxunto de hipóteses e T é o de teses. Representaremos esta situación mediante

$$H \Longrightarrow T$$

lendo <<H *implica* T>>. A implicación anterior tamén se lee como <<H *é condición suficiente para* T>> ou <<T *é condición necesária para* H>>.

É moi frecuente confundir entre condicións necesárias e suficientes ao aplicar os resultados das matérias de primeiro curso. Pensamos que, portanto, cumpre insistir un pouco mais entre o que é necesário e o que é suficiente. A diferenza entre condicións necesárias e suficientes quedará mais clara co seguinte exemplo:

1) É condición necesária xogar para ter un prémio nun xogo de azar, como por exemplo, a quiniela. Mas esta condición necesária non é suficiente (non chega con xogar). Unha condición necesária proporciona un critério negativo: se non xogas, non podes ter prémio.
2) Gañar no xogo da quiniela é unha condición suficiente para ter un billeta selado. Pero esta condición suficiente non é necesária (non é necesário gañar para ter un billete selado).

1.3. Recíproco e contrarrecíproco

O resultado $[H \Longrightarrow T]$ ten asociados outros resultados entre os que destacamos o recíproco e o contrarrecíproco.

1) O recíproco de $[H \Longrightarrow T]$ é $[T \Longrightarrow H]$. Se $[H \Longrightarrow T]$ é certo, o seu recíproco non ten por que ser verdade.
2) O contrarrecíproco de $[H \Longrightarrow T]$ é [Non $T \Longrightarrow$ Non H], onde Non H é a negación de H e Non T é a negación de T.

Por exemplo, tomemos a seguinte proposición

Proposición 1.3.1. *Sexa p un número primo e a, b números naturais caisquer. Se $p|ab$ entón $p|a$ ou $p|b$.*

Neste caso temos a hipótese

H= Sexa p un número primo tal que divide ao produto ab onde a e b son números naturais.

e a tese

T= O número primo p verifica que $p|a$ ou $p|b$ onde a e b son números naturais.

O recíproco desta proposición viria dado por:

Proposición 1.3.2. *Sexa p un número primo e a, b números naturais caisquer. Se $p|a$ ou $p|b$ entón $p|ab$.*

Como podemos comprobar con facilidade o recíproco é certo neste caso (independentemente de que p sexa o non sexa primo), pero, por exemplo, o recíproco do teorema de Rolle non é certo.

Para poder formular con corrección o contrarrecíproco dun resultado $[H \Longrightarrow T]$ cumpre saber formular con claridade Non T e Non H. En certas ocasións esto pode causar problemas, como por exemplo, cando H e T conteñen expresións do tipo *para todo* ou *existe un* que reciben o nome de cuantificadores lóxicos e que serán denotados por $\forall$ y $\exists$, respectivamente.

Con obxecto de aprender a facer as negacións dos cuantificadores estuda–se a continuación un exemplo relacionado coa teoria de conxuntos. Supoñamos que X é un conxunto, e que A é un subconxunto de X ($A \subset X$). Sexa P unha certa propriedade dos elementos de X que é certa para determinados elementos e falsa para os restantes. Considere–se a seguinte afirmación

$$\forall x \in A \quad P \text{ é verdade}\,,$$

e neguemos dita afirmación. Levando o problema á teoria de conxuntos, e denotando por B o conxunto de todos os elementos de X para os que P é verdade, a propriedade enunciada e que pretendemos negar é tan simples como $A \subset B$. A negación de ser $A \subset B$ é que $A \not\subset B$ que significa que existe polo menos un elemento de A que non pertence a B. Daquela, a negación buscada é

$$\exists\, x \in A \,|\, P \text{ non é verdade}\,.$$

Portanto, o que fixemos foi reemprazar o cuantificador $\forall$ polo cuantificador $\exists$ e reemprazar P pola sua negación.

Este procedimento tamén funciona no sentido inverso; a negación de

$$\exists\, x \in A \,|\, T \text{ é verdade}$$

ven dada por

$$\forall x \in A \quad T \text{ non é verdade}\,.$$

Asi, por exemplo, a negación da proposición *todo aluno desta Escola é estudoso* é *existe un aluno desta Escola que non é estudoso.*

Tamén, por exemplo, o contrarrecíproco da Proposición 1.3.1 enunciaria–se como

Proposición 1.3.3. *Sexa p un número primo e a, b números naturais caisquer. Se p non divide a a e p non divide a b entón p non divide ao produto ab.*

Cando unha propriedade $[H \Longrightarrow T]$ e o seu recíproco $[T \Longrightarrow H]$ son certas, dirá–se que son T e H son equivalentes e denotará–se por $[H \Longleftrightarrow T]$. Neste caso leeremos << *H se, e só se, T* >> ou << *H é condición necesária e suficiente para T* >>. Obviamente a equivaléncia entre H e T non significa que sexan a mesma propriedade, senón que cando unha é certa a outra tamén o é e vice–versa. Por exemplo, en teoria de números temos a seguinte equivaléncia:

Proposición 1.3.4. *Se a e b son dous números inteiros non nulos, verifica–se que mcd(a,b)=1 se, e só se, existen inteiros α e β tais que $\alpha a + \beta b = 1$.*

Unha propriedade e o seu contrarrecíproco son loxicamente equivalentes: se unha propriedade é certa, tamén é verdade o seu contrarrecíproco e vice–versa. Formalmente, esta última afirmación quedaria enunciada como:

$$[\,[H \Longrightarrow T] \Longleftrightarrow [\text{Non } T \Longrightarrow \text{Non } H]\,]$$

Esta equivaléncia indica que para probar $[H \Longrightarrow T]$ podemo–lo facer de forma directa ou podemos tratar de probar o contrarrecíproco [Non $T \Longrightarrow$ Non H]. Unha tercera via de demonstración é a redución ao absurdo. A demonstración por redución ao absurdo consiste en supor que T é falsa e probar, utilizando a hipótese H, que se deduce algunha contradición.

TEMA 2

Conxuntos

Entenderemos por conxunto unha colección finita ou infinita de obxectos na que non importa a orden e na que o número de veces que aparece un elemento tamén é normalmente ignorado. Os "membros" dun conxunto denominan–se elementos.

2.1. Xeitos de definir un conxunto

Durante este tema, denotaremos aos conxuntos con letras maiúsculas e aos elementos con letras minúsculas.

Se un elemento a está nun conjunto A escribiremos $a \in A$ (o elemento a pertence ao conxunto A). En caso contrário escribiremos $a \notin A$ (o elemento a non pertence ao conxunto A).

Para sinalar cais son os elementos que pertencen a un conxunto podemos proceder de dous xeitos:

- Por extensión: Enumeran–se todos e cada un dos elementos que pertencen ao conxunto dado.
- Por comprensión: Definen–se os elementos do conxunto mediante as propriedades que os caracterizan.

Obviamente dous conxuntos A e B son iguais se teñen os mesmos elementos. Denotaremos esto mediante $A = B$.

Exemplo 2.1. Supoñamos que tomamos os conxuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{n \in \mathbf{N} \; ; \; n^2 - 2n - 8 \leq 0\}.$$

Entón, $A = B$. Na primeira expresión estamos definindo o conxunto por extensión e na segunda por comprensión.

2.2. Relacións de pertenza e contido

Definición 2.2.1. Diremos que un conxunto A é subconxunto dun conxunto B, denotado por $A \subset B$ (A está contido en B ou B contén a A), se todo elemento de A pertence a B, i.e.,

$$A \subset B \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B].$$

Se A non é subconxunto de B escribirá–se $A \not\subset B$ (A non está contido en B), i.e.

$$A \not\subset B \Leftrightarrow [\exists x \in A \; ; \; x \notin B].$$

Nota 2.2.1. Tamén son válidas as notacións $B \supset A$ e $B \not\supset A$.

Definición 2.2.2. Se $A \subset B$ e $A \neq B$, dirá–se que A é un subconxunto próprio de B, ou que A está contido propriamente en B ou que B contén propriamente a A, e será denotado mediante $A \subsetneq B$ ou $B \supsetneq A$.

Definición 2.2.3. O conxunto que non ten nengún elemento chama–se conxunto vacio e denota–se por $\emptyset$.

Nota 2.2.2. O conxunto vacio $\emptyset$ é subconxunto de todos os conxuntos.

Exemplo 2.2. Supoñamos que $B = \{a, e, i, o, u\}$ e que $A = \{o, u\}$. Entón, A é subconxunto de B porque os dous elementos de A pertencen a B; A é, de feito, un subconxunto próprio de B pois $A \neq B$.

2.3. O conxunto das partes dun conxunto

Definición 2.3.1. Dado un conxunto X, chamará–se conxunto de partes de X, e denotará–se $\mathcal{P}(X)$, ao conxunto formado por todos os subconxuntos de X.

Exemplo 2.3. Se $A = \{o, u\}$, o conxunto de partes de A é o definido por

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{o\}, \{u\}, A\},$$

que ten catro elementos.

Nota 2.3.1. Pode–se demonstrar que, en xeral, se X é un conxunto con n elementos, entón $\mathcal{P}(X)$ é un conxunto con 2^n elementos.

Proposición 2.3.2. *Sexan A, B e C conxuntos. Verifican–se as seguintes propriedades:*

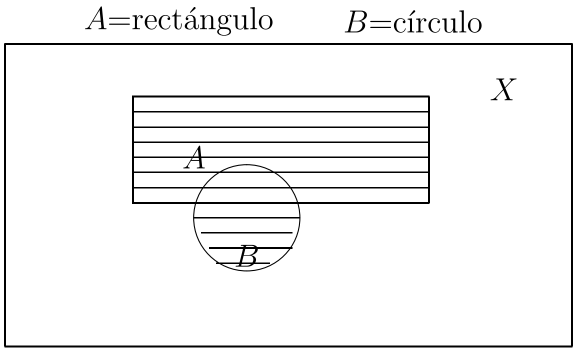
i) $A \subset A$.
ii) $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$.
iii) $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

2.4. Operacións con conxuntos

Definición 2.4.1. Sexan A e B subconxuntos dun conxunto dado X. Definen–se:

i) O conxunto unión de A e B, $A \cup B$ mediante

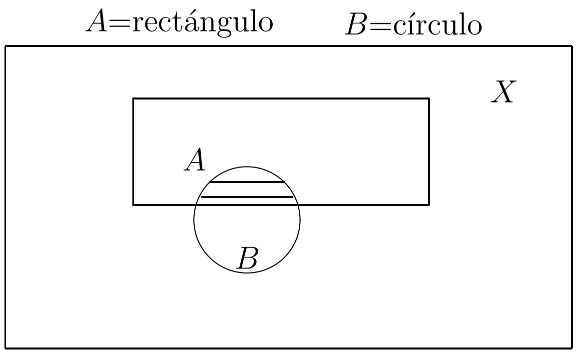
$$A \cup B = \{x \in X \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



$A \cup B$ = zona raiada

ii) O conxunto intersección de A e B, $A \cap B$, mediante

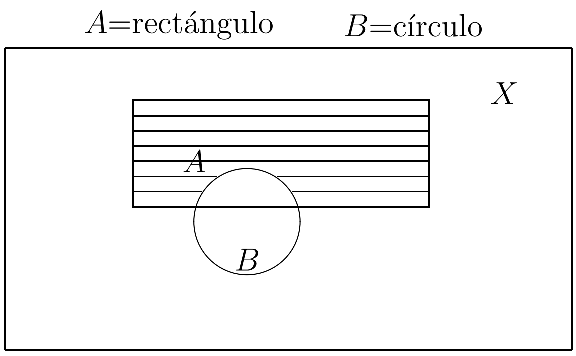
$$A \cap B = \{x \in X \ ; \ x \in A \text{ e } x \in B\} \, .$$



$A \cap B$ = zona raiada

iii) O conxunto complementário relativo de B en A, $A \setminus B$, como

$$A \setminus B = \{x \in X \ ; \ x \in A \text{ e } x \notin B\} \, .$$

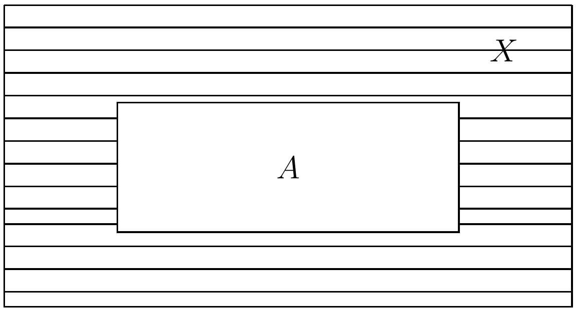


$A - B$ = zona raiada

iv) O conxunto complementário de A, $X \setminus A = A^c$, como

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X \ ; \ x \notin A\} \, .$$

A=rectángulo



A^c = zona raiada

Definición 2.4.2. Se $A \cap B = \emptyset$, diremos que A e B son conxuntos disxuntos.

Exemplo 2.4. Consideremos na recta real $\mathbf{R}$ os subconxuntos

$$A = \{x \in \mathbf{R}\,;\; x \leq 1\}\,,$$
$$B = \{x \in \mathbf{R}\,;\; -1 \leq x \leq 2\}\,.$$

Daquela,

$$A \cup B = \{x \in \mathbf{R}\,;\; x \leq 2\}\,,$$
$$A \cap B = [-1, 1]\,,$$
$$B \setminus A = \{x \in \mathbf{R}\,;\; 1 < x \leq 2\}\,,$$
$$A^c = \mathbf{R} \setminus A = \{x \in \mathbf{R}\,;\; x > 1\}\,.$$

Nota 2.4.1. Sexan A e B subconxuntos dun conxunto dado X. As seguintes condicións son equivalentes:

i) $A \subset B$.
ii) $A \cap B = A$.
iii) $A \cup B = B$.
iv) $B^c \subset A^c$.
v) $A \cap B^c = \emptyset$.
vi) $B \cup A^c = X$.

Proposición 2.4.3. *Sexan A, B e C subconxuntos dun conxunto dado X. Verifican–se as seguintes propriedades, chamadas leises da álxebra de conxuntos:*

i) *Idempoténcia:* $A \cup A = A$ *e* $A \cap A = A$.
ii) *Asociativa:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *e* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
iii) *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$.
iv) *Distributiva:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$$

e

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

v) *Complemento:* $A \cup A^c = X$ *e* $A \cap A^c = \emptyset$.

vi) *Leises de* de Morgan*:*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,,$$

e

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c\,.$$

Demonstración. Vexamos, por exemplo, como se demonstra unha das leises de de Morgan. A proba das restantes igualdades deixa–se como exercício.

Para probar unha igualdade entre dous conxuntos, neste caso $(A \cup B)^c$ e $A^c \cap B^c$, proba–se que cada un é subconxunto do outro, i.e.[1] $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ e $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Á sua vez, a demonstración de que un certo conxunto é subconxunto de outro consiste en elexir un elemento xenérico x do primeiro conxunto e probar que x tamén pertence ao segundo conxunto. Este é o esquema seguido na proba que aparece detallada a continuación.

Sexa $x \in (A \cup B)^c$. Entón, $x \notin A \cup B$, o que significa que $x \notin A$ e $x \notin B$. Portanto, $x \in A^c$ e $x \in B^c$, i.e., $x \in A^c \cap B^c$. Esto proba que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.

Sexa agora $x \in A^c \cap B^c$. Entón $x \in A^c$ e $x \in B^c$, ou ben, $x \notin A$ e $x \notin B$. En consecuéncia, $x \notin A \cup B$ e $x \in (A \cup B)^c$. Esto proba $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$, e daquela, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. □

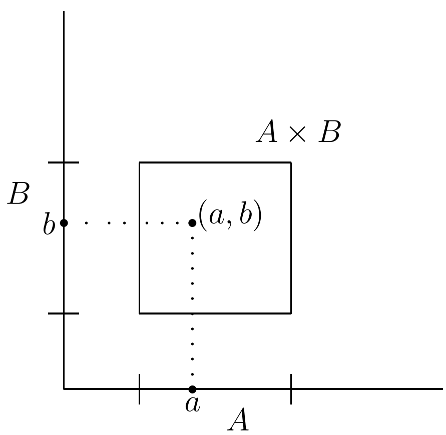
Definición 2.4.4. Dados dous conxuntos A e B, chama–se produto cartesiano de A por B ao conxunto

$$A \times B = \{(a, b)\ ;\ a \in A,\ \ b \in B\}\,.$$

Notemos que a igualdade nun produto cartesiano $A \times B$ está dada como segue:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d\,.$$

Na seguinte figura representamos o produto cartesiano de dous intervalos de $\mathbf{R}$.



[1]Do latin "it est".

Exemplo 2.5. Supoñamos que $A = \{o, u\}$ e que $B = \{a, e, i, o, u\}$. O produto cartesiano de A por B é o conxunto

$$A \times B = \{(o, a), (o, e), (o, i), (o, o), (o, u), (u, a), (u, e), (u, i), (u, o), (u, u)\} .$$

A definición de produto cartesiano pode–se extender a mais de dous conxuntos: se A_1, A_2, ..., A_n son conxuntos, entón

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \; ; \; a_1 \in A_1, \; a_2 \in A_2, \ldots, \; a_n \in A_n\} .$$

Un caso desta situación é por exemplo:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n .$$

No conxunto $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ tamén se verifica que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se e só se $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

2.5. Exercícios e problemas

Exercício 2.1. Determine–se se as seguintes afirmacións son verdadeiras ou falsas.

a) $\emptyset \subset \emptyset$.
b) $\emptyset \in \emptyset$.
c) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.
d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
e) $\{\emptyset\} \subset \emptyset$.
f) $\{\emptyset\} \in \emptyset$.
g) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$.
h) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$.
i) $\{x, y\} \subset \{x, y, z, \{x, y, z\}\}$.
j) $\{x, y\} \in \{x, y, z, \{x, y, z\}\}$.
k) $\{x, y\} \subset \{x, y, z, \{\{x, y\}\}\}$.
l) $\{x, y\} \in \{x, y, \{\{x, y\}\}\}$.
m) $\{x, y\} \in \{x, y, z, \{x, y\}\}$.

Exercício 2.2. Que se pode dicer de dous conxuntos A e B se

a) $A \cap B = A$?
b) $A \cup B = A$?
c) $A \cap B = A \cup B$?

Exercício 2.3. Supoñamos que A, B e C son elementos de $\mathcal{P}(X)$ para un certo conxunto X. Demonstre–se que se $A \cap C = B \cap C$ e $A \cap C^c = B \cap C^c$ entón $A = B$.

Exercício 2.4. Sexa $A = \{\emptyset\}$. Sexa $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Determine–se se as seguintes afirmacións son verdadeiras ou falsas:

a) $\emptyset \in B$.
b) $\emptyset \subset B$.

c) $\{\emptyset\} \in B$.
d) $\{\emptyset\} \subset B$.
e) $\{\{\emptyset\}\} \in B$.
f) $\{\{\emptyset\}\} \subset B$.

Exercício 2.5. Sexan A, B e C, subconxuntos dun conxunto X. Probe–se que:

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.
c) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Exercício 2.6. Sexan A e B dous conxuntos. Determine–se se as seguintes afirmacións son verdadeiras ou falsas:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercício 2.7. Sexa A un conxunto. Determine–se se as seguintes afirmacións son verdadeiras ou falsas:

a) $\emptyset \times A = A$.
b) $\mathcal{P}(A \times A) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

Exercício 2.8. Sexan A, B e C, subconxuntos dun conxunto X. Determine–se se a seguinte afirmación é verdadeira ou falsa:

$$B \subset (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B)\,.$$

Exercício 2.9. Sexa

$$X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, x, \{x\}, 0\}$$

Cal das seguintes afirmacións é falsa?

a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ ten 2^{64} elementos.
b) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
c) $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$.
d) $\{\{x\}\} \subset \mathcal{P}(X)$.

Exercício 2.10. Sexan A, B e C, subconxuntos dun conxunto X. Cal das seguintes afirmacións é verdadeira?

a) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \neq A$.
b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A)$.
c) $A \cap B = A \cap C \Longrightarrow B = C$.
d) $\{\emptyset, 2, x\} \setminus \emptyset = \{\emptyset, 2, x\}$.

TEMA 3

Aplicacións

3.1. Conceitos de relación e aplicación

Definición 3.1.1. Unha relación R dun conxunto A nun conxunto B é un subconxunto R do produto cartesiano de A e B: $R \subset A \times B$.

Exemplo 3.1. Sexan $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Daquela, xá sabemos que o produto cartesiano $A \times B$ dos conxuntos A e B é o conxunto

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Portanto, unha relación R de A en B pode ser, por exemplo,

$$R = \{(a, 3)\},$$

ou ben

$$R = \{(a, 1), (b, 2)\},$$

ou calquer outro subconxunto que elixamos do conxunto $A \times B$. Sen embargo o conxunto

$$\{(2, b)\}$$

non é unha relación **de** A **en** B pois non é subconxunto de $A \times B$.

Definición 3.1.2. Sexa R unha relación dun conxunto A nun conxunto B. Di–se que un elemento $a \in A$ está relacionado cun elemento $b \in B$, e denota–se por aRb, se $(a, b) \in R$.

Definición 3.1.3. Unha relación nun conxunto A é un subconxunto R do produto cartesiano de A e A: $R \subset A \times A$.

