Problemas resueltos de cálculo en una variable real

EDUARDO LIZ MARZÁN

Los problemas que se incluyen en esta colección se han extraído de pruebas parciales y exámenes finales de la asignatura Cálculo I de las titulaciones de *Ingeniería de la energía* e *Ingeniería de los recursos mineros y energéticos* en la Universidad de Vigo entre los cursos 2014/2015 y 2019/2020.

Consta de 46 problemas resueltos que se han estructurado por temas, aunque muchos problemas, en especial los del bloque final, contengan preguntas relacionadas con los otros bloques.

Septiembre de 2020

Índice general

Capítulo 1
Dominio de definición e inversas de funciones

1) Se considera la función
$$g(x) = \sqrt{8x^3 - 1}\,.$$

a) Hallar el dominio de definición de g.
b) Calcular la expresión de la función inversa $g^{-1}(x)$.

Solución:

a) Denotemos por $D(g)$ el dominio de definición de g.

$$x \in D(g) \Longleftrightarrow 8x^3 - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x^3 \geq \frac{1}{8} \Longleftrightarrow x \geq \frac{1}{2}. \qquad \text{Por tanto, } D(g) = [1/2, \infty).$$

b) Calculamos la expresión de la función inversa g^{-1}:

$$g(x) = y \Longleftrightarrow \sqrt{8x^3 - 1} = y \Longleftrightarrow 8x^3 - 1 = y^2 \Longleftrightarrow x^3 = \frac{y^2 + 1}{8} \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y^2 + 1}}{\sqrt[3]{8}}.$$

En consecuencia, $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x^2 + 1}$.

2) Se considera la función
$$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}\,.$$

a) Hallar el dominio de definición de f.
b) Calcular la expresión de la función inversa f^{-1} y su dominio de definición.

Solución:

a) Denotemos por $D(f)$ el dominio de definición de f. Es claro que

$$x \in D(f) \Longleftrightarrow 1 - e^x \neq 0 \Longleftrightarrow e^x \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq 0.$$

Por tanto, $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) Calculamos la expresión de la función inversa f^{-1}:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow \frac{e^x}{1-e^x} = y \Longleftrightarrow e^x = y(1-e^x) = y - ye^x \Longleftrightarrow e^x(1+y) = y$$

$$\Longleftrightarrow e^x = \frac{y}{1+y} \Longleftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1+y}\right) = f^{-1}(y).$$

Para calcular el dominio de definición de f^{-1} observemos que

$$y \in D(f^{-1}) \Longleftrightarrow \frac{y}{1+y} > 0 \Longleftrightarrow y < -1 \text{ ó } y > 0.$$

Por tanto, $D(f^{-1}) = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

3) Se considera la función $g(x) = \ln\left(\dfrac{1-e^x}{e^x-2}\right)$.

a) Hallar el dominio de definición de g.
b) Calcular la expresión de la función inversa $g^{-1}(x)$.

Solución:

a) Denotemos por $D(g)$ el dominio de definición de g. Como el logaritmo neperiano sólo está definido para números positivos, $x \in D(g) \Longleftrightarrow \text{signo}(1-e^x) = \text{signo}(e^x-2)$.
Como $1 - e^x > 0 \Longleftrightarrow x < 0$ y $e^x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > \ln(2)$, se deduce que los dos signos coinciden cuando los dos son negativos a la vez, lo que ocurre si $0 < x < \ln(2)$. Por tanto, $D(g) = (0, \ln(2))$.

b) Calculamos la expresión de la función inversa g^{-1}:

$$g(x) = y \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1-e^x}{e^x-2}\right) = y \Longleftrightarrow \frac{1-e^x}{e^x-2} = e^y \Longleftrightarrow 1-e^x = (e^x-2)e^y = e^xe^y - 2e^y$$

$$\Longleftrightarrow e^x(1+e^y) = 1+2e^y \Longleftrightarrow e^x = \frac{1+2e^y}{1+e^y} \Longleftrightarrow x = \ln\left(\frac{1+2e^y}{1+e^y}\right) = g^{-1}(y).$$

4) Se considera la función
$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$$

a) Hallar el dominio de definición de f.
b) Determinar la expresión de la función inversa f^{-1}.