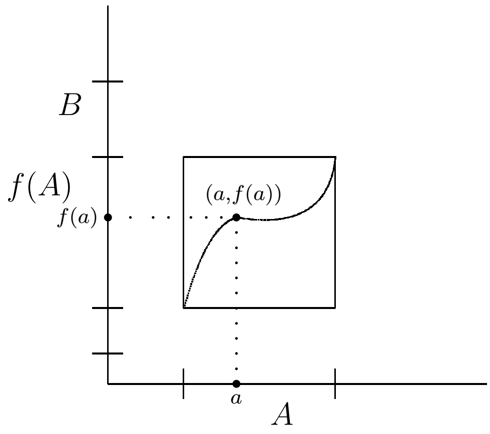
Definición 3.1.4. Sexan A e B dous conxuntos. Unha aplicación (ou función) definida sobre A con valores en B (abreviadamente, unha aplicación de A en B) é unha relación de A en B na cal cada elemento de A está relacionado cun único elemento de B.

Notación 3.1.1. Se f é unha aplicación de A en B se, denotará–se por $f\colon A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$,

Definición 3.1.5. Sexa $f\colon A \to B$ unha aplicación e sexa $a \in A$. O único elemento b tal que a está relacionado con b recebe o nome de imaxe de a por f e denota–se $b = f(a)$. Dirá–se tamén que a aplicación f asigna $f(a)$ ao elemento a ou que f leva a en $f(a)$.

Mediante $f(A)$ denotará–se o conxunto

$$f(A) = \{f(a)\ ;\ a \in A\}.$$



Exemplo 3.2. Consideremos $A = B = \mathbf{R}$. A aplicación exponencial

$$f\colon x \in \mathbf{R} \to f(x) = e^x \in \mathbf{R}$$

é efectivamente unha aplicación de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$.

Sen embargo, a correspondéncia

$$x \to \ln(x),$$

onde $\ln(x)$ denota o logaritmo neperiano de x non é unha aplicación de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ porque non está definido sobre $\mathbf{R}$ o logaritmo neperiano dos números reais non positivos.

Definición 3.1.6. Sexan A, B e C conxuntos e supoñamos que C é un subconxunto de A. Definen–se

i) A aplicación inclusión de C en A como:

$$\begin{aligned} i_C : C &\longrightarrow A \\ c &\longrightarrow i_C(c) = c\,. \end{aligned}$$

ii) A aplicación identidade de A como:

$$\begin{aligned} id_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longrightarrow id_A(a) = a\,. \end{aligned}$$

iii) A aplicación restrición dunha aplicación dada $f\colon A \to B$ a $C \subset A$ como:

$$\begin{aligned} f_{|C} : C &\longrightarrow A \\ c &\longrightarrow f_{|C}(c) = f(c). \end{aligned}$$

3.2. Grafo dunha aplicación

Definición 3.2.1. Se $f\colon A \to B$ é unha aplicación, di–se que A é o domínio de f e que B é o codomínio de f. Define, aliás, o grafo de f como o subconxunto do produto cartesiano $A \times B$ dado por

$$\Gamma(f) = \{(a, f(a))\ ;\ a \in A\}\,.$$

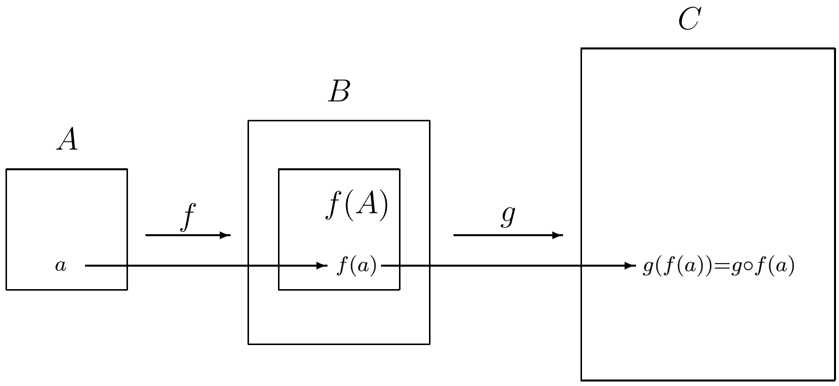
3.3. Composición de aplicacións

Definición 3.3.1. Sexan $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ duas aplicacións. Define–se a aplicación composición de f con g e denota–se por $g \circ f$ (f composta con g) como a aplicación de A en C que asigna a cada elemento $a \in A$ o elemento

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))\,.$$

Un xeito gráfico de escreber a composición $g \circ f$ é a seguinte:

$$\begin{array}{cccccc} g \circ f\colon & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & a & \longrightarrow & f(a) & \longrightarrow & g(f(a)). \end{array}$$



3.3.1. Aplicacións inxectivas, bixectivas e sobrexectivas.

Definición 3.3.2. Sexa $f\colon A \to B$ unha aplicación.

i) Di–se que f é unha aplicación inxectiva se a elementos distintos de A corresponden–lle imaxes distintas en B, i.e., se

$$x, y \in A \;\; x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

ou, equivalentemente, se

$$x, y \in A \;\; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\,.$$

ii) Di–se que f é unha aplicación sobrexectiva se todo elemento de B é imaxe dalgún elemento de A, i.e., se

$$\forall b \in B \;\text{ existe }\; a \in A\ ;\ f(a) = b\,.$$

iii) Di–se que f é unha aplicación bixectiva se f é ao mesmo tempo inxectiva e sobrexectiva, i.e., se

$$\forall b \in B \text{ existe un único } \ a \in A \ ; \ f(a) = b \, .$$

Exemplos 3.1. Consideremos as funcións reais dunha variable real

$$f_1 \colon x \in \mathbf{R} \to f_1(x) = x^2 \in \mathbf{R} \, ,$$
$$f_2 \colon x \in \mathbf{R} \to f_2(x) = e^x \in \mathbf{R} \, ,$$
$$f_3 \colon x \in \mathbf{R} \to f_3(x) = x^3 \in \mathbf{R} \, .$$

Entón, f_1 non é inxectiva (por exemplo, $f_1(1) = f_1(-1)$) nen sobrexectiva (non existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $f_1(x) = -1$).

Por outra banda, f_2 é inxectiva ($e^x = e^y \Rightarrow x = y$) mas non é sobrexectiva (non existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $f_2(x) = 0$).

Finalmente, f_3 é inxectiva (se $x^3 = y^3$ entón $x = y = \sqrt[3]{x^3}$) e sobrexectiva (dado $y \in \mathbf{R}$ existe $x = \sqrt[3]{y}$ tal que $f_3(x) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$) e portanto f_3 é unha aplicación bixectiva.

Proposición 3.3.3. *Sexan $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to A$ duas aplicacións tais que $g \circ f = id_A$. Entón f é inxectiva e g é sobrexectiva.*

Demonstración. Supoñamos que x, $y \in A$ son tais que $f(x) = f(y)$. Entón, por ser g unha aplicación e $g \circ f = id_A$ resulta que $x = (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) = y$. Daquela, f é inxectiva.

Por outra parte, dado $x \in A$ existe $y = f(x) \in B$ tal que $g(y) = (g \circ f)(x) = x$. En consecuéncia, g é sobrexectiva. □

Corolário 3.3.4. *Sexan $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to A$ duas aplicacións tais que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. Entón, f e g son bixectivas.*

Demonstración. Se $g \circ f = id_A$ ten–se, da proposición anterior, que f é inxectiva e g é sobrexectiva. Se $f \circ g = id_B$, tamén do resultado anterior, segue–se que g é inxectiva e f é sobrexectiva. Portanto, ambas aplicacións son bixectivas. □

3.4. Aplicación inversa

Sexa agora $f \colon A \to B$ unha aplicación bixectiva. Entón, dado $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $f(a) = b$. Pode–se portanto definir unha aplicación $g \colon B \to A$ do seguinte xeito: dado $b \in B$, define–se $g(b)$ como o único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Esta aplicación g asi definida verifica que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$ e portanto, segundo o corolário anterior, é bixectiva.

Definición 3.4.1. A aplicación g da discusión anterior chama–se aplicación inversa da aplicación bixectiva f e denota–se $g = f^{-1}$.

Exemplo 3.3. Supoñamos que temos as funcións

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,,$$

definidas por

$$f(x) = x - 1 \quad g(y) = y + 1\,.$$

Entón, $g = f^{-1}$ xá que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = x - 1 + 1 = x = id_{\mathbf{R}}(x)$$

e

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y+1) = y + 1 - 1 = y = id_{\mathbf{R}}(y)\,.$$

Definición 3.4.2. Sexa $f\colon A \to B$ unha aplicación e sexan $X \subset A$ e $Y \subset B$. Define–se o conxunto imaxe de X por f como o subconxunto de B dado por

$$f(X) = \{f(x)\ ;\ x \in X\}\,.$$

Define–se, ademais, o conxunto imaxe recíproca de Y por f como o subconxunto de A dado por

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A\ ;\ f(a) \in Y\}\,.$$

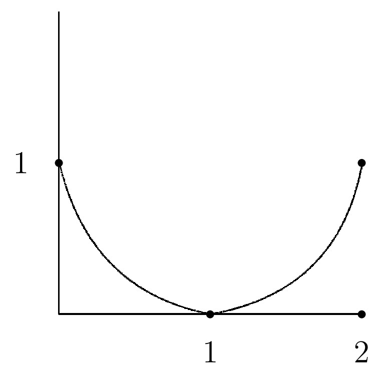
Exemplo 3.4. Sexa a aplicación

$$f : [0,2] \to \mathbf{R}$$

definida por

$$f(x) = (x-1)^2\,.$$

A sua gráfica está dada por:



Entón,

$$\begin{aligned} f([0,1]) &= [0,1]\,, \\ f([0,2]) &= [0,1]\,, \\ f^{-1}(\{0\}) &= \{1\}\,, \\ f^{-1}(\{1\}) &= \{0,2\}\,, \\ f^{-1}([0,1]) &= [0,2]\,. \end{aligned}$$

3.5. Exercícios e problemas

Exercício 3.1. Ache–se un exemplo de conxuntos A e B con mais de catro elementos, e unha función $f : A \to B$ que, en cada caso, verifique:

a) f non é inxectiva nen sobrexectiva.
b) f é inxectiva e non é sobrexectiva.
c) f non é inxectiva e si é sobrexectiva.
d) f é inxectiva e sobrexectiva.

Exercício 3.2. Para cada unha das seguintes funcións $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ determine–se se a función é inxectiva e/ou sobrexectiva. Caso de non ser sobrexectiva determine–se $f(\mathbf{R})$.

a) $f(x) = x + 6$.
b) $f(x) = 2x - 4$.
c) $f(x) = -x - 2$.
d) $f(x) = x^2$.
e) $f(x) = x^2 + x$.
f) $f(x) = x^3$.

Exercício 3.3. Dadas as funcións $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \qquad g(x) = x^2 + 3x + 4\,,$$

calcule–se $f \circ g$ e $g \circ f$.

Exercício 3.4. Sexan f e g duas aplicacións bixectivas e tais que existe $g \circ f$. Demonstre–se que $g \circ f$ é bixectiva e que ademais $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercício 3.5. Probe–se que se unha aplicación f é bixectiva, entón a aplicación f^{-1} tamén é bixectiva e ademais $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exercício 3.6. Sexan $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to A$ aplicacións tais que $h \circ g \circ f$ é inxectiva, $g \circ f \circ h$ é sobrexectiva e $f \circ h \circ g$ é sobrexectiva. Demonstre–se que f, g e h son bixectivas.

Exercício 3.7. Sexan f, g e h funcións de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{N}$ definidas por:

$$f(n) = n + 1, \qquad g(n) = 2n, \qquad h(n) = \begin{cases} 2\,, & n = 2k\,, \\ 1\,, & n = 2k+1\,. \end{cases}$$

Estude–se o carácter inxectivo e sobrexectivo de f, g e h. Determinen–se

$$f \circ f, \quad f \circ g, \quad g \circ f, \quad g \circ h, \quad h \circ g, \quad (f \circ g) \circ h\,.$$

Exercício 3.8. Estude–se a verdade ou falsidade das seguintes afirmacións:

a) A aplicación $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$ é inxectiva.

b) A composición das aplicacións $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$ é

$$g \circ f(x) = 4x^2 + 6x + 3\,.$$

c) Sexan A e B conxuntos cun número finito de elementos e sexan $f : A \to B$, $g : B \to A$ aplicacións inxectivas. Entón existe unha aplicación bixectiva $h : A \to B$.

d) Sexan $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aplicacións definidas por $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$. Se $ad + b = cb + d$ entón $(g \circ f) = (f \circ g)$.

Exercício 3.9. Sexa X un conxunto e $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ unha aplicación tal que para caisquer A, $B \in \mathcal{P}(X)$, verifica–se que

$$A \cup \Phi(A) \cup \Phi(\Phi(B)) = \Phi(A \cup B) \setminus \Phi(\emptyset)\,.$$

Cal das seguintes afirmacións é certa?

a) $\Phi(X) \neq X$.

b) Φ é inxectiva.

c) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$.

d) $\Phi(\Phi(\emptyset)) \neq \emptyset$.

Exercício 3.10. Sexa E un conxunto e A, B subconxuntos de E. Sexa

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

a aplicación dada por:

$$f(Y) = (Y \cap A, Y \cap B)\,.$$

Cal das seguintes afirmacións é certa?

a) Se A está contido en B^c, entón f é inxectiva.

b) Se f é sobrexectiva, entón $A \cup B = E$.

c) Se $A \cup B = E$ e $A \cap B = \emptyset$, entón f é bixectiva.

d) Se $A \cap B \neq \emptyset$, entón f é inxectiva.

TEMA 4

Funcións elementais

No presente tema aborda–se o repaso de certo tipo de funcións, que serán continuamente empregadas durante a titulación. Entre as funcións “elementais” achan–se as funcións trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, potenciais. Para cada unha de elas, estudan–se as suas propriedades mais básicas asi como a sua representación gráfica. Presta–se especial atención ás funcións trigonométricas; neste caso repasan–se as razóns trigonométricas asi como as suas propriedades mais importantes.

Durante todo o tema entenderá–se que unha función é unha correspondéncia dun subconxunto dos números reais nun subconxunto dos números reais:

$$f : A \subset \mathbf{R} \mapsto B \subset \mathbf{R}\,.$$

4.1. Conceito de función. Exemplos. Gráfica dunha función

Comeza–se introducindo o conceito de función.

Definición 4.1.1. Unha función f definida nun subconxunto A dos números reais é unha regra que asigna a cada elemento de A un e un só elemento de $\mathbf{R}$.

O maior subconxunto A de $\mathbf{R}$ onde f esté definida denomina–se domínio de f, denotado por $\mathrm{Dom}(A)$.

Dada unha función f, normalmente é denotada por

$$f : A \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$$

onde A coincide co domínio de f.

Se $x \in A$, entón ten asignado pola regra f un valor $f(x) \in \mathbf{R}$, denominado imaxe de x por f. O conxunto de todas as imaxes $f(x)$ para $x \in A$ denomina–se imaxe de f, denotada por $\mathrm{Im}(f)$.

Exemplo 4.1. Para cada número real α, a regra que asigna a todos os $x \in \mathbf{R}$ o valor α é unha función (denominada función constante):

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = \alpha\,.$$

O domínio de f é, neste caso, $\mathbf{R}$ e a imaxe de f é o conxunto que ten como único elemento a α:

$$\mathrm{Im}(f) = \{\,\alpha\}\,.$$

Exemplo 4.2. A regra que asigna a cada número real x o mesmo número real é unha función, denominada función identidade:

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = x\,.$$

Neste exemplo, tanto o domínio como a imaxe de f é o conxunto dos números reais.

Pode ser moi útil coñecer a *representación gráfica* das funcións. Comeza–se lembrando o conceito de grafo dunha función, dado na **Definición 3.2.1** —Capítulo 3—.

Definición 4.1.2. Sexa

$$f : A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) \in \mathbf{R}\,,$$

unha función real dunha variable real. Define–se o grafo de f como o seguinte conxunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}\,,$$

que representa todos os pares da forma (x, y), con $y = f(x)$ cando x recorre todos os pontos de A.

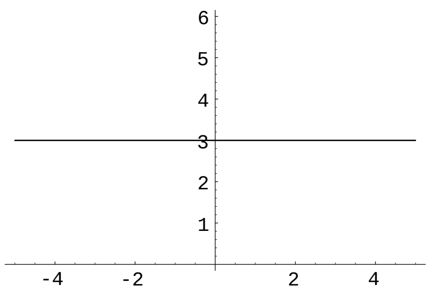
Os elementos de $\Gamma(f)$ son pares de números reais. Portanto, é natural representar graficamente este conxunto como un subconxunto do plano.

Por exemplo, a gráfica da función constante

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = 3\,,$$

ven dada no Gráfico 1.

GRÁFICO 1. Gráfica da función constante $f(x) = 3$.

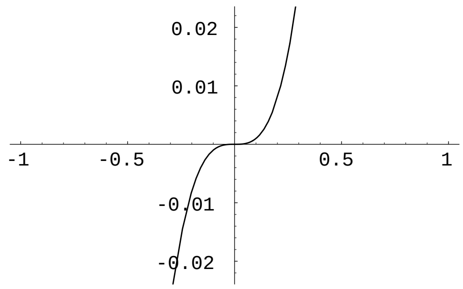


Ademais, a gráfica da función

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^3$$

ven dada no Gráfico 2.

GRÁFICO 2. Gráfica da función $f(x) = x^3$.



4.2. Funcións lineais e funcións afins

Definición 4.2.1. Denomina–se función lineal a unha regra da forma

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = \alpha x\,,$$

onde α é un número real. Denomina–se función afin a unha regra da forma

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = \alpha x + \beta\,,$$

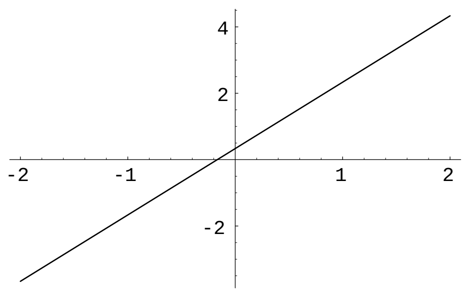
onde α e β son números reais.

Exemplo 4.3. A función real dunha variable real definida por

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = 2x + \frac{1}{3}\,,$$

é unha función afin, cuxa gráfica ven dada no Gráfico 3.

GRÁFICO 3. Gráfica da función afin $f(x) = 2x + \frac{1}{3}$.



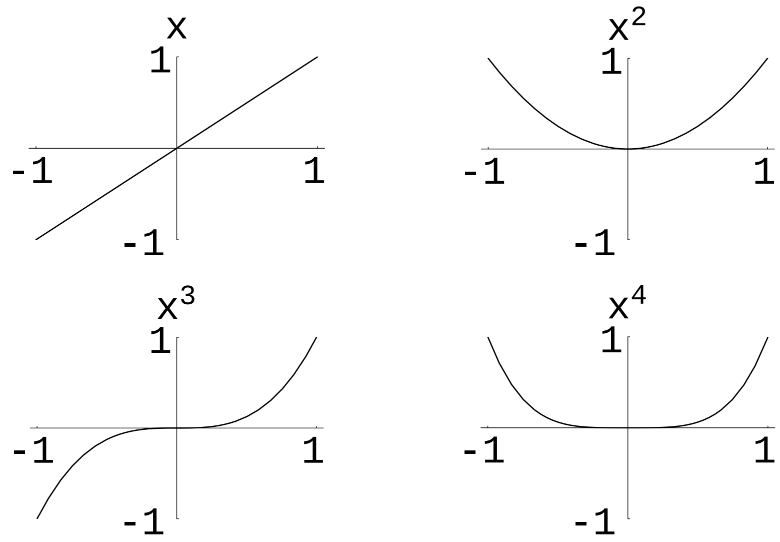
4.3. Funcións potenciais inteiras

Definición 4.3.1. Para cada número natural $n = \{1, 2, \ldots,\}$ define–se a función potencial mediante

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^n\,.$$

Exemplo 4.4. No Gráfico 4 poden–se observar as gráficas das funcións potenciais para os valores $n = 1, 2, 3, 4$.

GRÁFICO 4. Gráficas das funcións potenciais para os valores $n = 1, 2, 3, 4$.



Definición 4.3.2. Para cada número natural non cero, $n = \{1, 2, 3, \ldots, \}$ define–se a función potencial con exponente negativo mediante

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}\,.$$

Nos Gráficos 5 e 6 pode–se observar o comportamento das funcións x^{-3} e x^{-4}, respectivamente.

GRÁFICO 5. Gráfica da función $f(x) = x^{-3}$.

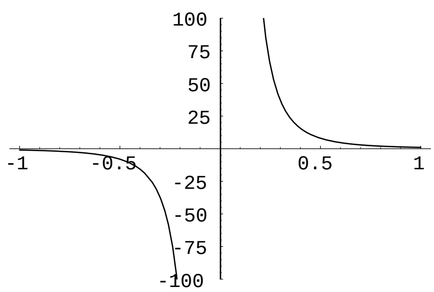
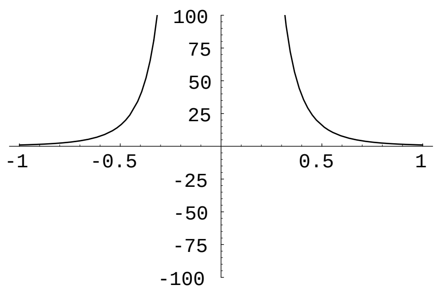


GRÁFICO 6. Gráfica da función $f(x) = x^{-4}$.



4.4. Funcións trigonométricas

Nesta sección apresentan–se as principais funcións trigonométricas. Para elo, fai–se un breve repaso aos conceitos de ángulo, asi como ás razóns trigonométricas.

4.4.1. Ángulo plano.

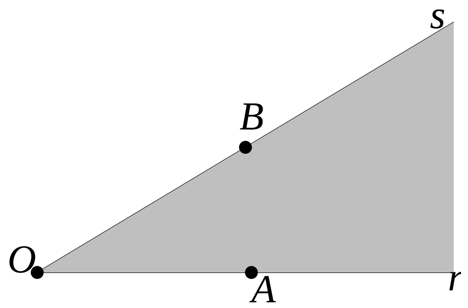
Definición 4.4.1. Dada unha recta r do plano, o conxunto dos seus pontos e os de cada unha das rexións en que a recta divide ao plano recebe o nome de semi–plano.

Nota 4.4.1. Duas rectas secantes dividen–se mutuamente en duas semi–rectas, cada unha de elas contida nun dos semiplanos definidos pola outra recta.

Definición 4.4.2. Sexan r e s duas rectas non opostas con orixen común O, e sexan $A \in r$ e $B \in s$. Denomina–se ángulo $\angle AOB$ ao conxunto dos pontos do plano contidos nos dous semi–planos seguintes: aquel cuxo borde é a recta r e contén a B e aquel cuxo borde é a recta s e contén a A (vexa–se o Gráfico 7).

O ángulo designa–se dando os seus lados, r e s ou un ponto en cada lado e o vértice no méio: $\angle AOB$.

Gráfico 7. Denomina–se ángulo $\angle AOB$ ao conxunto dos pontos do plano contidos nos dous semi–planos seguintes: aquel cuxo borde é a recta r e contén ao ponto B e aquel cuxo borde é a recta s e contén ao ponto A.



Nota 4.4.2. É frecuente facer un abuso de notación e falar de ángulo ao referir–se á sua medida. En calquer caso é importante fixar–se que unha cousa é un ángulo (porción do plano) e outra ben distinta é a sua medida.

Definición 4.4.3. Denomina–se radián á medida dun ángulo central dunha circunferéncia cuxo arco mide igual ao ráio da circunferéncia (vexa–se o Gráfico 7).

Nota 4.4.3. Da fórmula da lonxitude da circunferéncia é simples obter que π radiáns son 180 graus. Con esta relación entre radiáns e graus é moi doado, mediante unha simples regra de trés, ter as conversións entre graus e radiáns, tal e como se indica no Gráfico 9.

Gráfico 8. Denomina–se radián á medida dun ángulo central dunha circunferéncia cuxo arco mide igual ao ráio da circunferéncia.

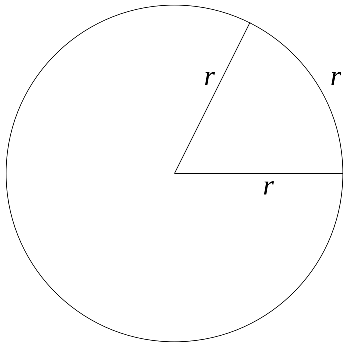


Gráfico 9. Algunhas conversións entre graus e radiáns

Graus	**Radiáns**
360	2π
180	π
90	$\pi/2$
60	$\pi/3$
45	$\pi/4$
30	$\pi/6$

Exemplo 4.5. Facendo uso da mencionada proporcionalidade entre graus e radiáns é simples obter que son 135 graus equivalen a $3\pi/4$ radiáns e que $4\pi/5$ radiáns son 144 graus.

4.4.2. Razóns trigonométricas. A continuación definen–se as principais razóns trigonométricas —seno, coseno, tanxente, cotanxente, secante, cosecante— e as suas funcións inversas. Para elo fará–se repetida referéncia ao deseño incorporado no Gráfico 10.

Definición 4.4.4. Denomina–se seno do ángulo α ao seguinte número real:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\mathrm{PM}}{r},$$

resultado de dividir a lonxitude do cateto oposto entre a lonxitude da hipotenusa.

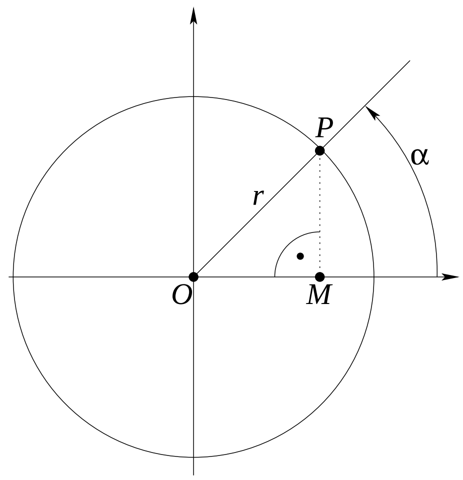
Definición 4.4.5. Denomina–se coseno do ángulo α ao seguinte número real:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OM}}{r},$$

resultado de dividir a lonxitude do cateto adxacente entre a lonxitude da hipotenusa.

Nota 4.4.4. Cumpre fixar–se que as razóns trigonométricas non teñen unidade de medida. Simplesmente os seus valores son números reais.

GRÁFICO 10. Deseño empregado nas definicións de seno, coseno, tanxente, cotanxente, secante e cosecante dun ángulo α.



Nota 4.4.5. Da própria definición de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ ten–se que ambos valores son sempre menores ou iguais que 1. Ademais, se o ángulo α mede 0 radiáns, entón $\operatorname{sen}\alpha = 0$ e $\cos\alpha = 1$; por outra banda, se o ángulo α mede $\pi/2$ radiáns, entón $\operatorname{sen}\alpha = 1$ e $\cos\alpha = 0$.

Nota 4.4.6. De seguido obten–se un resultado moi importante, que recebe o nome de relación fundamental da trigonometria. Das definicións de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$,

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\mathrm{PM}^2}{r^2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{\mathrm{OM}^2}{r^2},$$

de xeito que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{\mathrm{PM}^2}{r^2} + \frac{\mathrm{OM}^2}{r^2} = \frac{\mathrm{PM}^2 + \mathrm{OM}^2}{r^2}.$$

Portanto, empregando o teorema de Pitágoras ($\mathrm{PM}^2 + \mathrm{OM}^2 = r^2$),

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Definición 4.4.6. Denomina–se tanxente do ángulo α ao seguinte número real:

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OM}},$$

resultado de dividir a lonxitude do cateto oposto entre a lonxitude do cateto adxacente.

Definición 4.4.7. Denomina–se cotanxente do ángulo α ao seguinte número real:

$$\cot\alpha = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{PM}},$$

resultado de dividir a lonxitude do cateto adxacente entre a lonxitude do cateto oposto.

Definición 4.4.8. Denomina–se secante do ángulo α ao seguinte número real:

$$\sec\alpha = \frac{r}{\mathrm{OM}},$$

resultado de dividir a lonxitude da hipotenusa entre a lonxitude do cateto adxacente.

Definición 4.4.9. Denomina–se cosecante do ángulo α ao seguinte número real:

$$\csc\alpha = \frac{r}{\mathrm{PM}}\,,$$

resultado de dividir a lonxitude da hipotenusa entre a lonxitude do cateto contiguo.

Nota 4.4.7. Outra propriedade importante é que o valor das razóns trigonométricas dun ángulo depende unicamente da medida do ángulo e non das lonxitudes dos segmentos considerados para limitar a porción do plano.

En efeito, se α é un ángulo dos trés triángulos rectángulos ODA, OHM e OIT que aparecen no Gráfico 11, entón, os trés triángulos son semellantes pois teñen dous ángulos iguais. Daquela, os seus lados homólogos son proporcionais:

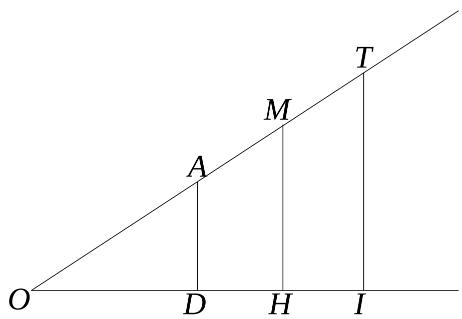
$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OT}}\,,$$

e

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AO}} = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{IT}}{\mathrm{OT}}$$

que indica que o seno do ángulo α depende unicamente da medida do ángulo e non das lonxitudes dos segmentos considerador para limitar a porción de plano, tal e como foi enunciado.

GRÁFICO 11. O valor das razóns trigonométricas dun ángulo depende unicamente da medida do ángulo.



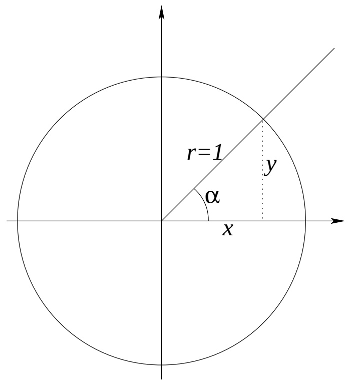
Nota 4.4.8. Como consecuéncia da nota anterior, pode–se supor sempre que $r = 1$. Daquela, atendendo ao Gráfico 12,

$$\operatorname{sen}\alpha = y\,,\quad \cos\alpha = x\,,\quad \tan\alpha = \frac{y}{x}\,,\quad \cot\alpha = \frac{x}{y}\,,\quad \sec\alpha = \frac{1}{x}\,,\quad \csc\alpha = \frac{1}{y}\,.$$

Exemplo 4.6. Se α é un ángulo caisquer, é doado coñecer os sinais das funcións seno e coseno sabendo a que cuadrante pertence o ángulo:

1. Se α está no primeiro cuadrante tanto o seno como o coseno de α son números reais positivos.
2. Se α é un ángulo do segundo cuadrante, entón o seu seno é positivo e o coseno de α é negativo.

GRÁFICO 12. Razóns trigonométricas para $r = 1$.



3. Se α está no terceiro cuadrante tanto o seno como o coseno de α son números reais positivos.
4. Se α é un ángulo do segundo cuadrante, entón o seu seno é negativo e o coseno de α é positivo.

Exemplo 4.7. Sexa α un ángulo do terceiro cuadrante tal que $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Con obxecto de calcular as demais razóns trigonométricas de α empregamos a relación fundamental da trigonometria circular

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

para deducir que

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

de xeito que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

existindo duas positidades para $\operatorname{sen}(\alpha)$. Ora ben, xá que α é un ángulo do terceiro cuadrante, entón o seu seno ten que ser negativo, polo que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

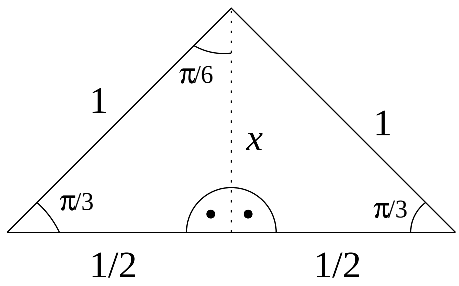
Unha vez calculado o valor de $\operatorname{sen}(\alpha)$ o resto das razóns trigonométricas deducen–se de modo simples.

4.4.3. Valores das razóns trigonométricas de $\pi/3$, $\pi/4$ e $\pi/6$. Existen certos valores das razóns trigonométricas que son especialmente úteis. A continuación deducen–se os valores das razóns trigonométricas de α para $\alpha = \pi/3$, $\alpha = \pi/4$ e $\alpha = \pi/6$.

En primeiro lugar, indicar que ao ser ángulos do primeiro cuadrante, ten–se que todas as suas razóns trigonométricas son positivas. Comeza–se calculando os valores nos casos $\pi/3$ e $\pi/6$.

Considera–se un triángulo equilátero onde todos os seus lados meden 1 (e os ángulos internos $\pi/3$). Traza–se unha altura (que coincide coa bisectriz), resultando dous triángulos rectángulos e dous ángulos de medida $\pi/6$ (vexa–se o Gráfico 13).

GRÁFICO 13. Razóns trigonométricas para $\alpha = \pi/3$ e $\alpha = \pi/6$.



Sexa x a lonxitude desta altura. En virtude do Teorema de Pitágoras,

$$1 = \frac{1}{2^2} + x^2$$

de xeito que, por ser x unha lonxitude (portanto, un número positivo),

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

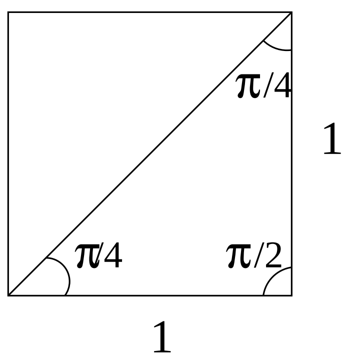
Das definicións de seno e coseno, obten–se

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{sen}\pi/3 = \sqrt{3}/2 & \cos\pi/3 = 1/2 & \tan\pi/3 = \sqrt{3} & \cot\pi/3 = \sqrt{3}/3 \\ \operatorname{sen}\pi/6 = 1/2 & \cos\pi/6 = \sqrt{3}/2 & \tan\pi/6 = \sqrt{3}/3 & \cot\pi/6 = \sqrt{3} \end{array}$$

No caso das razóns trigonométricas para $\alpha = \pi/4$, considera–se un cadrado de lado $\ell = 1$. As diagonais do cadrado meden $\sqrt{2}$, empregando de novo o Teorema de Pitágoras. Dita diagonal é, ao mesmo tempo, bisectriz dos ángulos (vexa–se o Gráfico 14). Daquela,

$$\operatorname{sen}\pi/4 = \cos\pi/4 = \sqrt{2}/2\,, \quad \tan\pi/4 = \cot\pi/4 = 1\,, \quad \sec\pi/4 = \csc\pi/4 = \sqrt{2}\,.$$

GRÁFICO 14. Razóns trigonométricas para $\alpha = \pi/4$.

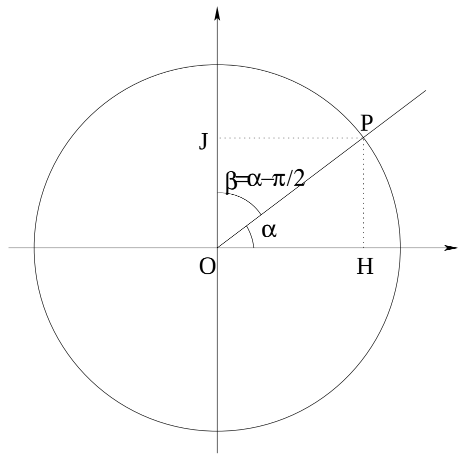


4.4.4. Redución de ángulos ao primeiro cuadrante. Coñecendo os valores das razóns trigonométricas de 0 a $\pi/4$, é posible deducir todas as demais, empregando as distintas reducións enunciadas de seguido.

4.4.4.1. *Ángulos complementários.*

Definición 4.4.10. Di–se que α e β son ángulos complementários cando $\alpha+\beta = \pi/2$.

GRÁFICO 15. Di–se que α e β son ángulos complementários cando $\alpha + \beta = \pi/2$.



Atendendo ao deseño do Gráfico 15, é simples observar que

$$\operatorname{sen}\alpha = \mathrm{HP} = \mathrm{OJ} = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$\cos\alpha = \mathrm{OH} = \mathrm{JP} = \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

En consecuéncia,

$$\tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \quad \cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$\sec\alpha = \csc\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \quad \csc\alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

4.4.4.2. *Ángulos suplementários.*

Definición 4.4.11. Di–se que α e β son ángulos suplementários cando $\alpha + \beta = \pi$.

Neste caso, no deseño do Gráfico 16, nos triángulos OHP e OTQ observa–se que,

$$\mathrm{OT} = -\mathrm{OH}, \qquad \mathrm{QT} = \mathrm{PH},$$

de xeito que

$$\operatorname{sen}\alpha = \mathrm{PH} = \operatorname{sen}(\pi-\alpha), \quad \cos\alpha = \mathrm{OH} = -\cos(\pi-\alpha).$$

En consecuéncia,

$$\tan\alpha = -\tan(\pi-\alpha), \qquad \cot\alpha = -\cot(\pi-\alpha).$$

Gráfico 16. Di–se que α e β son ángulos suplementários cando $\alpha + \beta = \pi$.

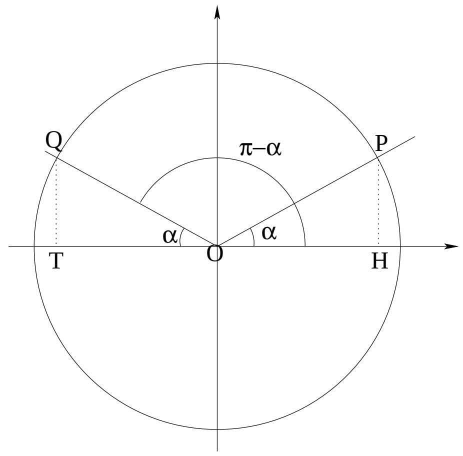
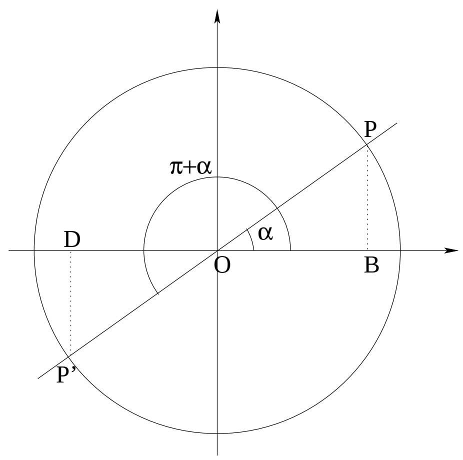


Gráfico 17. α e β son ángulos cuxa diferenza é π.



4.4.4.3. *Ángulos cuxa diferenza é π.* Neste caso, no deseño do Gráfico 17, nos triángulos OBP e ODP$'$ observa–se que,

$$\mathrm{OD} = -\mathrm{OB}\,, \quad \mathrm{DP}' = -\mathrm{BP}\,,$$

polo que

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = \mathrm{DP}' = -\mathrm{BP} = -\operatorname{sen}\alpha\,, \quad \cos(\pi + \alpha) = \mathrm{OD} = -\mathrm{OB} = -\cos(\pi + \alpha)\,.$$

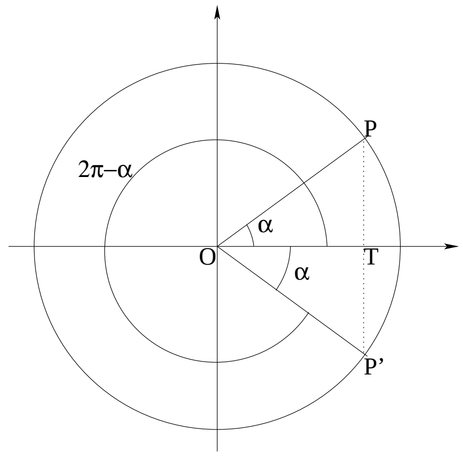
Portanto,

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha\,, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha\,,$$
$$\sec(\pi + \alpha) = -\sec\alpha\,, \quad \csc(\pi + \alpha) = -\csc\alpha\,.$$

4.4.4.4. *Ángulos opostos.*

Definición 4.4.12. Di–se que α e β son ángulos opostos cando $\alpha + \beta = 2\pi$.

GRÁFICO 18. Di–se que α e β son ángulos opostos cando $\alpha + \beta = 2\pi$.



Neste caso, no deseño do Gráfico 18, nos triángulos OTP e OTP′ observa–se que,

$$\mathrm{TP} = -\mathrm{TP}',$$

motivo polo que

$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = \mathrm{TP}' = -\mathrm{TP} = -\operatorname{sen}\alpha\,,$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \mathrm{OT} = \cos\alpha\,.$$

En consecuéncia,

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha\,, \quad \cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha\,,$$
$$\sec(2\pi - \alpha) = -\sec\alpha\,, \quad \csc(2\pi - \alpha) = -\csc\alpha\,.$$

4.4.5. Funcións trigonométricas. Unha vez que están definidas as razóns trigonométricas para un ángulo α dado, é posible definir as correspondentes funcións seno, coseno, tanxente, cotanxente, secante e cosecante. Por exemplo, a función seno está definida mediante

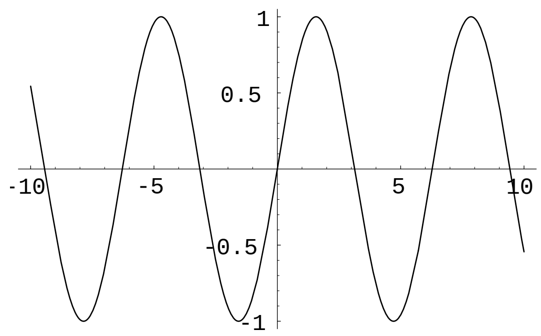
$$\operatorname{sen} : \alpha \in \mathbf{R} \mapsto \operatorname{sen}\alpha \in [-1, 1]\,.$$

Da función seno, definida para todos os números reais α están xá calculados os seguintes valores

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0

É posible representar graficamente a función $\operatorname{sen}\alpha$, cuxo resultado aparece no Gráfico 19, para $\alpha \in [-10, 10]$. Observe–se "certa peridiocidade" no deseño da función $\operatorname{sen}\alpha$.

GRÁFICO 19. Gráfica da función $\operatorname{sen}\alpha$ para $\alpha \in [-10, 10]$.