Solución:

a) Denotemos por $D(f)$ el dominio de definición de f.

$$x \in D(f) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln(x) \neq 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq e. \end{array} \right.$$

Por tanto $D(f) = (0, e) \cup (e, \infty)$.

b) Calculemos la expresión de f^{-1}:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)} = y \Longleftrightarrow 1+\ln(x) = y(1-\ln(x)) \Longleftrightarrow \ln(x)(1+y) = y-1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \ln(x) = \frac{y-1}{y+1} \Longleftrightarrow x = e^{\frac{y-1}{y+1}} = f^{-1}(y).$$

5) Se considera la función
$$f(x) = e^{(x-1)/(x+1)}\,.$$

a) Hallar el dominio de definición de f.
b) Calcular la expresión de la función inversa f^{-1}.

Solución:

a) Denotemos por $D(f)$ el dominio de definición de f.
Es claro que $x \in D(f) \Longleftrightarrow x+1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -1$. Por tanto, $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

b) Calculamos la expresión de la función inversa f^{-1}:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow e^{(x-1)/(x+1)} = y \Longleftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \ln(y) \Longleftrightarrow x-1 = (x+1)\ln(y) = x\ln(y) + \ln(y)$$
$$\Longleftrightarrow x(1-\ln(y)) = 1+\ln(y) \Longleftrightarrow x = \frac{1+\ln(y)}{1-\ln(y)} = f^{-1}(y).$$

Capítulo 2
Derivación implícita

1) Se considera la curva plana definida por la ecuación

$$yx^2 + y^2 = 1.$$

Sabiendo que la curva define implícitamente a y como función de x en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$, se pide:

a) Usar derivación implícita para calcular $y'(0)$ e $y''(0)$.

b) Razonar que la curva tiene un extremo local en el punto $(0, 1)$ e indicar si se trata de un máximo o de un mínimo.

Solución:

a) Escribiendo $y = y(x)$ y derivando la expresión $y(x)x^2 + (y(x))^2 = 1$ se obtiene:

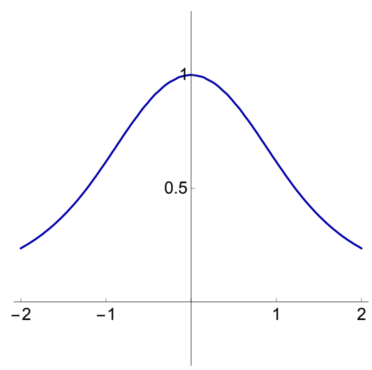
$$y'(x)x^2 + 2y(x)x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Evaluando en $x = 0$, $y(0) = 1$, se tiene que $y'(0) = 0$.
Derivando de nuevo implícitamente:

$$y''(x)x^2+2y'(x)x+2y'(x)x+2y(x)+2(y'(x))^2+2y(x)y''(x) = 0.$$

Sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ se llega a:

$$2 + 2y''(0) = 0 \Longrightarrow y''(0) = -1.$$



b) Como $y'(0) = 0$ e $y''(0) = -1 < 0$, la curva alcanza en $(0, 1)$ un máximo local. En la figura se representa el tramo de la curva que pasa por $(0, 1)$.

2) Se considera la elipse definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 - xy = 3.$$

a) Usar derivación implícita para determinar la expresión de $y'(x)$.
b) Calcular el valor más alto de y que se alcanza en los puntos de la elipse.