Exemplo 4.8. De seguido obten–se o domínio e o rango da función tanxente. Posto que

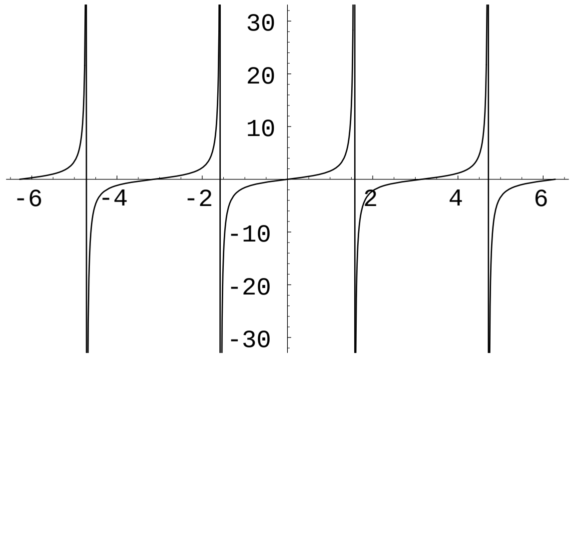
$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$$

e xá que as funcións seno e coseno non se anulan simultaneamente, a función tanxente, definida como un cociente, non está definida (non é un valor real) para os valores de α nos que o denominador é cero, i.e.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ademais, pese a que tanto o seno como o coseno son funcións limitadas (toman valores unicamente entre -1 e 1), no caso da función tanxente a medida que α é mais próximo a $\pi/2$, con valores menores que $\pi/2$, tanto o seno como o coseno son positivos; o seno cada vez toma valores mais próximos a 1 e o coseno mais próximos a cero, de xeito que o cociente cada vez é mais grande (tende a $+\infty$). Ora ben, se os valores de α son maiores que $\pi/2$ e cada vez mais próximos a dito valor, por un lado ten–se que $\operatorname{sen}\alpha$ é positivo e cercano a 1, e polo outro que $\cos\alpha$ é negativo e próximo a cero. Deste xeito, a medida que α se achega a $\pi/2$ por valores maiores que $\pi/2$, a tanxente de α cada vez toma valores mais grandes en valor absoluto e negativos (tende a $-\infty$). Se $\alpha = 0$, entón obviamente $\tan\alpha = 0$. En consecuéncia, o rango da función tanxente é $\mathbf{R}$ e a sua representación gráfica ven dada no Gráfico 20.

GRÁFICO 20. Gráfica da función $\tan(x)$.



4.4.6. Funcións trigonométricas inversas. Baixo certas hipóteses (vexa–se a Sección 3.4) é posible definir a función inversa f^{-1} dunha función dada.

No caso das funcións trigonométricas, ten–se que tanto a función seno, a función coseno como a función tanxente son monótonas crescentes en determinados intervalos. Portanto, é posible introducir as seguintes funcións.

Definición 4.4.13. Define–se a función arco cuxo seno é x

$$f : x \in [-1, 1] \mapsto f(x) = \text{arcsen}(x)\,,$$

do seguinte xeito: $\text{arcsen}(x)$ é único valor $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\text{sen}(y) = x$.

Definición 4.4.14. Define–se a función arco cuxo coseno é x

$$f : x \in [-1, 1] \mapsto f(x) = \arccos(x)\,,$$

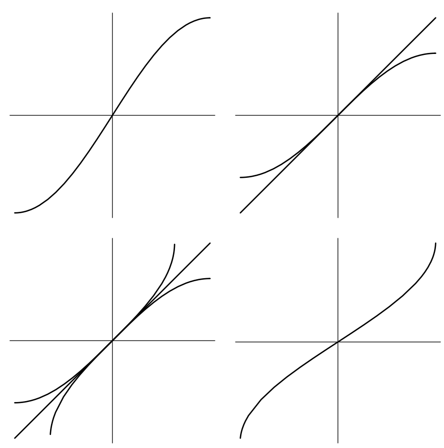
do seguinte xeito: $\arccos(x)$ é único valor $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos(y) = x$.

Nota 4.4.9. En xeral, para a representación gráfica da inversa dunha función f que xá está deseñada pode–se proceder de dous xeitos (realmente equivalentes).

A primeira opción consiste en xirar o papel onde está o gráfico duas veces: unha primeira, meia volta, tomando como eixo o borde esquerdo do papel; deste xeito terá–se o eixo OX apontando á esquerda e OY igualmente orientado; o segundo xiro é de $\pi/2$ en sentido horário; deste xeito terá–se permutado o papel de OX e OY. Como exercício elemental, plantexa–se representar graficamente a función $\arccos x$ en $[0, \pi]$.

Outra opción consiste en representar sobre o mesmo gráfico no que aparece f a recta $y = x$. A continuación reflicten–se os pontos de f através desta nova recta, obtendo a función inversa de f. No Gráfico 21 describe–se este proceso para o caso particular $f(x) = \text{sen}\, x$.

Gráfico 21. Gráfica da función $\text{arcsen}(x)$.



Por suposto, en calquera das duas opcións é posible facer de novo o proceso, calculando deste xeito a inversa da inversa que, por suposto, é a función de partida.

Evidentemente, se $x \in [-1,1]$, entón

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x\,, \qquad \cos(\arccos(x)) = x$$

Definición 4.4.15. Define–se a función arco cuxa tanxente é x

$$f : x \in [-1,1] \mapsto f(x) = \arctan(x)\,,$$

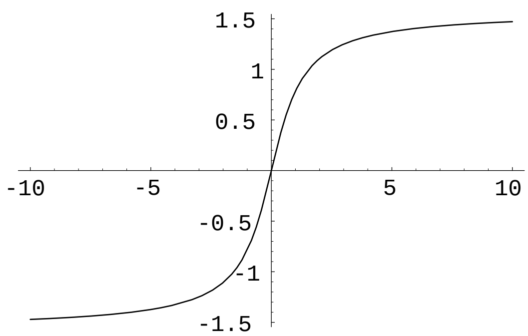
do seguinte xeito: $\arctan(x)$ é único valor $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\tan(y) = x$.

Evidentemente, se $x \in \mathbf{R}$, entón

$$\tan(\arctan(x)) = x\,.$$

A Gráfica da función $\arctan(x)$ aparece no Gráfico 22.

GRÁFICO 22. Gráfica da función $\arctan(x)$.



4.4.7. Resolución de triángulos. Trata–se de obter todos e cada un dos elementos dun triángulo (trés lados —a, b e c— e trés ángulos —α, β e γ—). Para este tipo de problemas empregan–se as seguintes ferramentas:

1. Teorema de Pitágoras,
2. Trigonometria,
3. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$,
4. Teoremas do seno e do coseno,

das cais só a última non é ainda coñecida.

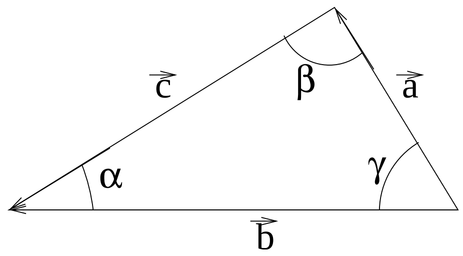
4.4.7.1. *Teorema do coseno.* No triángulo do deseño do Gráfico 23, o vector $\vec{b}$ pode–se expresar como a soma dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{c}$:

$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}\,.$$

Denotando por a, b e c as lonxitudes dos lados dados polos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, e operando resulta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos(\vec{b}, \vec{c})\,.$$

GRÁFICO 23. No triángulo do deseño observa–se que o vector $\vec{b}$ pode–se expresar como a soma dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{c}$.



4.4.7.2. *Teorema do seno.* Neste caso enuncia–se o resultado unicamente, se ben cumpre indicar que para a sua proba é necesário distinguir tres casos: triángulos acutángulos, triángulos obtusángulos e triángulos rectángulos. Nos trés casos ten–se o mesmo resultado, que referido ao deseño feito no Gráfico 23 é

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\,.$$

4.5. Funcións exponenciais e logarítmicas

Nesta sección apresentan–se os dous últimos tipos de funcións elementais: as exponenciais e as logarítmicas. Incluen–se nunha mesma sección pois unhas son as inversas das outras.

4.5.1. Funcións exponenciais. Sexa a un número real positivo ($a > 0$). É doado de definir cais son as poténcias naturais de a,

$$a^0 = 1\,, \quad a^1 = a\,, \qquad a^2 = a\,a\,, \dots\,,$$

asi como as poténcias racionais de a, i.e. elevar o número real positivo a a unha poténcia racional (fracción). Por exemplo,

$$a^{1/2} = \sqrt{a}\,, \quad a^{1/3} = \sqrt[3]{a}\,, \quad a^{3/2} = (\sqrt{a})^3\,, \dots\,.$$

Neste caso, é ben coñecido que

$$a^0 = 1\,, \quad a^r a^s = a^{r+s}\,, \quad (a^r)^s = a^{rs}\,, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}\,, \quad \forall r, s \in \mathbb{Q}\,.$$

Non é tan doado, pola dificultade na interpretación xeométrica, entender o significado das poténcias reais de a, i.e. elevar a a calquer número real.

Definición 4.5.1. Para cada número real a positivo, define–se a función exponencial de base a mediante

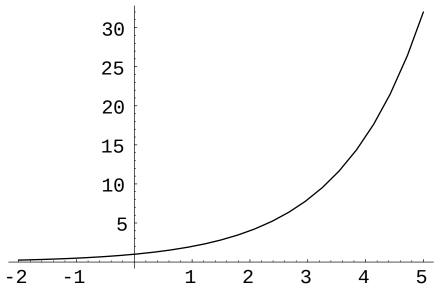
$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = a^x \in \mathbf{R}\,.$$

Nota 4.5.1. A continuación estuda–se se a función exponencial de base a é crescente ou decrescente dependendo do valor de a.

1. Evidentemente, se $a = 1$ a función é constante e igual a 1.

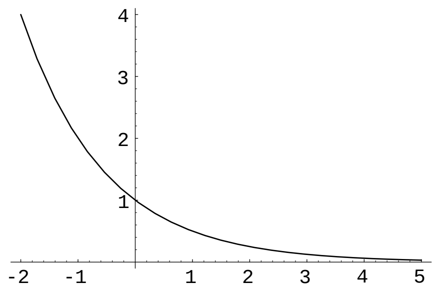
2. Ademais, se $a > 1$, entón a^x medra a medida que x medra; por outras palabras $f(x) = a^x$ é crescente en todo o seu domínio. No Gráfico 24 está representada a función exponencial para o valor de $a = 2$.

GRÁFICO 24. Gráfica da función $f(x) = 2^x$.



3. Finalmente, se $0 < a < 1$, entón a^x é cada vez menor a medida que x medra, i.e. $f(x) = a^x$ é decrescente en todo o seu domínio. No Gráfico 25 está representada a función exponencial para o valor de $a = 1/2$.

GRÁFICO 25. Gráfica da función $f(x) = (1/2)^x$.



4.5.2. Funcións logarítmicas. A última clase de funcións elementais que se introducen son as denominadas funcións logarítmicas.

Definición 4.5.2. Sexa a un número real positivo ($a > 0$) e dintinto de 1. A función logaritmo de base a ven definida por

$$\log_a : x \in \mathbf{R}^+ \mapsto \log_a(x) = y \in \mathbf{R}$$

onde y é o único número real para o cal

$$a^y = x\,.$$

Nota 4.5.2. Da própria definición da función logarítmica en base a, ten–se que

$$\log_a 1 = 0\,, \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y\,.$$

Ademais, para x número real positivo e y calquer número real,

$$\log_a x^y = y \log_a x\,.$$

Finalmente,

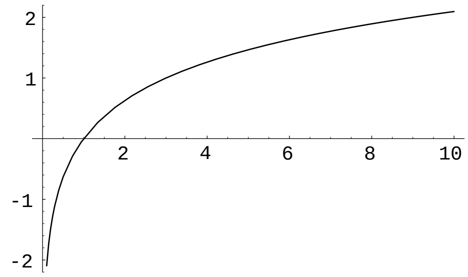
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\,.$$

Para a representación gráfica da función logaritmo en base a, é posible empregar as propriedades anteriores ou ben simplesmente ter en conta que é a función inversa da función exponencial de base a e ter en conta calquera das duas opcións descritas na sección 4.4.6.

Nota 4.5.3. A continuación estuda–se se a función logarítmica de base a é crescente ou decrescente dependendo do valor de a.

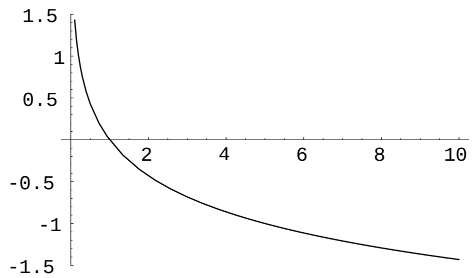
1. Se $a > 1$, entón $\log_a(x)$ é crescente en todo o seu domínio. No Gráfico 26 está representada a función exponencial para o valor de $a = 3$.

Gráfico 26. Gráfica da función $f(x) = \log_3(x)$.



2. Por outra banda, se $0 < a < 1$, entón $\log_a(x)$ é decrescente en todo o seu domínio. No Gráfico 27 está representada a función exponencial para o valor de $a = 1/5$.

Gráfico 27. Gráfica da función $f(x) = \log_{1/5}(x)$.



4.6. Exercícios e problemas

Exercício 4.1. Dadas as seguintes regras:

$$f : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^2\,,$$
$$g : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = \sqrt{x}\,,$$
$$h : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = \log(-|x|)\,.$$

Estude–se se son ou non son aplicacións. En caso afirmativo, indique–se o domínio e a imaxe.

Exercício 4.2. Representen–se graficamente as seguintes funcións:

$$f : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = x + 2\,,$$
$$g : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = x^3 + 4\,,$$
$$h : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = (x - 1)^2\,.$$

Exercício 4.3. Representen–se graficamente as seguintes funcións:

$$f : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = x + 2\,,$$
$$g : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = 3x\,,$$
$$h : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = -x + 1\,.$$

Exercício 4.4. Representen–se graficamente as seguintes funcións

$$f : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \frac{1}{x-1}\,,$$
$$g : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = \frac{1}{(x-4)^2}\,,$$
$$h : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = \frac{2}{(x-7)^3}\,.$$

Exercício 4.5. Calculen–se os valores das seguintes razóns trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 5\pi/6\,, \quad \cos 4\pi/3\,, \quad \tan 5\pi/3\,, \quad \sec \pi/4\,, \quad \csc 2\pi/3\,, \quad \cot 5\pi/4\,.$$

Exercício 4.6. Sexa α tal que $0 < \alpha < \pi/2$ tal que $\sec \alpha = 4$. Calculen–se $\cos(\alpha+\pi)$, $\csc(-\alpha)$ e $\tan(\pi/2 - \alpha)$.

Exercício 4.7. Achen–se os valores de α para os cais

$$\cos^2 \alpha - \cos \alpha = 2\,.$$

Exercício 4.8. Achen–se os valores de α para os cais

$$\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 1\,.$$

Exercício 4.9. Calcule–se

$$\operatorname{sen} 2\pi/3 - 3 \tan 5\pi/3 + \cos \pi - 2 \cot 4\pi/3\,.$$

Exercício 4.10. Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0$ e que $\alpha \in [0, \pi/2]$, cal das seguintes afirmacións é correcta?

1. $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$.
2. $\alpha = 0$.
3. $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/2$.
4. $\alpha = \pi/2$.

Exercício 4.11. Indiquen–se os sinais das distintas razóns trigonométricas para ángulos α nas seguintes situacións:

1. α comprendido no primeiro cuadrante.
2. α comprendido no segundo cuadrante.
3. α comprendido no terceiro cuadrante.
4. α comprendido no cuarto cuadrante.

Exercício 4.12. Indiquen–se os valores das distintas razóns trigonométricas para os seguintes ángulos α: 0, $\pi/2$, $3\pi/2$ 2π, 4π.

Exercício 4.13. Cubra–se a tabela dada no Gráfico 28

GRÁFICO 28. Tabela do Exercício 4.13

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos\alpha$								

Exercício 4.14. Represente–se graficamente a función coseno

$$\cos : \alpha \in \mathbf{R} \mapsto \cos\alpha \in [-1,1]\,.$$

Exercício 4.15. Representen–se graficamente as seguintes funcións

$$\begin{aligned} f &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \operatorname{sen}(2x)\,,\\ g &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = 2\cos(x)\,,\\ h &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = \operatorname{sen}(x+\pi)\,,\\ r &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto r(x) = \pi + \cos(x) \end{aligned}$$

Exercício 4.16. Probe–se que

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{1+\tan\alpha}{\sec\alpha}\,.$$

Exercício 4.17. Ache–se o domínio e o rango das funcións cotanxente, secante e cosecante. Representen–se graficamente ditas funcións.

Exercício 4.18. Calcule–se, se existir, un ángulo α para o cal

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\,, \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}\,.$$

Exercício 4.19. Sexa β un ángulo tal que $3\pi/2 \le \beta \le 2\pi$, con $\tan\beta = -5$. Calculen–se as demais razóns trigonométricas de α.

Exercício 4.20. Calcule–se, se existir, un ángulo α para o cal

$$\tan\alpha = \frac{3}{2}\,, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{-1}{2}\,.$$

Exercício 4.21. Probe–se que

$$(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\tan\alpha\cos^2\alpha\,.$$

Exercício 4.22. Simplifique–se, para os ángulos α en que sexa posible,

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\,.$$

Exercício 4.23. Determinen–se os valores de α para os cais

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 7\cos^2\alpha - 5\,.$$

Exercício 4.24. Calculen–se

$$\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(x))\,, \qquad \operatorname{sen}(2\arccos(x))\,.$$

Exercício 4.25. Calculen–se, se existir,

1. $\tan(\operatorname{arccsc} 2)$.
2. $\operatorname{sen}(\arccos(-\sqrt{3}/2))$.
3. $\cos(\operatorname{arcsen}(2))$.

Exercício 4.26. O valor de $\cos(\omega t + \pi)$ é igual a

1. $-\cos(\omega t)$
2. $\cos(\omega t)$
3. $2\cos(2\omega t)$
4. $\frac{1}{2}\cos(2\omega t)$
5. Nengunha das respostas anteriores é correcta.

Exercício 4.27. Calcule–se o perímetro e a área do triángulo isósceles onde o lado desigual mede 40cm e os ángulos iguais son de 75º.

Exercício 4.28. ¿Pode existir un triángulo onde as lonxitudes dos lados sexan 10, 12 e 24 cm, respectivamente?

Exercício 4.29. Calcule–se a área dun triángulo cuxos lados meden 10, 12 e 13 cm.

Exercício 4.30. Unha persoa conduce durante 150m ao longo dunha via inclinada 20º sobre a horizontal. A que altura está en relación co ponto de partida?

Exercício 4.31. Representen–se graficamente as seguintes funcións:

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = 2^{x-1}\,,$$
$$g : x \in \mathbf{R} \mapsto g(x) = 3^{x} + 1\,,$$
$$h : x \in \mathbf{R} \mapsto h(x) = 2^{x} + 3^{x}\,,$$
$$r : x \in \mathbf{R} \mapsto r(x) = e^{x}\,,$$
$$s : x \in \mathbf{R} \mapsto s(x) = e^{-x}\,.$$

Exercício 4.32. Representen–se graficamente as seguintes funcións

$$
\begin{aligned}
f &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \log_{10}(x-1)\,,\\
g &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = \log_{10}|x-1|\,,\\
h &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = 3 + \ln(x)\,,\\
r &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto r(x) = \ln(2x+1)\,,\\
s &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto s(x) = \ln(x^2)\,.
\end{aligned}
$$

Exercício 4.33. Representen–se no mesmo deseño as seguintes funcións

$$
\begin{aligned}
g &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = \ln x\,,\\
r &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto r(x) = e^x\,,\\
t &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto t(x) = x^9\,,\\
\alpha &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto \alpha(x) = \frac{1}{x}\,.
\end{aligned}
$$

Exercício 4.34. Sexa x un número real. Cal das seguintes afirmacións é verdadeira?

1. $y = \log e^x$ sempre existe e o seu valor é x.
2. $y = \log e^x$ existe unicamente para números x positivos e o seu valor é x.
3. $w = e^{\log x}$ sempre existe e o seu valor é x.
4. e^x é maior ou igual que un, calquer que sexa x.

Exercício 4.35. Cal das seguintes afirmacións é verdadeira?

1. $x^2 > e^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
2. $\frac{1}{x} < x^4$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $x > 0$.
3. $\log x < e^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $x > 0$.
4. Existe un número real x positivo tal que $e^x < 1$.

Exercício 4.36. Sexa $\alpha \in [\pi/2, \pi]$. Cal das seguintes afirmacións é verdadeira?

1. $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$.
2. $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$.
3. $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$.
4. $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$.

TEMA 5

Derivadas e integrais

Neste Capítulo fai–se un breve repaso ao cálculo de derivadas e integrais de funcións reais dunha variable real. Tanto o conceito de derivada como o de integral son apresentados coas suas interpretacións xeométricas. Ademais, fai–se especial fincapé na denominada "regra da cadeia", i.e. a derivación dunha composición de funcións.

5.1. Derivadas

5.1.1. Conceito de derivada. A definición clásica (Cauchy) de derivada ven dada através dun limite dun cociente incremental, que ten as suas interpretacións tanto físicas como xeométricas.

Definición 5.1.1. Sexa

$$f : (a, b) \mapsto \mathbf{R}$$

unha función real dunha variable real. Sexa $x_0 \in (a, b)$. Di–se que a función f é derivable no ponto x_0 se existe e é un número real o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, .$$

Cando f sexa derivable no ponto x_0, denotará–se por $f'(x_0)$ o valor do anterior limite, e denominará–se derivada de f en x_0.

Nota 5.1.1. Se o limite anterior existe cando $x \to x_0^+$ (respectivamente $x \to x_0^-$), denomina–se derivada lateral pola direita (respectivamente esquerda) de f en x_0.

Definición 5.1.2. Sexa $f : I = (a, b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función real dunha variable real e sexa J o conxunto dos pontos de I onde a función f é derivable. Define–se a aplicación derivada de f mediante

$$f' : x \in J \subset I \subset \mathbf{R} \mapsto f'(x) \in \mathbf{R} \, .$$

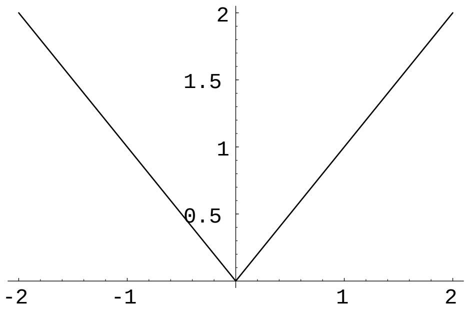
Proposición 5.1.3. *Sexa $f : I = (a, b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función real dunha variable real derivable no ponto $x_0 \in I$. Daquela, f é contínua no ponto x_0.*

Nota 5.1.2. O recíproco do anterior resultado é, en xeral, falso. Por exemplo, a función

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = |x|$$

é contínua en $x_0 = 0$, pero non é derivable en x_0.

GRÁFICO 29. A función $|x|$ é contínua en todo $\mathbf{R}$. Ademais, é derivable en todo $\mathbf{R}$ menos no ponto 0.



5.1.1.1. *Interpretación física da derivada.* Supoñamos que coñecemos a posición $r(t)$ en cada instante de tempo t dun obxecto.

Empregando a célebre fórmula para a velocidade para o movimento uniforme

$$v = \frac{e}{t}$$

onde e representa o espazo e t o tempo, é moi doado calcular a velocidade meia do obxecto nun intervalo de tempo $[t_0, t]$:

$$v = \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}.$$

A medida que o intervalo de tempo considerado é mais pequeno, o cociente anterior vai tendendo ao valor da velocidade instantánea do obxecto. Deste xeito, o valor da velocidade no instante de tempo t_0 ven dado por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}$$

que non é mais que o valor da derivada da función de posición do obxecto no ponto t_0.

5.1.1.2. *Interpretación xeométrica da derivada.* O valor da derivada dunha función f nun ponto x_0 coincide co valor da pendente da recta tanxente á gráfica da función f no ponto x_0.

En efeito, no Gráfico 30 ten–se a representación da función $y = f(x)$. Fixado un ponto x_0, $P_0 = (x_0, f(x_0))$, e outro ponto $x \neq x_0$, ten–se un triángulo rectángulo no cal a altura ven dada polo incremento na variable y:

$$h = f(x) - f(x_0),$$

e a base ven dada polo incremento na variable x

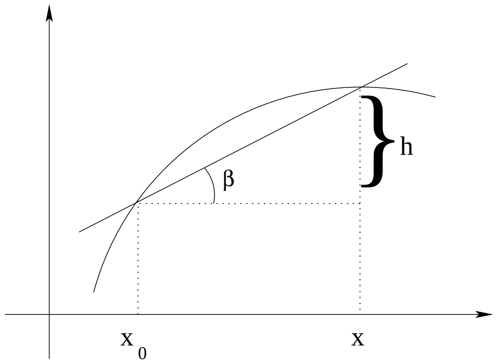
$$b = x - x_0.$$

Deste xeito, a tanxente do ángulo β é

$$\tan \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

que representa a pendente da recta secante.

Gráfico 30. Interpretación xeométrica da derivada. No deseño representa–se a recta tanxente á gráfica da función $y = f(x)$ pasando polos pontos $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$.



A medida que x tende a x_0 a recta secante vai tendendo á recta tanxente, de xeito que o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é o valor da pendente da recta tanxente á gráfica $y = f(x)$ no ponto P_0.

5.1.1.3. *Cálculo de algunhas derivadas.* De seguido calculan–se as derivadas de duas funcións elementais, interpretando ben xeométrica, ben fisicamente o valor da derivada.

1. No caso dunha función constante

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = \alpha \,,$$

pode–se pensar que representa a posición dun obxecto que está todo o tempo no mesmo ponto (non se move). Portanto, a sua velocidade é cero. Por outras palabras, a derivada dunha función constante é a función constante cero:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha - \alpha}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 \,.$$

Xeometricamente é claro o valor da derivada da función constante. Neste caso, a pendente das rectas secantes é sempre cero, de xeito que a pendente da recta tanxente tamén é cero.

2. No caso da función identidade

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = x \,,$$

a recta secante ligando dous pontos da recta é a própria recta, de xeito que o limite das secantes —tanxente á recta— volta a ser a recta, que ten pendente 1. En consecuéncia, a derivada de $f(x)$ é $f'(x_0) = 1$, en todo ponto x_0.

Fisicamente, se un obxecto se despraza e sabe–se que a sua posición en cada instante de tempo t é t, entón a sua velocidade ten que ser $v = 1$, de xeito que a derivada de $f(x) = x$ é $f'(x) = 1$.

Facendo as operacións do limite,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1\,.$$

5.1.2. Derivadas das funcións elementares. Empregando a definición de derivada dunha función nun ponto é posible obter as seguintes regras de derivación.

5.1.2.1. *Derivada da función potencial.* Se $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, entón $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Exemplo 5.1. Portanto, mediante simples aplicación da anterior regra de derivación ten–se que a derivada da función $f(x) = x^4$ ven dada por $f'(x) = 4x^3$ e a derivada da función $g(x) = \frac{1}{x}$ ven dada por $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

5.1.2.2. *Derivada da función logarítmica.* A derivada da función $f(x) = \log_a(x)$, onde a é un número real positivo distinto de 1, ven dada por

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln(a)}\,.$$

Exemplo 5.2. Aplicando a regra anterior ten–se que a derivada da función logaritmo neperiano $f(x) = \ln(x)$ ven dada por

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{x}\,,$$

xá que $\ln e = 1$. Ademais, a derivada da función logaritmo decimal $g(x) = \log_{10}(x)$ ven dada por

$$g'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln 10}\,.$$

5.1.2.3. *Derivada da función exponencial.* A derivada da función $f(x) = a^x$, onde a é un número real positivo, ven dada por

$$f'(x) = a^x \ln(a)\,.$$

Exemplo 5.3. Neste caso, ao aplicarmos a regra de derivación no caso da función exponencial de base e, $f(x) = e^x$, resulta

$$f'(x) = e^x \ln e = e^x\,,$$

xá que $\ln e = 1$. Ademais, a derivada da función exponencial de base 2, $g(x) = 2^x$ ven dada por

$$g'(x) = 2^x \ln 2\,.$$

5.1.2.4. *Derivadas das funcións trigonométricas circulares.* A continuación indican–se as derivadas das funcións trigonométricas

$$
\begin{aligned}
f(x) = \operatorname{sen}(x) &\Rightarrow f'(x) = \cos(x)\,,\\
g(x) = \cos(x) &\Rightarrow g'(x) = -\operatorname{sen}(x)\,,\\
h(x) = \tan(x) &\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,,\\
r(x) = \cot(x) &\Rightarrow r'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))\,,\\
s(x) = \sec(x) &\Rightarrow s'(x) = \frac{\tan(x)}{\cos(x)}\,,\\
t(x) = \sec(x) &\Rightarrow t'(x) = \frac{-\cot(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,,
\end{aligned}
$$

5.1.3. Derivada dunha soma, produto por un escalar, produto, cociente e composición. Comeza–se indicando as derivadas das operacións alxébricas básicas con funcións e números reais.

Proposición 5.1.4. *Sexan $f, g : (a,b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ duas funcións derivables no ponto a, e sexa $\lambda \in \mathbf{R}$, entón*

1. *A soma das funcións f e g, $f+g$, é derivable en a e ademais*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$
2. *O produto do escalar λ pola función f, λf, é derivable en a e ademais*
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)\,.$$
3. *O produto das funcións f e g, fg, é derivable en a, e ademais*
$$(f\,g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$
4. *Se ademais $g(a) \neq 0$, entón o cociente f/g é derivable en a e ademais*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Exemplo 5.4. Como aplicación da proposición anterior calculan–se as funcións derivadas das seguintes funcións:

$$f : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^2 + 3x + 1\,.$$

Neste caso, temos que $f(x)$ é unha soma de trés somandos e sabemos derivar cada un deles. En consecuéncia

$$f'(x) = 2x + 3 + 0 = 2x + 3\,.$$

O domínio de definición de $f'(x)$ volta a ser o mesmo que o da función f: toda a recta real.

Por outra banda, a función

$$g : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = 2\,x\ \mathrm{sen}(x)$$

é, por exemplo, o produto das funcións $2x$ e $\mathrm{sen}\,x$. Aplicando a regra de derivación dun produto de funcións,

$$g'(x) = 2\ \mathrm{sen}(x) + 2x\ \cos(x)\,.$$

Tanto a función g como a sua derivada teñen por domínio de definición toda a recta real.

A función h definida por

$$h : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = \mathrm{sen}^2(x) + \cos^3(x) + \frac{x}{x^2+1}\,,$$

pode–se descompor en trés somandos; os dous primeiros son o resultado de poténcias das funcións $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$, mentres que o terceiro é un cociente. Aplicando as regras respectivas a cada un dos somandos resulta

$$h'(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) + 3\cos^2(x)\,(-\,\mathrm{sen}(x)) + \frac{1\,(x^2+1) + x\,2x}{(x^2+1)^2}\,.$$

As funcións seno e coseno están definidas en todo $\mathbf{R}$. Ademais, o terceiro somando tamén ten por domínio todo $\mathbf{R}$ xá que o denominador nunca pode ser cero. Daquela o domínio de h é $\mathbf{R}$ e razoando dun xeito similar é doado verificar que tamén é o domínio de h'.

Finalmente, a función

$$r : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto r(x) = \ln(x) + \arctan(x) - \tan(x)\,,$$

é unha soma de trés somandos, onde o primeiro só está definido para números reais positivos, o segundo en todo $\mathbf{R}$ e o terceiro para os valores de x tais que $\cos x \neq 0$. Daquela, o domínio de r ven dado por

$$\mathrm{Dom}(r) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > 0\,, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\}\,.$$

A derivada da función ten por expresión

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} - (1 + \tan^2(x))\,.$$

Xá foi visto na Sección 3.3 o significado da composición de funcións. O seguinte resultado, que será de grande utilidade, é o relativo á derivada da composición de funcións.

Teorema 5.1.5 (Regra da Cadeia)**.** *Sexan*

$$f : (a,b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}\,,$$
$$g : (c,d) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}\,,$$

duas aplicacións, de xeito que $f((a,b)) \subset (c,d)$*. Se* f *é derivable en* $x_0 \in (a,b)$ *e* g *é derivable en* $f(x_0) \in (c,d)$ *entón* $(g \circ f)$ *é diferenciable en* x_0 *e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0)\,. \tag{5.1.1}$$

Exemplo 5.5. Neste exemplo, aplica–se a regra da cadeia para calcular a derivada da función h definida mediante

$$h : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = \operatorname{sen}(x^2)\,.$$

Para chegar a seno de x ao cadrado, primeiro temos que ter x ao cadrado e despois calcular o seno. Portanto, a composición que aparece é

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^2\,, \quad g : w \in \mathbf{R} \mapsto g(w) = \operatorname{sen} w\,,$$

de xeito que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \operatorname{sen} x^2\,.$$

Daquela, a derivada de h ven dada por

$$h'(x) = \cos(x^2)\,2x\,.$$

5.1.3.1. *Derivada da función inversa.* Dada unha función $f(x)$, xá foi visto que en determinadas ocasións é posible determinar a sua función inversa, i.e. outra función $g(y)$ tal que $(f \circ g)(y) = y$ e $(g \circ f)(x) = x$.

Coa axuda da regra da cadeia é simples obter a derivada da función inversa en termos da derivada da función f, xá que derivando a igualdade $(g \circ f)(x) = x$ resulta

$$g'(f(x))\,f'(x) = 1\,,$$

e, portanto, se $f'(x) \neq 0$,

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

i.e., a derivada da función inversa g no ponto $f(x)$ é igual ao inverso da derivada da función f no ponto x.

En xeral, é posible obter mediante aplicación do resultado anterior as seguintes expresións para as inversas das funcións trigonométricas circulares

$$\begin{aligned} f(x) = \arcsin(x) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ g(x) = \arccos(x) &\Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ h(x) = \arctan(x) &\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 5.6. Con obxecto de calcular o valor da derivada da función $\operatorname{arcsen}(x)$ no ponto $\frac{\sqrt{3}}{2}$, mediante aplicación do resultado anterior, simplesmente temos en conta que a función $g(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ é a función inversa da función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, para a cal sabemos que $f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x) = \cos(x)$ e, portanto, $f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$. En consecuéncia

$$g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = g'(\operatorname{sen}(\pi/3)) = \frac{1}{f'(\pi/3)} = 2\,.$$

Obviamente, neste caso é bastante mais doado calcular o valor da derivada empregando a regra de derivación da función arcsen(x):

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = 2\,.$$

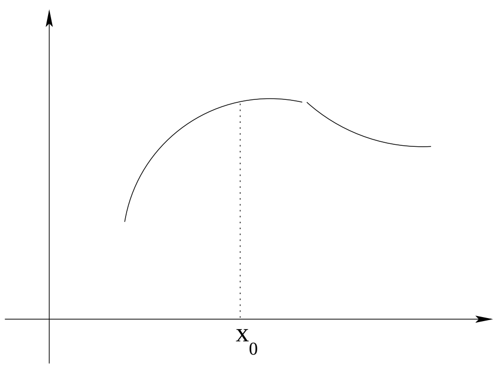
Derivada de	**Resultado**
Función potencial $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^r \in \mathbf{R}$	$f'(x) = rx^{r-1}$
Función exponencial $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \alpha^x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$
Función logarítmica $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \log_a(x) \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
Función seno $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto \lambda\, f(x) = \operatorname{sen} x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \cos x$
Función coseno $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \cos x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
Función tanxente $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \tan x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
Función cotanxente $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \cot x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
Función secante $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \sec x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$
Función cosecante $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \csc x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \frac{-\cot x}{\operatorname{sen} x}$
Función arco seno $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \operatorname{arcsen} x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Función arco coseno $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \arccos x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
Función arco tanxente $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \arctan x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Función arco cotanxente $f: x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \operatorname{arccot} x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

5.1.4. Funcións crescentes e decrescentes. Extremos relativos. As nocións de función crescente e decrescente non necesitan da derivabilidade da función. Sen embargo, cando a función é derivable "cerca" do ponto é posible coñecer se a función cresce ou decresce a partir do valor da derivada da función.

Derivada de	**Resultado**
Unha función nun ponto $f : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) \in \mathbf{R}$	$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Unha función constante $f : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = \alpha \in \mathbf{R}$	$f'(x) = 0$
Soma de funcións $f+g : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x)+g(x) \in \mathbf{R}$	$f'(x)+g'(x)$
Produto constante función $\lambda f : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto \lambda\, f(x) \in \mathbf{R}$	$\lambda f'(x)$
Produto de funcións $fg : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x)g(x) \in \mathbf{R}$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Cociente de funcións $f/g : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x)/g(x) \in \mathbf{R}$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
Composición de funcións $f \circ g : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(g(x)) \in \mathbf{R}$	$f'(g(x))\, g'(x)$
Función inversa $f : x \in D \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) \in \mathbf{R}$ $g : y \in U \subset \mathbf{R} \mapsto g(y) \in \mathbf{R}$ $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ g)(y) = y$	$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

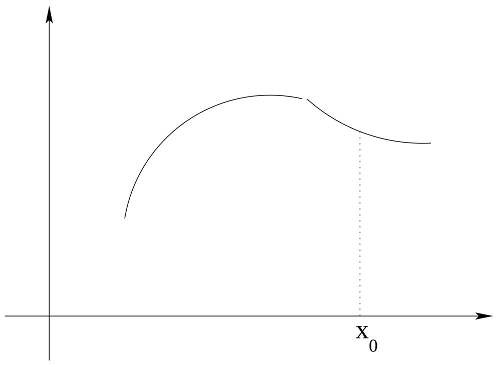
Definición 5.1.6. Sexa $f : (a,b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función real dunha variable real e $x_0 \in (a,b)$. Di–se que f é crescente no ponto x_0 se existir un número real positivo h tal que se $x \in (x_0-h, x_0)$ entón $f(x) \leq f(x_0)$ e se $x \in (x_0, x_0+h)$ entón $f(x_0) \leq f(x)$.

GRÁFICO 31. A función $y = f(x)$ representada graficamente no deseño é crescente no ponto x_0.



Definición 5.1.7. Sexa $f : (a,b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función real dunha variable real e $x_0 \in (a,b)$. Di–se que f é decrescente no ponto x_0 se existir un número real positivo h tal que se $x \in (x_0-h, x_0)$ entón $f(x_0) \leq f(x)$ e se $x \in (x_0, x_0+h)$ entón $f(x) \leq f(x_0)$.

GRÁFICO 32. A función $y = f(x)$ representada graficamente no deseño é decrescente no ponto x_0.



Exemplo 5.7. As funcións constantes son simultaneamente crescentes e decrescentes en calquer ponto x_0 pertencente ao domínio da función.

Proposición 5.1.8. *Sexa $f : (a, b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función derivable en todos os pontos do intervalo aberto (a, b) e sexa $x_0 \in (a, b)$.*

1. *Se $f'(x_0) > 0$ entón f é crescente no ponto x_0.*
2. *Se $f'(x_0) < 0$, entón f é decrescente no ponto x_0.*

Exemplo 5.8. Con obxecto de determinar os intervalos de crescemento e decrescemento da función f definida por

$$f : x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^3 \,,$$

xá que é derivable en todo $\mathbf{R}$ e

$$f'(x) = x^2 \,,$$

que resulta ser sempre maior ou igual que cero (é unha poténcia par). Daquela, a función f é crescente en todo $\mathbf{R}$.

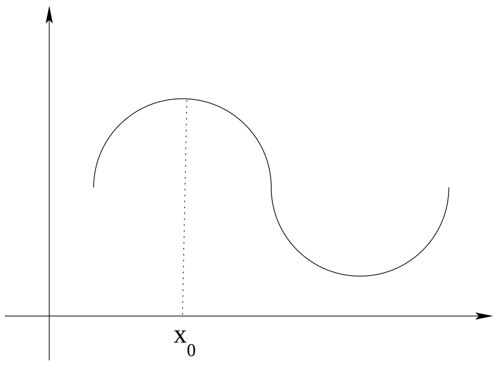
Ao igual que no caso de funcións crescentes e decrescentes, os conceitos de máximo e mínimo —extremos— relativo dunha función introducen–se sen nengún tipo de referéncia á derivabilidade ou non da función. Cando, ademais, a función é derivable, é posible dar unha condición necesária na derivada primeira para a existéncia de extremo nun ponto e unha condición suficiente, na derivada segunda.

Definición 5.1.9. Sexa $f : (a, b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función real dunha variable real e sexa $x_0 \in (a, b)$.

1. Di–se que a función f apresenta un máximo relativo no ponto x_0 se existe $h > 0$ de xeito que

$$f(x) \leq f(x_0) \,, \quad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) \,.$$

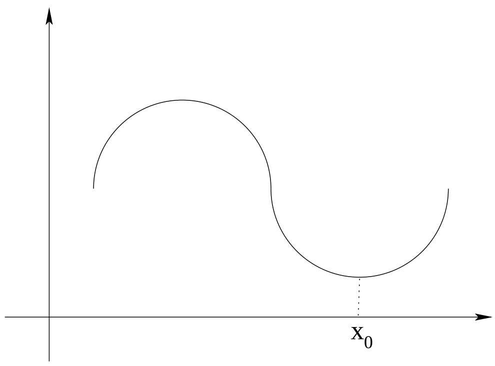
GRÁFICO 33. A función $y = f(x)$ representada graficamente no deseño apresente un máximo no ponto x_0.



2. Di–se que a función f apresenta un mínimo relativo no ponto x_0 se existe $h > 0$ de xeito que

$$f(x_0) \leq f(x)\,, \quad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)\,.$$

GRÁFICO 34. A función $y = f(x)$ representada graficamente no deseño apresenta un mínimo no ponto x_0.



Nota 5.1.3. Os pontos onde a función pasa de ser crescente a decrescente, ou vice–versa, son extremos relativos da función. De feito, coa información obtida relativa aos intervalos de crescemento e decrescemento da función é doado obter os extremos relativos da función. Outro xeito, basea–se no estudo do sinal da derivada segunda da función.

Proposición 5.1.10. *Sexa $f : (a,b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función derivable en todos os pontos do intervalo aberto (a,b) e sexa $x_0 \in (a,b)$. Se f apresenta no ponto x_0 un extremo relativo (máximo ou mínimo) entón $f'(x_0) = 0$.*

Nota 5.1.4. Os pontos x_0 nos que a función derivada da función derivable

$$f : (a,b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$$

é nula receben o nome de pontos críticos e son os posibles extremos da función. Se $f'(x_0) = 0$, entón f **pode** ter un extremo relativo no ponto x_0, pero tamén pode que f non teña extremo no ponto x_0.

Proposición 5.1.11. *Sexa $f : (a,b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función derivable duas veces en todos os pontos do intervalo aberto (a,b) e sexa $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

1. *Se $f''(x_0) > 0$ entón f ten en x_0 un mínimo relativo.*
2. *Se $f''(x_0) < 0$, entón f apresenta no ponto x_0 un máximo relativo.*

Nota 5.1.5. Se $f''(x_0) = 0$, non é posible afirmar que f teña ou non teña extremo no ponto x_0. A solución a este caso pasa polo teorema de Taylor.

Exemplo 5.9. Pretende–se determinar as dimensións do cilindro de maior volume entre todos aqueles que teñen a mesma superfície k.