Solución:

a) Escribiendo $y = y(x)$ y derivando la expresión

$$x^2 + y^2(x) - xy(x) = 3,$$

se obtiene:

$$2x + 2y(x)y'(x) - y(x) - xy'(x) = 0.$$

Agrupando términos y despejando $y'(x)$, se obtiene la expresión

$$y'(x) = \frac{y(x) - 2x}{2y(x) - x}.$$

b) Para calcular el máximo de y, debemos encontrar los puntos en que $y'(x) = 0$. Usando la expresión de $y'(x)$, se obtiene:

$$y'(x) = 0 \Longleftrightarrow y(x) = 2x.$$

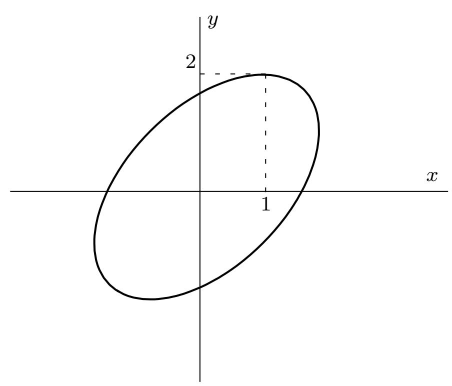
Sustituyendo $y(x) = 2x$ en la igualdad $x^2 + y^2(x) - xy(x) = 3$, tenemos:

$$x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 3 \Longleftrightarrow 3x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm 1.$$

Dado que $y(x) = 2x$:

$$x = 1 \Longrightarrow y = 2 \quad ; \quad x = -1 \Longrightarrow y = -2.$$

El valor máximo es 2 y se alcanza en el punto $(x, y) = (1, 2)$ (ver la figura).
De hecho, se puede comprobar que $y''(1) < 0$ derivando de nuevo la expresión $2x + 2y(x)y'(x) - y(x) - xy'(x) = 0$:



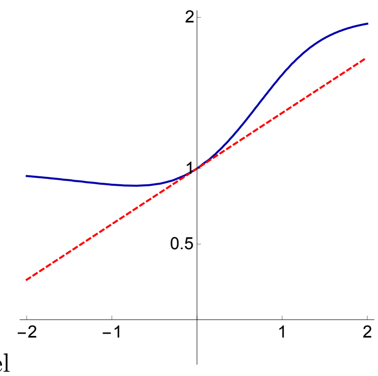
$$2 + 2(y'(x))^2 + 2y(x)y''(x) - 2y'(x) - xy''(x) = 0.$$

Sustituyendo $x = 1$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$, se llega a:

$$2 + 3y''(1) = 0 \Longrightarrow y''(1) = -2/3.$$

3) Calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $(x, y) = (0, 1)$ a la curva plana definida implícitamente por la ecuación
$$e^{xy} = e^{2x} - e^{y} + e.$$

Solución:
Escribiendo $y = y(x)$ y derivando, se obtiene:
$$(y(x) + xy'(x))e^{xy(x)} = 2e^{2x} - y'(x)e^{y(x)}.$$
Sustituyendo $x = 0$ e $y(0) = 1$, tenemos:
$$1 = 2 - y'(1)e \Longrightarrow y'(1) = \frac{1}{e}.$$
Por tanto, la ecuación de la recta tangente es
$$y = \frac{1}{e}x + 1.$$
En la figura se ilustra la curva implícita y su recta tangente en el punto $(0, 1)$.



4) Se considera la curva plana definida implícitamente por la ecuación
$$1 + x + y = e^{x-y}.$$
Sabiendo que la expresión anterior define una función $y(x)$ de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$, usar derivación implícita para probar que la curva tiene en el punto $(0, 0)$ un mínimo local.