Se R denota o ráio da base do cilindro e h a altura do mesmo, a superfície total do cilindro ven dada por

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(R+h)$$

que ten que ser constante e igual a k, de xeito que, por exemplo,

$$h = \frac{k - 2\pi R^2}{2\pi R}\,.$$

O volume do cilindro pode–se calcular mediante

$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \frac{k - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{Rk - 2\pi R^3}{2}\,.$$

Debemos calcular os extremos relativos precisamente da función volume, que agora é unha función dependente do ráio R (xá que k é unha constante dada). Derivando V con respeito a R,

$$V'(R) = \frac{k - 6\pi R^2}{2}$$

e, igualando a cero, resulta que o posible extremo da función V obten–se cando

$$R = \sqrt{\frac{k}{6\pi}}\,.$$

Posto que a derivada segunda da función V con respeito a R é

$$V''(R) = -6\pi R < 0\,,$$

ten–se que no ponto $R = \sqrt{k/(6\pi)}$ a función V ten un máximo relativo. Neste ponto, operando, as dimensións do cilindro son

$$R = \sqrt{\frac{k}{6\pi}}\,, \qquad h = 2R\,.$$

GRÁFICO 35. Gráfica dunha función convexa: os valores da tanxente á curva no ponto x_0 son menores que os valores da función.

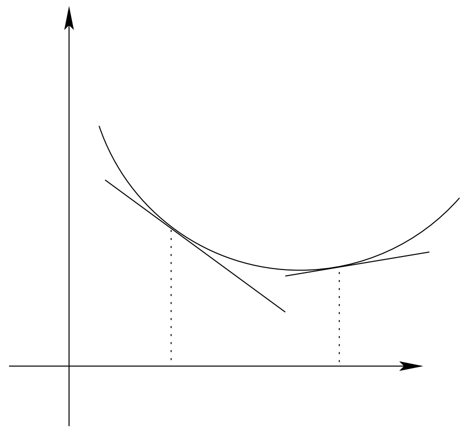
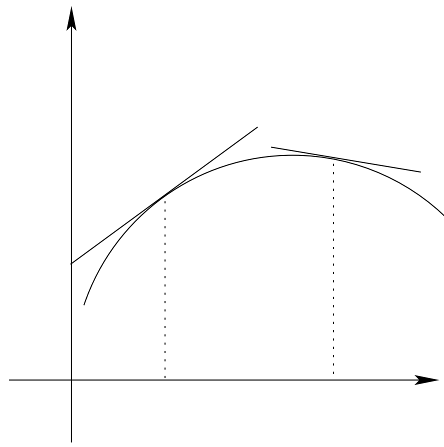


GRÁFICO 36. Gráfica dunha función cóncava: os valores da tanxente á curva no ponto x_0 son maiores aos valores da función.



5.1.5. Concavidade e convexidade. Pontos de inflexión. Os conceitos de función cóncava e función convexa non aparecen na literatura sempre do mesmo xeito.

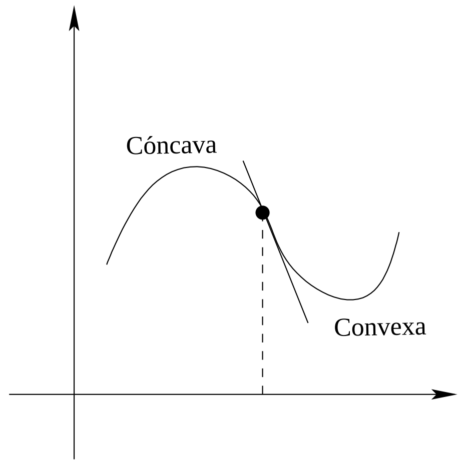
Definición 5.1.12. Di–se que a función $f : (a, b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ é convexa no ponto x_0 se existir un número real h positivo tal que os valores da tanxente á curva no ponto x_0 son menores que os valores da función (vexa–se o Gráfico 35).

Definición 5.1.13. Di–se que a función $f : (a, b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ é convexa no ponto x_0 se existir un número real h positivo tal que os valores da tanxente á curva no ponto x_0 son maiores aos valores da función (vexa–se o Gráfico 36).

Definición 5.1.14. Di–se que a función

$$f : (a, b) \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$$

Gráfico 37. Gráfica dun ponto de inflexión: a recta tanxente atravesa á grafica.



ten no ponto $x_0 \in (a, b)$ un ponto de inflexión se a gráfica da recta tanxente a f no ponto de abscisa x_0 atravesa á gráfica da curva —por outras palabras, no ponto x_0 aparece un cámbio de cóncava a convexa ou viceversa—, (vexa–se o Gráfico 37).

Nota 5.1.6. Se a función f é duas veces derivable, entón f é convexa se e só se $f'' \geq 0$ e f é cóncava se e só se $f'' \leq 0$.

5.1.6. Representación gráfica dunha función. O seguinte esquema, que pode ser variado, pode ser útil no momento da representación gráfica dunha función real dunha variable real. O esquema fai–se segundo un exemplo concreto: representar graficamente a función

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}\,.$$

1. En primeiro lugar, convén determinar o domínio de definición da función. No exemplo,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}\,.$$

2. A continuación determinan–se os pontos de corte aos eixos. Nos pontos de corte co eixo OY, ten que ser $x = 0$ de xeito que, no exemplo,

$$y = \frac{0^2}{0-1} = 0\,,$$

a gráfica pasa polo ponto $(0, 0)$.

Para determinar os cortes co eixo OX, ten que ser $y = 0$, de xeito que hai que resolver a ecuación en x

$$0 = \frac{x^2}{x-1}\,,$$

que ten por única solución $x = 0$ e, portanto, o único corte co eixo OX é no ponto $(0, 0)$.

3. Pode ser interesante determinar posibles simetrias da función, pois caso de existir permiten reducir o traballo considerablemente.

   Se a función é par $f(x) = f(-x)$ a sua gráfica é simétrica con respeito ao eixo OY, e basta con estudar que ocorre para $x \geq 0$ e despois facer a simetria correspondente.

   Se a función é impar $f(x) = -f(-x)$ entón a sua gráfica é simétrica con respeito á orixe e de novo bastaria con estudar o caso $x \geq 0$ e despois facer a correspondente simetria.

   No exemplo,
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}\,, \quad f(-x) = \frac{x^2}{-x-1}\,,$$
   que non son nen iguais nen opostos, de xeito que a gráfica da función non é simétrica nen respeito ao eixo OY nen respeito á orixe.
4. Peridiocidade: a función é periódica de periodo T se
$$f(x+T) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$
   Se unha función é periódica, basta con representá–la graficamente nun periodo.

   No exemplo, non existe nengún número real T tal que f sexa periódica de periodo T.
5. Discontinuidades: Trata–se de determinar os pontos de discontinuidade da función e o tipo de discontinuidade que aparece.

   No exemplo, a función apresenta no ponto $x_0 = 1$ unha discontinuidade de salto infinito.
6. Asíntotas: rectas que se cortan coa curva nalgún ponto do infinito (tamén poden ter cortes para valores reais da variable).
   (a) Horizontais: paralelas ao eixo OX. Para o seu cálculo simplesmente hai que determinar os limites da función f cando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$.
   No exemplo,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty\,,$$
   de xeito que a función non ten asíntotas horizontais (se algún dos limites fose un número real k, a función teria asíntota $y = k$).
   (b) Verticais: Paralelas ao eixo OY. Trata–se de obter os números reais β para os cais
$$\lim_{x\to\beta} f(x) = \infty\,,$$
   ou algún dos limites laterais cando $x \to \beta$.
   No exemplo, para $\beta = 1$ ten–se que
$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty\,.$$

Portanto, a recta $x = 1$ é unha asíntota vertical da función f.

(c) Oblícuas: Trata–se de obter rectas da forma $y = mx + n$.

Para o cálculo das constantes m e n simplesmente hai que ter en conta que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\,, \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)\,.$$

No exemplo,

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1\,,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1\,,$$

de xeito que a recta $y = x + 1$ é unha asíntota oblícua.

7. Intervalos de crescemento e decrescemento. Extremos. Se a función é derivable, a partir da función derivada é posible obter información sobre os intervalos de crescemento e decrescemento da función, asi como dos posibles extremos.

   No exemplo,

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\,.$$

   Daquela, $f'(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 2$. Ademais, se $x < 0$, $f'(x) > 0$ e, en consecuéncia, f é crescente. Por outra banda, se $0 < x < 1$ entón $f'(x) < 0$ e, en consecuéncia, f é decrescente. Ademais, se $1 < x < 2$ entón $f'(x) < 0$ e, en consecuéncia, f é decrescente. Finalmente, se $x > 1$, ten–se que $f'(x) > 0$ e, portanto, f é decrescente.

8. Intervalos de concavidade e convexidade. Pontos de inflexión. A derivada segunda da función contén a información relativa á concavidade e convexidade da función.

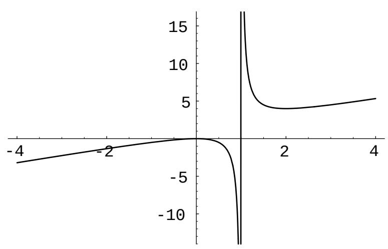
   No exemplo,

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}\,,$$

   de xeito que, se $x > 1$ entón $f''(x) > 0$ e, portanto, a función é convexa e se $x < 1$ entón $f''(x) < 0$ e, daquela, a función é cóncava.

Coa información obtida durante o estudo anterior é bastante simples facer–se unha ideia da gráfica da función f, que debera ser semellante á feita no Gráfico 38, onde non aparece a asíntota $y = x + 1$ para maior claridade.

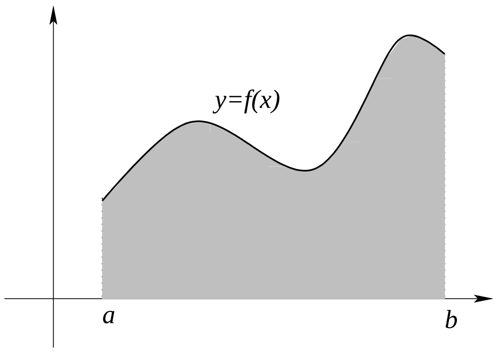
Gráfico 38. Gráfica da función $f(x) = x^2/(x-1)$.



5.2. Integrais

5.2.1. Interpretación xeométrica do integral. O conceito de integral está intimamente ligado ao problema de determinar o valor da área do trapezóide mixtilíneo delimitado pola gráfica dunha función $y = f(x)$, o eixo OX e as rectas $x = a$ e $x = b$.

GRÁFICO 39. O valor do integral $\displaystyle\int_a^b f$ está relacionado co valor da área da rexión marcada.



Xá na matemática grega estaba presente o conceito de área e coñecian–se algunhas das suas propriedades:

1. Invarianza por deslocamentos.
2. Propriedade aditiva da área.

5.2.2. Resultados fundamentais do cálculo integral.

1. Se $c \in [a, b]$ e f é integrable en $[a, b]$ entón f é integrable en $[a, c]$ e en $[c, b]$, e ademais (propriedade aditiva da área)
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$
2. Se f e g son funcións integrables en $[a, b]$, e $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, entón tamén é integrable en $[a, b]$ a función $\lambda f + \mu g$, e ademais (linearidade do integral)
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g\,.$$
3. Supoñamos que f e g son funcións integrables nun mesmo intervalo $[a, b]$, e ademais $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Entón, ten–se a seguinte relación entre os seus integrais:
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g\,.$$
4. Para cada función f integrable sobre $[a, b]$ ten–se que a función $|f|$ é integrable sobre $[a, b]$, e ademais
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

5. Se f é unha función integrable en $[a, b]$ tal que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, entón
$$m\ (b-a) \leq \int_a^b f \leq M\ (b-a)\,.$$
6. Se f e g son funcións integrables en $[a, b]$ e ademais $|g(x)| \geq \lambda > 0$, $\forall x \in [a, b]$ entón f/g é integrable en $[a, b]$.

Unha das ferramentas mais potentes do Cálculo Integral é o denominado teorema fundamental, que relaciona o Cálculo Integral co Cálculo Diferencial.

Teorema 5.2.1 (Teorema fundamental do Cálculo Integral)**.** *Sexa* $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ *unha función contínua en* $[a, b]$*. Daquela, a función*
$$G : x \in [a, b] \mapsto G(x) = \int_a^x f(s)\ ds\,,$$
é unha función contínua e derivable en cada ponto $x_0 \in [a, b]$*, e ademais,*
$$G'(x_0) = f(x_0)\,.$$

Exemplo 5.10. Pretende–se determinar os extremos relativos da función F definida por
$$F(x) = 1 + \int_0^x te^{t^2} \mathrm{d}t\,.$$
Empregando o resultado anterior, calculamos a derivadad de F con respeito a x,
$$F'(x) = xe^{x^2}\,,$$
e resolvendo a ecuación $F'(x) = 0$, obten–se que o único ponto crítico é $x_0 = 0$. Ademais,
$$F''(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}\,,$$
de xeito que
$$F''(0) = 1 > 0\,,$$
e, portanto, a función f ten no ponto $x_0 = 0$ un mínimo relativo.

Exemplo 5.11. Sexa $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función real dunha variable real contínua en $\mathbf{R}$ e periódica de período T, i.e.
$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$
Nesta situación a función $F : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definida por
$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
tamén é unha función constante. Con obxecto de probar este resultado expresamos F do seguinte xeito
$$F(x) = \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

e simplesmente derivamos F con respeito a x, resultando

$$F'(x) = -f(x) + f(x+T)\,,$$

que resulta ser cero por ser f unha función periódica de periodo T. Daquela, $F'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ e, portanto, F é unha función constante en todo $\mathbf{R}$.

Teorema 5.2.2 (Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral)**.** *Sexa $f : [a,b] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función contínua en $[a,b]$. Entón, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)\,(b-a)\,.$$

Exemplo 5.12. Pretende–se calcular o seguinte limite

$$\lim_{a\to+\infty} \int_a^{a+1} \frac{\ln(t)}{e^t}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Empregando o teorema do valor médio do cálculo integral pode–se expresar o integral do seguinte xeito

$$\int_a^{a+1} \frac{\ln(t)}{e^t} = \frac{\ln(\alpha)}{e^\alpha}(a+1-a) = \frac{\ln(\alpha)}{e^\alpha}\,,$$

onde $\alpha \in (a, a+1)$. Deste xeito, cando $a \to +\infty$ tamén α tende a $+\infty$ e o limite pedido pode ser expresado como

$$\lim_{a\to+\infty} \int_a^{a+1} \frac{\ln(t)}{e^t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\ln(\alpha)}{e^\alpha}\,,$$

que é facilmente calculable e ten por valor 0.

A denominada Regra de Barrow, tamén chamada segundo teorema fundamental do Cálculo Integral, permite calcular dun xeito simples o valor do integral dunha función f nun intervalo $[a,b]$, supoñendo o coñecimento dunha función F tal que $F'(x) = f(x)$.

Teorema 5.2.3 (Regra de Barrow)**.** *Sexan $f : [a,b] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función limitada e integrable en $[a,b]$, e F unha función tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Daquela,*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Exemplo 5.13. Con obxecto de calcular

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

xá que a derivada da función $F(x) = -\cos(x)$ é $F'(x) = \mathrm{sen}(x)$, aplicando a regra de Barrow resulta

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2\,.$$

5.2.3. Primitiva dunha función. Cálculo de primitivas. Acaba–se de ver na Regra de Barrow que o coñecimento dunha función F tal que $F'(x) = f(x)$ permite o cálculo de integrais sobre un intervalo $[a, b]$. Esta ideia dá lugar ao conceito de primitiva dunha función. Unha das partes do Cálculo Integral é precisamente o cálculo de primitivas. Nesta sección verán–se dous métodos: integración por partes e integración por mudanza de variable.

Definición 5.2.4. Di–se que $F : [a, b] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ é unha primitiva da función $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ se $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Nota 5.2.1. Se f é unha función contínua, entón (teorema fundamental do Cálculo Integral) f ten primitiva, e unha primitiva de f é

$$F : x \in [a, b] \subset \mathbf{R} \mapsto F(x) = \int_a^x f(s)\, \mathrm{d}s \in \mathbf{R}\,.$$

Nota 5.2.2. Non é difícil probar que:

1. Se F e G son primitivas de f, entón $G = F + k$, onde k é unha constante.
2. Se F é unha primitiva de f e k é unha constante, entón $G = F + k$ é unha primitiva de f.

Definición 5.2.5. Denomina–se integral indefinido de f ao conxunto de todas as primitivas de f. Dito conxunto denota–se

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Indican–se de seguido duas técnicas especialmente úteis tanto para o cálculo de primitivas como para o cálculo de integrais definidos. De feito, enuncian–se neste último caso.

Teorema 5.2.6 (Integración por partes)**.** *Sexan $f, g : [a, b] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ duas funcións derivables con derivada contínua. Daquela,*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x)\big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Demonstración. Posto que a derivada do produto de f e g se calcula mediante

$$(f\, g)' = f'\, g + f\, g'$$

resolvendo $f'\, g$ e integrando obtén–se a relación enunciada. □

Exemplo 5.14. O obxectivo do exemplo é calcular unha primitiva da función de $h(x) = \mathrm{sen}^2(x)$. Posto que

$$h(x) = \mathrm{sen}(x)\, \mathrm{sen}(x)\,,$$

no teorema de integración por partes é posible elexir

$$f(x) = \mathrm{sen}(x)\,, \quad g'(x) = \mathrm{sen}(x)\,,$$

de xeito que

$$I = \int \mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)\; + \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

onde empregando a relación fundamental de trigonometria circular

$$I = \int \mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)\; + \int 1 - \mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = x - \mathrm{sen}(x)\cos(x) + I\,,$$

de onde obtemos

$$I = \frac{x - \mathrm{sen}(x)\cos(x)}{2}\,.$$

Teorema 5.2.7 (Mudanza de variable)**.** *Sexan $f : [a,b] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función integrable en $[a,b]$ e $g : [c,d] \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función derivable, con derivada contínua e $g[c,d] \subset [a,b]$. Entón, se f é contínua na imaxe de g ou ben $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in [c,d]$, ten–se que*

$$\int_c^d f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\,d\,t\,.$$

DEMONSTRACIÓN. A proba apresentada basea–se na Regra de Barrow e na Regra da Cadeia para funcións reais dunha variable real.

Empregando a Regra de Barrow

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\,\mathrm{d}t\; = F(g(d)) - F(g(c))\,.$$

Por outra banda, empregando a Regra da Cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F \circ g)(x) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)\,,$$

para todo $x \in [c,d]$, de xeito que empregando de novo a Regra de Barrow,

$$\int_c^d f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(d)) - F(g(c))\,,$$

que conclue a demonstración. $\square$

Nota 5.2.3. Na prática pode–se proceder de dous xeitos:

1. Efectuar as operacións tal e como está enunciado o teorema de mudanza de variable, ou ben
2. calcular o integral indefinido, desfacer a mudanza de variable e valorar nos extremos.

Exercício 5.1. Coa mudanza de variable

$$x = r\,\mathrm{sen}(t)\,,$$

calcularemos o seguinte integral definido:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad r > 0\,.$$

En primeiro lugar, calculamos a relación entre dx e dt derivando na expresión da mudanza de variable

$$\mathrm{d}x = r\cos(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ademais, cando $x = 0$ entón $t = 0$ e se $x = r$ entón $t = \pi/2$. Empregando o teorema, obten–se

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2(t)}\,r\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

e xá que $\mathrm{sen}\,\alpha > 0$ cando $\alpha \in [0, \pi/2]$, resulta

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\pi/2} r^2\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \;=\; r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Este último integral é simples de calcular, por exemplo, mediante integración por partes ou empregando a seguinte relación

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\,.$$

5.2.3.1. *Primitivas de funcións racionais polinómicas.* De seguido descreben–se todos os pasos para o cálculo de integrais de funcións racionais polinómicas, i.e., integrais da forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

onde P e Q son polinómios na variable x. Por exemplo,

$$\int \frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 9x + 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x\,.$$

Posto que moitos integrais poden ser "reducidos" a integrais de funcións racionais polinómicas é moi importante ter claro como integrar este tipo de funcións, que por outra banda é completamente algorítmico.

1. O primeiro paso é estudar se é posible facer a división do numerador do integrando $P(x)$ entre o denominador do integrando $Q(x)$. Por outras palabras, se o grau de $P(x)$ é maior ou igual que o grau de $Q(x)$. Se é posible dividir, tal e como acontece no exemplo, fai–se a división e, en virtude do algoritmo de Euclides,

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,,$$

   onde, se a división está ben feita, o grau de $R(x)$ é menor estritamente que o grau de $Q(x)$, e $C(x)$ é un polinómio. No exemplo proposto,

   $$\frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 9x + 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = 3x + 2 + \frac{x - 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,.$$

   Empregando as propriedades do integral, ten–se que

   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x \;=\; \int C(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

O integral do polinómio $C(x)$ é imediato, restando tan só o integral dunha función racional polinómica onde o grau do numerador é estritamente menor que o grau do denominador. No exemplo,

$$\int \frac{3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 9x + 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x = \int 3x + 2 + \frac{x-2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3x^2}{2} + 2x + \int \frac{x-2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Cando non sexa posible efectuar a división, continua–se estudando as raíces do denominador, distinguindo catro posibles situacións. As trés primeiras teñen un tratamento similar (decomposición en fraccións elementares), mentres que para a última existe un método específico (Hermite–Ostrogradski).
   (a) Todas as raíces son reais e simples: No exemplo proposto as raíces do denominador son 1, 3 e -2, con multiplicidade todas elas 1. Fai–se a decomposición en fraccións elementares que no exemplo é
   $$\frac{x-2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}\,,$$
   i.e. unha fracción con numerador constante indeterminado por cada raiz simples. Efectuando operacións calculan–se os coeficientes A, B e C resultando no exemplo $A = 1/6$, $B = 1/10$ e $C = -4/15$. Finalmente, integran–se as fraccións elementares, sendo imediato este último paso, sen mais que lembrar a derivada da función logaritmo neperiano.
   (b) Todas as raíces son reais, algunhas múltiplas (pode haber raíces reais simples). Por exemplo, o denominador do integrando de
   $$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{(x^3 - x^2)\,(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$$
   ten por raíces $x = 0$ (dobre), $x = 1$ (simples) e $x = 2$ (triple). Fai–se a decomposición en fraccións elementares
   $$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{(x^3 - x^2)\,(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)^3}\,,$$
   i.e. para as raíces simples segue o mesmo procedimento e para as raíces múltiplas, tantas fraccións con numerador indeterminado como a multiplicidade da raiz, con denominador en grau crescente desde 1 até a multiplicidade da raiz. A continuación calculan–se os coeficientes indeterminados e finalmente integran–se as fraccións elementares, de novo imediato. É importante fixar–se que ademais dos termos logarítmicos que aparecen polas raíces reais simples, tamén aparecen termos racionais polas raíces reais múltiplas pois
   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} = \int (x-\alpha)^{-m}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-\alpha)^{1-m}}{1-m}\,, \quad m \neq 1\,.$$

(c) Contén raíces complexas simples (pode haber raíces reais simples e/ou múltiplas). Por exemplo,

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,\mathrm{d}x\,.$$

Posto que o denominador é $x^3-3x^2+7x-5=(x-1)(x^2-2x+5)$, ten raíces complexas simples. Fai–se a decomposición en fraccións elementares

$$\frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+5}\,,$$

i.e. para as raíces reais, continua o mesmo procedimento xá descrito e para cada unha das raíces complexas simples, unha fracción con numerador un polinómio de grau 1 con coeficientes indeterminados. Calculan–se os coeficientes e integran–se a fraccións elementares. Aparecerán integrais relativos ás raíces reais simples (termos logarítmicos), integrais relativos ás raíces reais múltiplas (termos logarítmicos e racionais polinómicos) e integrais relativos ás raíces complexas simples, que darán lugar á soma dunha parte logarítmica e un arco tanxente. Para a integración deste tipo de expresións, por exemplo,

$$\int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x\,,$$

comeza–se preparando para que o numerador sexa a derivada do denominador (parte logarítmica) mais unha constante dividida polo mesmo denominador (parte arco tanxente). No exemplo,

$$\int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x\;+\;\int \frac{22}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x\,.$$

O primeiro integral é imediato

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x\;=\;\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)\,,$$

restando tan só o segundo integral para rematar este caso. Prepara–se o denominador para que teña a aparéncia dunha soma do número real 1 mais unha poténcia cuadrada:

$$\int \frac{22}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x=\frac{11}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\,,$$

integral que resulta xá imediato.

(d) Contén raíces complexas múltiplas. Existe un procedimento a seguir, debido a Hermite e a Ostrogradski, que é distinto do feito nos casos anteriores.

5.3. Exercícios e problemas

Exercício 5.2. Calculen–se as derivadas das seguintes funcións nos pontos indicados

$$
\begin{aligned}
f : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto f(x) = x^2\,, \quad x_0 = 1\,,\\
g : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto g(x) = x^2\,, \quad x_0 = 0\,,\\
h : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto h(x) = |x|\,, \quad x_0 = -1\,,\\
r : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto r(x) = \operatorname{sen} x\,, \quad x_0 = 0\,,\\
s : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto s(x) = \cos x\,, \quad x_0 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Exercício 5.3. Calcule–se a ecuación da recta tanxente á curva de ecuación

$$y = x^2 - 3\,,$$

no ponto de abscisa -1.

Exercício 5.4. Calculen–se as derivadas das seguintes funcións, indicando o domínio da función e da sua derivada:

$$
\begin{aligned}
f : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto f(x) = x^2 + x^{-2} +\,,\\
g : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto g(x) = 3\,x\,\tan(x)\,,\\
h : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto h(x) = \cot^3(x)\,\ln(x) + \ln^2(x)\,\tan(x)\,,\\
r : x \in A \subset \mathbf{R} &\mapsto r(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2 + \operatorname{sen}^2(x) + \cos^4(x)}\,.
\end{aligned}
$$

Exercício 5.5. Achen–se as tanxentes a

$$f(x) = 2x^2 - x + 1$$

que son paralelas a

$$3x + y - 7 = 0\,.$$

Exercício 5.6. Achen–se os pontos da curva

$$f(x) = 2x^2 - x + 1$$

nos que a recta tanxente forma un ángulo de $\pi/4$ coa dirección positiva do eixo OX.

Exercício 5.7. Sexa

$$f(x) = x\,e^{-x}\,.$$

Comprobe–se que

$$xf'(x) = (1 - x)f(x)\,.$$

Exercício 5.8. Determine–se unha parábola do tipo

$$y = x^2 + bx + c$$

que sexa tanxente a

$$f(x) = x$$

no ponto $(1, 1)$.

Exercício 5.9. Dada a función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

achen–se as ecuacións das rectas que xon tanxentes á sua gráfica e perpendiculares á bisectriz do primeiro cuadrante.

Exercício 5.10. Calcule–se a derivada da función

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x)\,.$$

Exercício 5.11. Calcule–se a derivada das seguintes funcións, indicando o domínio da función e da derivada:

$$\begin{aligned}
g :& x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = \cos(2x)\,,\\
h :& x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x + 1}\right)^{-3}\,,\\
r :& x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto r(x) = \ln(x + 1) + \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\,.
\end{aligned}$$

Exercício 5.12. Determinen–se o domínio e os intervalos de crescemento e decrescemento das seguintes funcións

$$\begin{aligned}
f &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto f(x) = x^4\,,\\
g &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto g(x) = x^2 - 6x + 5\,,\\
h &: x \in A \subset \mathbf{R} \mapsto h(x) = \frac{x + 1}{x - 1}\,.
\end{aligned}$$

Exercício 5.13. Calculen–se os extremos relativos da función

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto f(x) = |x|\,.$$

Exercício 5.14. Entre os rectángulos de perímetro 20cm, ache–se o de maior área.

Exercício 5.15. Entre os triángulos rectángulos de hipotenusa 6, determine–se o de perímetro mínimo.

Exercício 5.16. Achen–se as dimensións do rectángulo de maior área inscrito nunha circunferéncia de 10m de ráio.

Exercício 5.17. Dada a función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c\,,$$

determinen–se os valores de a, b e c sabendo que f ten un máximo para $x = 4$, un mínimo para $x = 0$ e a sua gráfica pasa polo ponto $(1, 1)$.

Exercício 5.18. Dispón–se dun arame de 1m de lonxitude e desexa–se dividi–lo en dous trozos para construir cun deles unha circunferéncia e co outro un cadrado. Achen–se as dimensión de cada un dos trozos para que a soma das áreas sexa mínima.

Exercício 5.19. Determinen–se as asíntotas, se existir, horizontais, verticais e/ou oblícuas de

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})\,.$$

Exercício 5.20. Represente–se graficamente a función

$$f(x) = \frac{x}{2-x}\,.$$

Exercício 5.21. Represente–se graficamente a función

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Exercício 5.22. Razoe–se a verdade ou falsidade das seguintes afirmacións:

1. A función $f(x) = \tan(x)$ é crescente en todo $\mathbf{R}$.
2. A función $f(x) = \arctan(x)$ é crescente en todo $\mathbf{R}$.
3. A función $f(x) = \tan(x)$ é cóncava no seu domínio de definición.
4. A función $f(x) = \arctan(x)$ é convexa en todo $\mathbf{R}$.

Exercício 5.23. Represente–se graficamente a función

$$f(x) = x^2 e^{-x}\,.$$

Exercício 5.24. Represente–se graficamente a función

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,.$$

Exercício 5.25. Represente–se graficamente a función

$$f(x) = \ln(x^2 - 9)\,.$$

Exercício 5.26. A derivada con respeito a x da función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2+1}$ é

1. $f'(x) = 0$.
2. $f'(x) = \dfrac{\cos(x^2)2x(x^2+1) - 2x\operatorname{sen} x^2}{x^2+1}$.
3. $f'(x) = \dfrac{\cos x^2}{2x}$.
4. $f'(x) = \dfrac{2x\cos x^2}{2x} = \cos(x^2)$.

5. $f'(x) = \dfrac{\cos(x^2)2x(x^2+1) - 2x \operatorname{sen} x^2}{(x^2+1)^2}$.

Exercício 5.27. Facendo a mudanza de variable $t = \sqrt{x^2+1}$, calcule–se

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercício 5.28. Sexa $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ unha función derivable ocn derivada contínua tal que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\,, \quad f(\pi) = -5\,, \quad f'(x) = \frac{\cos(x)}{x}\,.$$

Calcule–se

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercício 5.29. Sexa D a rexión plana limitada, contida no primeiro cuadrante e limitada por $y = x$ e $y = x^2$. Calcule–se a área de D.

Exercício 5.30. Empregando o teorema do valor médio do cálculo diferencial, calcule–se o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x+a)} - e^{\operatorname{sen} a}}{\operatorname{sen}(x+a) - \operatorname{sen}(a)}\,.$$

Exercício 5.31. Determine–se a área da rexión limitada contida no primeiro cuadrante e limitada polas curvas

$$y = \frac{x^2}{2} - x + 1\,, \qquad y = x + 1$$

Exercício 5.32. Sexa D o recinto plano limitado, contido no primeiro cuadrante e limitado pola parábola

$$y = 4x - x^2\,,$$

e as rectas tanxentes á parábola nos pontos de intersección da mesma co eixo OX. Ache–se a área de D.

Exercício 5.33. Calcule–se o seguinte integral indefinido:

$$\int x^2 \operatorname{sen}\left(\ln(x)\right)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercício 5.34. Sexa $a > 0$. Demonstre–se que

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aplique–se o resultado para calcular o valor de

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

tendo en conta que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$ e $\cos^2(x) = \cos^2(\pi - x)$.

Exercício 5.35. Calculen–se os seguintes integrais de tipo racional polinómico:

$$\int \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^2 - 2x^2 - 5x + 6}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{2x - 1}{x^2(x + 2)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int \frac{3x + 1}{x^2 + x + 7}\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercício 5.36. Razoe–se a verdade ou falsidade das seguintes afirmacións:

1. Se f e g son duas funcións integrables, entón

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

2. Se f e g son duas funcións integrables, entón

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Se f e g son duas funcións integrables, entón

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Se f é unha función integrable, entón

$$\int (f(x))^3\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)^3\,.$$

TEMA 6

Números naturais e polinómios

6.1. Regras de divisibilidade

Definición 6.1.1. Un número natural $n > 1$ di–se un número primo se e só se os seus únicos divisores son o próprio número n e 1.

Nota 6.1.1. O conxunto de números primos é infinito, tal e como probou o matemático grego Euclides (300 a.C.). Os primeiros números primos son

$$2 \ \ 3 \ \ 5 \ \ 7 \ \ 11 \ \ 13 \ \ 17 \ \ 19 \ \ 23 \ \ 29 \ \ 29 \ \ 31 \ \ 37 \ \ 41 \ \ 47\,.$$

As regras de divisibilidade son métodos, mais ou menos simples, que permiten averiguar se un número natural é divisible por outro número natural mais pequeno. A continuación indican–se as regras de divisibilidade mais elementais, primeiro para certos números primos e despois para certos números que non son primos:

Proposición 6.1.2. *Un número natural é*

* *divisible por 2 se e só se a sua derradeira cifra é 0, 2, 4, 6 ou 8.*
* *divisible por 3 se e só se a soma das suas cifras é divisible por 3.*
* *divisible por 5 se e só se a sua derradeira cifra é 0 ou 5.*
* *divisible por 11 se e só se a diferenza entre a soma das cifras que ocupan un lugar par e a soma das cifras que ocupan un lugar ímpar é divisible por 11.*

Exemplo 6.1. O número 67374679 non é divisible nen por 2 nen por 5, xá que a sua derradeira cifra é 9. A soma das suas cifras é 49, que non é divisible por 3; daquela, 67374679 tampouco é divisible por 3. Ademais, como 6+3+4+7=20 e 7+7+6+9=29 e xá que 29-20=9 non é divisible por 11, resulta que 67374679 tampouco é divisible por 11.

Proposición 6.1.3. *Un número natural é*

* *divisible por 4 se e só se o número formado polas suas duas últimas cifras é divisible por 4.*
* *divisible por 6 se e só se a sua derradeira cifra é 0, 2, 4, 6, ou 8 e a soma das suas cifras é divisible por 3 (i.e., se e só se é ao mesmo tempo divisible por 2 e por 3).*
* *divisible por 9 se e só se a soma das suas cifras é divisible por 9.*
* *divisible por 10 se e só se a sua derradeira cifra é 0.*

Exemplo 6.2. O número 67374679 non é divisible por 10 porque a sua derradeira cifra non é un 0, nen tampouco é divisible por 4 xá que o número formado polas suas duas últimas cifras, 79, non é divisible por 4; tampouco é divisible por 6 porque a sua derradeira cifra é 9, nen é divisible por 9 porque a soma das suas cifras é 49, que non é divisible por 9.

En realidade, poderiamos ter aforrado esta última explicación, xá que:

67374679 non é divisible por 4 porque non é divisible por 2.
67374679 non é divisible por 6 porque non é divisible por 2 (nen por 3).
67374679 non é divisible por 9 porque non é divisible por 3.
67374679 non é divisible por 10 porque non é divisible por 2 (nen por 5).

6.2. Descomposición dun número natural en factores primos

Definición 6.2.1. Todo número natural pode–se expresar de modo único, salvo a orden, como produto de números primos. A representación dun número natural como produto de números primos chama–se descomposición ou factorización en factores primos.

Para realizar a descomposición dun número natural en factores primos (sempre que os factores primos sexan pequenos) pode–se empregar o seguinte método:

1. PASO I:
   averigua–se se o número é divisible por 2; se é, continua–se no paso seguinte (PASO II); se non o é . . . ,
   averigua–se se o número é divisible por 3; se é, continua–se no paso seguinte; se non o é . . . ,
   averigua–se se o número é divisible por 5; se é, continua–se no paso seguinte; se non o és . . . ,
   averigua–se se o número é divisible por 7; se é, continua–se no ao paso seguinte; se non o é . . . ,
   . . . .
2. PASO II: unha vez que se obtén un factor primo do número, efectua–se a división do número por tal factor primo e obten–se o cociente da división.
3. PASO III: repetimos os pasos I e II co cociente obtido no paso II.
4. PASO IV: seguimos o proceso até que o cociente obtido sexa un número primo; cando esto ocorra, o conxunto formado polo último cociente e o resto de divisores primos formarán a descomposición en factores primos do número de partida.

Exemplo 6.3. A continuación obten–se a descomposición en factores primos de 396.

O número 396 é divisible por **2** xá que a sua derradeira cifra é 6. O resultado de dividir 396 entre 2 é 198. Este cociente, 198, é de novo divisible por **2** pois a sua derradeira cifra é 8. O resultado de dividir 198 entre 2 é 99. Este novo cociente, 99, xá non é divisible por 2 (a sua derradeira cifra é 9) pero é divisible por **3** xá que a soma das suas cifras é 18, que é divisible por 3. O resultado de dividir 99 entre 3 é 33. Este novo cociente, que xá non pode ser divisible por 2, volta a ser divisible por **3** xá que a soma das suas cifras é 6, que é divisible por 3. O resultado de dividir 33 entre 3 é 11, e posto que **11** é un número primo, remata o cálculo da descomposición en factores de 396, dando como resultado

$$396 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11.$$

Na prática, as divisións fan–se mentalmente (cando sexa posible) construindo unha tabela da forma

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{396} & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

onde, á esquerda da liña escreben–se o número que se quere factorizar e, debaixo, os sucesivos cocientes que se van obtendo, e á direita escreben–se de forma ordenada, os factores primos.

Nota 6.2.1. Cando un número natural teña factores primos grandes, para achar a sua descomposición en factores primos será necesário utilizar calculadoras ou ordenadores. Por exemplo a descomposición en factores primos de 67374679 ven dada por

$$67374679 = 43 \cdot 383 \cdot 4091\,.$$

6.3. Mínimo común múltiplo e máximo común divisor

Definición 6.3.1. O mínimo común múltiplo de dous números naturais a, $b \in \mathbb{N}$, é o menor número natural que é á vez múltiplo de a e múltiplo de b. Denota–se dito número por $\mathrm{mcm}(a, b)$.

Definición 6.3.2. O máximo común divisor de dous números naturais a, $b \in \mathbb{N}$, é o maior número natural que é á vez divisor de a e divisor de b. Denota–se dito número por $\mathrm{mcd}(a, b)$.

Nota 6.3.1. Para calcular tanto o mínimo común múltiplo como o máximo común divisor de dous números naturais a, $b \in \mathbb{N}$, calculan–se en primeiro lugar as descomposicións en factores primos de a e de b;

1. o mínimo común múltiplo de ambos está dado polo produto dos factores comúns e non comúns a ambas descomposicións elevados ao maior exponente,
2. o máximo común divisor é o produto dos factores comúns a ambas descomposicións elevados ao menor exponente.

Exemplo 6.4. Calcularan–se o $\mathrm{mcm}(396, 777)$ e o $\mathrm{mcd}(396, 777)$. Posto que

$$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

calculamos a descomposición en factores primos de 777 mediante a seguinte tabela

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{777} & 3 \\ 259 & 7 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

co cal

$$777 = 3 \cdot 7 \cdot 37\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{mcm}(396, 777) &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 37 = 102564\,, \\ \mathrm{mcd}(396, 777) &= 3\,. \end{aligned}$$

6.4. Raíces dun polinómio

Definición 6.4.1. Un polinómio (ou función polinómica) de grau n na variable x con coeficientes reais é unha expresión (unha función) da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

onde os valores a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$, a_0, que se chaman coeficientes do polinómio, son números reais, sendo $a_n \neq 0$. Se $a_n = 1$, o polinómio $p(x)$ di–se mónico.

Definición 6.4.2. Sexa $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinómio de grau n. O valor de $p(x)$ nun ponto $\alpha \in \mathbb{R}$ é o número real $p(\alpha)$ que se obten ao substituir a variable x por α na expresión de $p(x)$, i.e., é o número real

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0.$$

Exemplo 6.5. O valor do polinómio $p(x) = 2x^3 + 3x - 2$ no ponto $x = 5$ é

$$p(5) = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5 - 2 = 263\,.$$

Definición 6.4.3. Un número real $\alpha \in \mathbb{R}$ di–se unha raiz (ou un cero) dun polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se e só se o valor do polinómio no ponto α é cero, i.e., se e só se $p(\alpha) = 0$.

Teorema 6.4.4 (do resto)**.** *Sexan $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinómio e $\alpha \in \mathbb{R}$. O valor do polinómio $p(x)$ no ponto α é igual ao resto da división de $p(x)$ por $x - \alpha$.*

Nota 6.4.1. Segundo o anterior, un número real α é raiz dun polinómio $p(x)$ se e só se $p(x)$ é divisible por $x - \alpha$.

Teorema 6.4.5 (de D'Alembert)**.** *Un polinomio de grau n ten, como moito, n raíces.*

A regra de Ruffini é util para dividir un polinómio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

de grau n, entre $x - \alpha$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, e está baseada nas seguintes premisas:

i) O coeficiente do primeiro termo do cociente é igual a a_n.

ii) O coeficiente de calquer outro termo do cociente obten–se multiplicando o coeficiente do termo anterior por α e somando–lle o coeficiente do termo de igual grau do dividendo.

iii) O resto da división é o resultado de multiplicar por α o último termo do cociente e somar–lle despois a_0.

iv) O grau do cociente é $n - 1$.

Exemplo 6.6. Na prática, para dividir un polinómio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

entre $x - \alpha$ utilizando a regra de Ruffini, fai–se uso dunha disposición en forma de tabela que explicamos cun exemplo.

Sexa $p(x) = 2x^3 + 3x - 2$ e dividiremos $p(x)$ entre $x - 5$. Para elo, construimos a tabela

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

en cuxa primeira fila escreben–se os coeficientes do polinómio $p(x) = 2x^3 + 3x - 2$ (teña–se en conta que o coeficiente en x^2 é cero), en cuxa segunda fila escrebe–se simplesmente, á esquerda da barra vertical, o número $\alpha = 5$ do polinómio $x - \alpha = x - 5$ polo que queremos dividir, e en cuxa terceira fila escrebe–se, no lugar indicado, o coeficiente, neste caso 2, do termo de maior grau do polinómio $p(x) = 2x^3 + 3x - 2$; convertimos dita tabela en

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & & 10 & 50 & 265 \\ \hline & 2 & 10 & 53 & \mathbf{263} \end{array}$$

despois de realizar as operacións $5 \cdot 2 = 10$, $0 + 10 = 10$, $5 \cdot 10 = 50$, $3 + 50 = 53$, $5 \cdot 53 = 265$ e $-2 + 265 = 263$. O número 263, escrito en negrita na tabela, é o resto da división de $p(x) = 2x^3 + 3x - 2$ entre $x - 5$ (e coincide, como xá foi visto antes, co valor do polinómio $p(x)$ no ponto $x = 5$, segundo o teorema do resto). O resto dos coeficientes da derradeira fila son os coeficientes do polinómio cociente $q(x) = 2x^2 + 10x + 53$ resultado de dividir $p(x)$ entre $x - 5$.

6.5. Factorización de un polinomio

Definición 6.5.1. Dado un polinomio $p(x)$ de grau n, di–se que outro polinómio $q(x)$ é un divisor próprio de $p(x)$ se $q(x)$ divide a $p(x)$ e o grau de $q(x)$ verifica que

$$0 < \text{grau}(q(x)) < n\,.$$

Definición 6.5.2. Un polinómio di–se irreducible en $\mathbb{R}$ se e só se non ten divisores próprios.