Solución: Es claro que la curva pasa por $(0, 0)$. Escribiendo $y = y(x)$ y derivando implícitamente, se obtiene
$$1 + y'(x) = (1 - y'(x))e^{x-y(x)}.$$
Sustituyendo $x = 0$ e $y(0) = 0$, tenemos:
$$1 + y'(0) = 1 - y'(0) \Longrightarrow y'(0) = 0.$$
Derivando de nuevo la expresión $1 + y'(x) = (1 - y'(x))e^{x-y(x)}$, tenemos:
$$y''(x) = -y''(x)e^{x-y(x)} + (1 - y'(x))^2 e^{x-y(x)}.$$
Sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, se obtiene: $y''(0) = -y''(0) + 1 \Longrightarrow y''(0) = 1/2$.

Como $y'(0) = 0$, $y''(0) > 0$, la curva $y(x)$ alcanza en $(0, 0)$ un mínimo local.

5) El *folium* de Descartes es una curva plana definida implícitamente por la ecuación

$$2x^3 + 4y^3 - 9xy = 0.$$

1) Probar que la recta tangente a la curva tiene pendiente cero en el punto $P = (3/2, 3/2)$.
2) Estudiar si P es un punto de mínimo local o de máximo local de la curva.

Solución:

a) Es inmediato comprobar que la curva pasa por $P = (3/2, 3/2)$. El valor de la pendiente a la recta tangente en P es $y'(3/2)$. Escribiendo $y = y(x)$ y derivando implícitamente, se obtiene

$$6x^2 + 12(y(x))^2 y'(x) - 9y(x) - 9xy'(x) = 0.$$

Sustituyendo $x = 3/2$, $y(3/2) = 3/2$ y simplificando, se obtiene que $y'(3/2) = 0$.

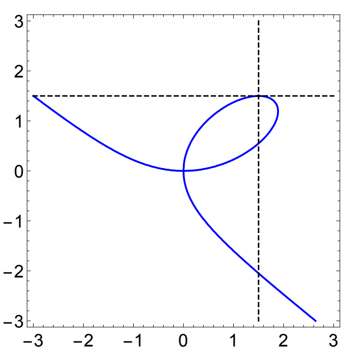
b) Derivando de nuevo la expresión $6x^2 + 12(y(x))^2 y'(x) - 9y(x) - 9xy'(x) = 0$, tenemos:

$$12x + 24y(x)(y'(x))^2 + 12(y(x))^2 y''(x) - 18y'(x) - 9xy''(x) = 0.$$

Sustituyendo $x = 3/2$, $y(3/2) = 3/2$, $y'(3/2) = 0$, se obtiene:

$$\frac{27}{2} y''(3/2) + 18 = 0 \Longrightarrow y''(3/2) = \frac{-36}{27} = \frac{-4}{3} < 0,$$

de donde se deduce que el punto P es un máximo local de la curva.
En la figura se muestra el *folium* y se ilustra la existencia de un máximo local en el punto $(3/2, 3/2)$.



Capítulo 3
Cálculo de extremos

1) Encontrar dos números reales tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

Solución: Tenemos que maximizar el producto de dos números x, y tales que $2x+3y=24$. Despejando y, se tiene

$$y = \frac{24-2x}{3}.$$

Por tanto, la función a maximizar es

$$g(x) = xy = \frac{24x-2x^2}{3}.$$

Derivando e igualando a cero, se tiene:

$$g'(x) = \frac{24-4x}{3} = 0 \Longleftrightarrow 24 = 4x \Longleftrightarrow x = 6.$$

Es un máximo de g porque $g''(x) = -4/3$ es siempre negativa. Por tanto, los números pedidos son

$$x = 6\ ,\ y = \frac{24-12}{3} = 4.$$

2) Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 4 árboles la producción de cada uno de ellos será de 60 frutos y que la producción de cada árbol disminuye en 5 frutos por cada árbol adicional plantado.
Determinar el número total de árboles que debe plantar para que la producción sea máxima y el valor de dicha producción.