Exemplo 6.7. O polinómio x^2+1 é irreducible porque non existe nengún número real que verifique que $x^2=-1$, e portanto, x^2+1 non é divisible por nengún polinómio de grau 1.

Notemos tamén que todo polinómio de primeiro grau é irreducible.

Nota 6.5.1. Todo polinómio $p(x)$ admite unha factorización (única salvo a orden dos factores) da forma

$$p(x) = \beta\, p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ é o coeficiente do termo de maior grau de $p(x)$ e onde $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_k(x)$ son polinómios mónicos irreducibles.

Nota 6.5.2. Non existe nengún método que permita obter a factorización de calquer polinómio. Na prática, para obter a factorización dun polinómio $p(x)$, o que se fai é percurar raíces α de $p(x)$ e dividir sucesivamente por factores da forma $x-\alpha$.

Exemplo 6.8. Sexa $p(x) = 2x^4-4x^3-4x^2-4x-6$. Para calcular a factorización de $p(x)$ buscamos raíces de $p(x)$. Os divisores do termo independente son (vexa–se o Exercício 6.3) 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. O valor $\alpha = 1$ non é raiz de $p(x)$ porque $p(1) = -16 \neq 0$. Sen embargo, $\alpha = -1$ é unha raiz xá que $p(-1) = 0$. Portanto, dividimos $p(x)$ entre $x+1$; empregando a regra de Ruffini, ten–se

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -4 & -4 & -4 & -6 \\ -1 & & -2 & 6 & -2 & 6 \\ \hline & 2 & -6 & 2 & -6 & \mathbf{0} \end{array}$$

resultando que $p(x) = (x+1)(2x^3-6x^2+2x-6)$. Buscamos agora raíces do polinómio $2x^3-6x^2+2x-6$. Descartamos xá $\alpha = 1$ porque xá non era raiz de $p(x)$. Proba–se entón sucesivamente con -1, 2, e -2, que resultan non ser raíces do polinómio $2x^3-6x^2+2x-6$, e logo con 3, que é raiz porque $2\cdot 3^3 - 6\cdot 3^2 + 2\cdot 3 - 6 = 54-54+6-6 = 0$. Dividimos entón $2x^3-6x^2+2x-6$ entre $x-3$ utilizando a regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & 2 & -6 \\ 3 & & 6 & 0 & 6 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & \mathbf{0} \end{array}$$

resultando como cociente $2x^2+2$. Ora ben, $2x^2+2=2(x^2+1)$, e como xá sabemos que x^2+1 é irreducible, resulta que temos rematado os cálculos e a factorización de $p(x)$ é

$$p(x) = 2(x+1)(x-3)(x^2+1)\,.$$

6.6. Exercícios e problemas

Exercício 6.1. Descompoña–se en factores primos o número 693.

Exercício 6.2. Calculen–se $\mathrm{mcm}(392, 510)$ e $\mathrm{mcd}(392, 510)$.

Exercício 6.3. Demonstre–se, a partir da definición de raiz, que toda raiz inteira dun polinómio con coeficientes inteiros é un divisor do térmo independente.

Exercício 6.4. Calcule–se, de trés formas distintas, o valor de b para que 4 sexa raiz do polinómio $p(x) = 2x^3 - bx + 12$.

Exercício 6.5. Calcule–se a factorización dos polinómios

a) $p(x) = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 28x - 16$.
b) $p(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$.
c) $p(x) = 12x^3 + x^2 - x$.
d) $p(x) = 2x^5 - 3x^2 - x + 1$.

TEMA 7

Vectores en $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$

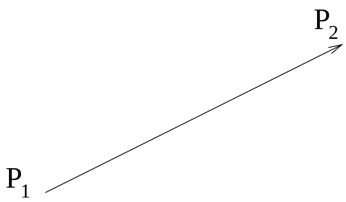
7.1. Soma de vectores y produto dun vector por un escalar

Definición 7.1.1. Un vector (no plano ou no espazo) é un par ordenado $v = (P_1, P_2)$ de pontos, ou, equivalentemente, un segmento orientado ligando o ponto P_1 co ponto P_2.

Nota 7.1.1. Nestas notas trata–se con vectores no espazo; as explicacións para vectores no plano son análogas.

Nota 7.1.2. Normalmente representa–se un vector mediante unha flecha, tal e como aparece no Gráfico 40. O ponto P_1 chama–se orixe do vector e o ponto P_2 chama–se final do vector.

Gráfico 40. Un vector é un par ordenado $v = (P_1, P_2)$ de pontos, ou, equivalentemente, un segmento orientado ligando o ponto P_1 co ponto P_2.



Definición 7.1.2. O módulo dun vector $v = (P_1, P_2)$ é a distáncia entre o ponto P_2 e o ponto P_1, denotando–se usualmente por $|v|$. Se as coordenadas dos pontos P_1 e P_2 son, respectivamente (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), entón

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

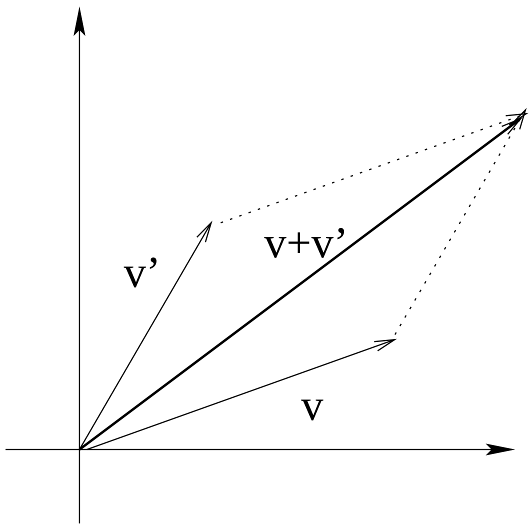
Definición 7.1.3. Se $v = (P_1, P_2)$ e $P_1 = P_2$ entón o vector v chama–se vector nulo e o seu módulo é 0. Se o módulo dun vector é igual a 1, o vector di–se unitário.

Nota 7.1.3. A partir de agora suporá–se que todos os vectores teñen como orixen a orixen de coordenadas; esto permite descreber un vector dando unicamente as coordenadas do ponto final P_2.

Definición 7.1.4. Dados dous vectores $v = (x, y, z)$ e $v' = (x', y', z')$, a sua soma é o vector

$$v + v' = (x + x', y + y', z + z')\,.$$

Gráfico 41. Representación gráfica da soma de dous vectores v e v'. O resultado $v + v'$ é o vector indicado con trazo mais preto.



Nota 7.1.4. Graficamente, a soma de dous vectores fai–se tal e como se indica no Gráfico 41.

Definición 7.1.5. Se α é un escalar real, o produto do escalar α polo vector $v = (x, y, z)$ é o vector

$$\alpha v = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)\,.$$

Nota 7.1.5. Graficamente, o produto αv é un vector coa mesma dirección que v e cuxo módulo é igual a $|\alpha||v|$. Se $\alpha > 0$, entón αv ten o mesmo sentido que v; se $\alpha < 0$ entón αv e v teñen distinto sentido.

7.2. Produto escalar

Definición 7.2.1. O produto escalar de dous vectores $v = (x, y, z)$ e $v' = (x', y'; z')$ é o escalar

$$\langle v, v' \rangle = xx' + yy' + zz'$$

Nota 7.2.1. Convén fixar–se en que o produto escalar de dous vectores non é outro vector, senón un escalar.

Nota 7.2.2. Se v e v' son dous vectores non nulos, o ángulo θ que forman as rectas definidas polas suas direccións, contado desde v até v', chamará–se ángulo que forman v e v'. Pode–se demonstrar que o produto escalar de dous vectores non nulos v e v' que forman un ángulo θ verifica que

$$\langle v, v' \rangle = |v| \cdot |v'| \cdot \cos(\theta)\,.$$

Definición 7.2.2. Se o produto escalar de dous vectores é cero dirá–se que esos vectores son ortogonais ou perpendiculares entre si.

7.3. Produto vectorial

Definición 7.3.1. O produto vectorial de dous vectores v e v' non nulos que forman un ángulo θ é un vector, denotado usualmente por $v \times v'$ ou por $v \wedge v'$, perpendicular a v e a v', de módulo igual a $|v| \cdot |v'| \cdot \operatorname{sen}(\theta)$ e cuxo sentido ven dado através da chamada regra do tirarrollas: o sentido do produto vectorial $v \times v'$ é o sentido no que se move un tirarrollas se xiramos de v até v'.

Nota 7.3.1. Posto que $\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$, o produto vectorial de dous vectores que se achen sobre a mesma recta é 0. Ademais, se v e v' son paralelos, o produto escalar $\langle v, v' \rangle$ é máximo e o produto vectorial $v \times v'$ é cero, mentres que se v e v' son perpendiculares, o produto escalar $\langle v, v' \rangle$ é cero e o módulo do produto vectorial $v \times v'$ é máximo.

Nota 7.3.2. O produto vectorial de vectores no espazo pode expresar–se tamén através dun determinante. Se i, j e k denotan os vectores unitários no sentido positivo dos trés eixos de coordenadas, i.e., se $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$, o produto vectorial de dous vectores $v = (x, y, z)$ e $v' = (x', y', z')$ é o resultado de efectuar o determinante

$$v \times v' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Exemplo 7.1. O produto vectorial dos vectores $v = (1, 1, -1)$ e $v' = (-2, 0, 3)$ é o vector

$$v \times v' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3i + 2j + 2k - 3j = 3i - j + 2k = (3, -1, 2).$$

7.4. Exercícios e problemas

Exercício 7.1. Escreban–se dous vectores unitários cuxas coordenadas sexan todas distintas de cero. Obteña–se a soma dos dous vectores e calcule–se o módulo da soma. Estude–se se o resultado é maior ou menor que 1. Estude–se se esto ocorre con calquer par de vectores unitários.

Exercício 7.2. Sexa $v = (x, y, z)$ un vector. Calcule–se o produto escalar de v por si mesmo. Ache–se a relación existente entre o produto escalar dun vector v por si mesmo e o módulo do vector.

Exercício 7.3. O produto escalar verifica, entre outras, a propriedad distributiva respeito da soma, i.e., verifica que

$$\langle v, v' + v'' \rangle = \langle v, v' \rangle + \langle v, v'' \rangle$$
$$\langle v + v', v'' \rangle = \langle v, v'' \rangle + \langle v', v'' \rangle.$$

Utilizando esta propriedade e o resultado obtido no exercício anterior, probe–se o teorema de Pitágoras.

Exercício 7.4. Analice–se se o produto vectorial verifica as propriedades comutativa e asociativa, i.e., estude–se se en xeral as expresións

$$v \times v' = v' \times v \,,$$

e

$$(v \times v') \times v'' = v \times (v' \times v'')$$

son certas.

Exercício 7.5. Estude–se se é posible achar dous vectores cuxo produto escalar e vectorial coincida.

TEMA 8

Matrices e sistemas lineares

8.1. Matrices

Definición 8.1.1. Unha matriz de tamaño $m \times n$ é un cadro rectangular de m filas e n colunas de escalares da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cando $m = n$, a matriz di–se cadrada de tamaño n ou $n \times n$.

Nota 8.1.1. O conxunto de matrices (reais) de tamaño $m \times n$ denotará–se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e o de matrices cadradas (reais) de tamaño n por $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 8.1. A continuación definen–se distintas matrices de diversos tamaños

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Nota 8.1.2. Os $m \times n$ escalares a_{ij} chaman–se coeficientes da matriz. A matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuxos coeficientes son todos iguais a cero chama–se matriz nula e denotará–se, nestas notas, por Θ. Abreviadamente, unha matriz xenérica $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota–se por

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

onde o primeiro índice, i, indica a fila, e o segundo índice, j, indica a coluna.

8.1.1. Operacións con matrices. A notación abreviada introducida anteriormente permite definir de un xeito cómodo as principais operacións con matrices.

Definición 8.1.2. Sexan $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ duas matrices do mesmo tamaño. A soma de ambas define–se como

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\,.$$

Esta definición significa que para somar duas matrices do mesmo tamaño, soman–se os coeficientes de ambas que ocupan a mesma fila e a mesma coluna.

Exemplo 8.2. As matrices A e D do exemplo anterior soman–se como segue:

$$A + D = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+4 & 1/2+2 & 7-1 \\ -2+0 & 4-4 & 3+1 & -1+1 \\ 0+0 & 1+2 & -1+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5/2 & 6 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

O resultado é unha matriz do mesmo tamaño que A e que D.

Definición 8.1.3. O produto dun escalar α por unha matriz A (operación coñecida como produto por escalares) consiste en multiplicar por α cada un dos coeficientes da matriz A. Abreviadamente, se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entón

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\,.$$

Exemplo 8.3. Se $\alpha = 2$ e A é a matriz do primeiro exemplo, entón

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 14 \\ -4 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

O resultado é unha matriz do mesmo tamaño que A.

Nota 8.1.3. Convén fixar–se en que o produto dun escalar por unha matriz sempre ten sentido, sexa cal sexa o tamaño da matriz.

O produto de matrices é unha operación mais complicada que as duas anteriores e define–se como segue:

Definición 8.1.4. O produto dunha matriz A de m filas e n colunas por unha matriz B de n filas e p colunas é unha matriz $C = AB$ de m filas e p colunas cuxo coeficiente na fila i e na coluna j é o produto escalar da fila i de A pola coluna j de B, pensadas ambas como vectores de n coordenadas.

De forma abreviada, se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, entón $C = AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ é a matriz definida por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,.$$

Exemplo 8.4. Sexan A e B as matrices do primeiro exemplo. Sexa $C = AB = (c_{ij})$. Daquela,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 11/2 & 17/2 & -1/2 \\ 10 & 14 & 8 & -7 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

onde, por exemplo

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 + (1/2)\cdot 0 + 7\cdot 0 = -1\,, \\ c_{24} &= (-2)\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 = -7\,, \\ c_{32} &= 0\cdot(-1) + 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = 4\,. \end{aligned}$$

Sen embargo, non é posible realizar o produto BA.

Nota 8.1.4. Cumpre indicar algunhas consideracións adicionais relativas ao produto de matrices:

1. Só é posible calcular un produto de matrices AB se **o número de colunas de** A **coincide co número de filas de** B.
2. O produto de matrices **non verifica a propriedade comutativa**. É para vos, posiblemente, a primeira operación sen dita propriedade comutativa. De feito, é posible, como vimos no exemplo anterior, que un produto de matrices AB teña sentido pero BA non o teña.
3. O produto de duas matrices cadradas de tamaño n sempre se pode efectuar e o seu resultado é tamén unha matriz cadrada de tamaño n. Portanto, se A, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, os produtos AB e BA teñen sentido e son matrices cadradas de tamaño n. Cumpre fixar–se que nen sequer neste caso se verifica a propriedade comutativa.
4. Outra diferenza co que ocorre co produto de números reais é a seguinte: se un produto de matrices AB é igual á matriz nula Θ, non ten por que ocurrir que $A = \Theta$ ou $B = \Theta$.

8.2. Determinantes

Definición 8.2.1. O determinante dunha matriz cadrada A é un escalar, que se denota por $\det(A)$ ou por $|A|$, asociado á matriz A do modo seguinte:

1. Se $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$ é unha matriz cadrada de tamaño 1, entón $\det(A) = a_{11}$.
2. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é unha matriz cadrada de tamaño 2, entón, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
3. Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

é unha matriz cadrada de tamaño 3, daquela

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Este resultado coñece–se como regra de Sarrus.

Até o de agora, temos definido o determinante para matrices cadradas de tamaño 1, 2 ou 3. Para definir o determinante para matrices cadradas de calquer tamaño introducimos outros dous conceitos.

Definición 8.2.2. Sexa $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ unha matriz cadrada de tamaño n. O determinante da matriz cadrada de tamaño $n-1$ obtida de A omitindo a sua fila i e a sua coluna j chama–se *menor* do coeficiente a_{ij} e denota–se M_{ij}.

O número $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ chama–se cofactor do coeficiente a_{ij}.

O determinante de A define–se entón mediante

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}\,.$$

Nota 8.2.1. A definición que demos de determinante chama–se *desenvolvimento dun determinante pola primeira fila*. Pode–se verificar que obten–se o mesmo resultado se facemos o desenvolvimento por calquer outra fila ou por calquer coluna, i.e. se $p = 1, 2, \ldots, n$ indica unha fila calquer de A e $q = 1, 2, \ldots, n$ indica unha coluna, verifica–se que

$$\det(A) = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \cdots + a_{pn}A_{pn} = a_{1q}A_{1q} + a_{2q}A_{2q} + \cdots + a_{nq}A_{nq}\,.$$

Exemplo 8.5. Se C é a matriz do primeiro exemplo, entón

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}\cdot(-2)\cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\cdot 6 - 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) = -12 - 4 = -16\,.$$

Nota 8.2.2. Xá do exemplo anterior é simples deducir que o cálculo do determinante dunha matriz é unha tarefa tediosa. Para facer mais simples o procedimento, empregan–se algunhas propriedades que verifican os determinantes, como son as seguintes:

1. Se todos os elementos dunha fila ou unha coluna da matriz son cero, o seu determinante é cero.
2. Se multiplicamos por unha constante todos os elementos dunha fila ou unha columna da matriz, o valor do determinante queda multiplicado pola constante.
3. Se α é un escalar, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

4. Se a matriz ten duas filas ou duas colunas iguais, o seu determinante é cero.
5. Se somamos a unha fila un múltiplo de outra fila ou se somamos a unha coluna un múltiplo de outra coluna, o valor do determinante non troca.
6. Se intercambiamos entre si duas filas ou se intercambiamos entre si duas colunas da matriz, o determinante muda de sinal.

Exemplo 8.6. Se no exemplo anterior, restamos á coluna 1 de C trés veces a coluna 2 obtemos

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Se agora desenvolvemos o determinante pola derradeira fila resulta

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e se somamos a primeira fila ás filas 2 e 3, desenvolvendo pola terceira coluna resulta

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ -8 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = -(8+8) = -16\,.$$

8.3. Sistemas de ecuacións lineais

Definición 8.3.1. Un sistema de ecuacións lineais (abreviadamente, un SEL) é un conxunto de m ecuacións con n incógnitas da forma

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\,, \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\,, \end{aligned}$$

onde os escalares a_{ij} e os escalares b_i, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots n$, receben o nome de coeficientes e termos independientes do SEL, respectivamente. Os valores x_1, $x_2, \ldots x_n$, chaman–se incógnitas do SEL.

Unha solución do SEL é calquer conxunto de escalares que verifique as m ecuacións do SEL.

Definición 8.3.2. Un SEL di–se incompatible se non admite nengunha solución e di–se compatible se admite algunha solución. Neste último caso, un SEL di–se determinado se ten solución única e indeterminado se ten mais de unha solución.

Nota 8.3.1. Un SEL pode–se representar de forma matricial mediante unha expresión da forma

$$Ax = b$$

onde $A = (a_{ij})$ é unha matriz de tamaño $m \times n$, $x = (x_j)$ é unha matriz de tamaño $n \times 1$ e $b = (b_i)$ é unha matriz de tamaño $m \times 1$. A matriz A chama–se matriz do SEL. A matriz

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

denomina–se matriz ampliada do SEL.

Definición 8.3.3. Chaman–se operacións elementais nas filas dunha matriz aos trés tipos de operacións seguintes:

1. Intercambiar dous filas.
2. Multiplicar unha fila por un escalar non nulo.
3. Somar a unha fila un múltiplo de outra.

Para resolver un SEL utilizaremos o chamado método de Gauss; este método está baseado no feito de que realizar operacións elementais nas filas da matriz ampliada dun SEL non altera o seu conxunto de solucións. Trata–se, portanto, de realizar operacións elementais nas filas da matriz ampliada até obter un SEL cuxo conxunto de solucións sexa simples de calcular.

Exemplo 8.7. Consideremos o SEL

$$\begin{aligned} & x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 2\,, \end{aligned}$$

cuxa matriz ampliada é

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})\,.$$

Se na matriz anterior, somamos a primeira fila á segunda fila e se restamos duas veces a primeira fila á terceira obtemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right).$$

Se, nesta nova matriz, somamos á terceira fila a segunda fila multiplicada por 3, resulta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & 9 \end{array}\right).$$

Esta última matriz dá lugar ao SEL

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4\,, \\ -\,x_2 - 2x_3 &= 5\,, \\ -\,7x_3 &= 9\,, \end{aligned}$$

cuxa solución, $x_3 = -9/7$, $x_2 = -17/7$, $x_1 = 3/7$, coincide coa solución do SEL de partida.

8.4. Exercícios e problemas

Exercício 8.1. Escreban–se, sen calcular, todos os produtos de duas matrices que se poden efectuar coas matrices do primeiro exemplo. Indiquen–se, ademais, os produtos que non se podan efectuar.

Exercício 8.2. Calculen–se, se for posible, os produtos BF e BG, sendo B, F e G as matrices dadas no primeiro exemplo.

Exercício 8.3. Ache–se unha matriz cadrada M de tamaño 4 que verifique que $MC = CM = C$ sendo C a matriz dada no primeiro exemplo.

Exercício 8.4. Achen–se duas matrices cadradas de tamaño 2 distintas da matriz nula Θ cuxo produto sea Θ.

Exercício 8.5. Resolva–se a ecuación

$$\begin{vmatrix} -3-x & -2 & -6 \\ -1 & -x & -2 \\ 2 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

Exercício 8.6. Resolva–se a ecuación seguinte na variable x,

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1+a-x & -a & a \\ 2a & 1+a & 1-a-x & a \\ 0 & -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0\,,$$

onde a é un parámetro real.

Exercício 8.7. Resolva–se o sistema de ecuacións lineais

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$
$$5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -5$$
$$x_1 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3$$