Solución: El agricultor planta $(4+x)$ árboles y cada uno de ellos produce $(60-5x)$ frutos. Por tanto, la producción viene dada por la función

$$P(x) = (4+x)(60-5x) = 240+40x-5x^2.$$

Para calcular el valor máximo de la función $P(x)$, derivamos e igualamos a 0:

$$P'(x) = 40 - 10x = 0 \Longleftrightarrow 10x = 40 \Longleftrightarrow x = 4.$$

Como $P''(x) = -10 < 0$, la función P alcanza un máximo en $x = 4$, es decir, el agricultor debe plantar 4+4=8 árboles y la producción será $P(4) = 320$ frutos.

3) Dividir el intervalo $[0, 2]$ en dos trozos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de sus longitudes sea máxima. Calcular el valor de dicha suma.

Solución: Denotando la longitud de un trozo por x, el otro tiene longitud $2 - x$. Debemos calcular el valor máximo de la función $g(x) = \ln(x) + \ln(2 - x)$, que es derivable en el intervalo $(0, 2)$. Como

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2-x} = 0 \Longleftrightarrow x = 2 - x \Longleftrightarrow x = 1 \quad ; \quad g''(1) = -2 < 0,$$

la función g alcanza un máximo en $x = 1$. Para $x = 1$ la suma de los logaritmos neperianos de las longitudes es $g(1) = \ln(1) + \ln(1) = 0$.

4) Se considera la función $h(x) = 1/x$

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto $(a, h(a))$ para cada valor de $a > 0$.

b) Hallar los puntos de corte de dicha recta tangente con los ejes coordenados.

c) Determinar el valor de $a > 0$ que hace mínima la longitud del segmento que une los puntos de corte.

Solución:

a) La derivada de $h(x) = 1/x$ es $h'(x) = -1/x^2$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto $(a, h(a))$ es

$$y - h(a) = h'(a)(x - a) \Longleftrightarrow y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x - a) \Longleftrightarrow y = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

b) Los puntos de corte con los ejes se obtienen tomando $x = 0$ e $y = 0$ en la ecuación de la recta tangente:

$$x = 0 \Longrightarrow y = 2/a$$

$$y = 0 \Longrightarrow x = 2a.$$

Por tanto, los puntos de corte son $A = (2a, 0)$ y $B = (0, 2/a)$.

c) Para cada valor de $a > 0$, la longitud del segmento que une A y B es

$$l(a) = |B - A| = |(2a, 0) - (0, 2/a)| = |(2a, -2/a)| = \left(4a^2 + \frac{4}{a^2}\right)^{1/2}.$$

Minimizar la función $l(x) = \left(4x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$ es equivalente a minimizar su cuadrado, y por tanto podemos considerar la función

$$L(x) = (l(x))^2 = 4x^2 + \frac{4}{x^2}.$$

Derivando e igualando a cero, se obtiene:

$$L'(x) = 0 \iff 8x - \frac{8}{x^3} = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Como x debe ser positivo, el único punto válido es $x = 1$. Dado que $L''(x) = 8 + 24/x^4$, se obtiene que $L''(1) > 0$ y por tanto L alcanza un mínimo en $x = 1$.
Finalmente, el valor de a que hace mínima la longitud es $a = 1$, con $l(1) = \sqrt{8}$.

5) Se considera la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = xe^{-x}$. Calcular el valor de la pendiente mínima que puede tener una recta tangente a la gráfica de g.

Solución: Las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de g son los valores de $g'(x)$. Por tanto, para localizar el mínimo valor de la pendiente, derivamos $g'(x)$ e igualamos a 0. Las derivadas sucesivas de $g(x) = xe^{-x}$ son

$$g'(x) = (1-x)e^{-x} \quad ; \quad g''(x) = (x-2)e^{-x} \quad ; \quad g'''(x) = (3-x)e^{-x}.$$

Como $g''(x) = 0 \iff x = 2$ y $g'''(2) = e^{-2} > 0$, g' alcanza su valor mínimo en $x = 2$ y la pendiente mínima es

$$m = g'(-2) = -e^{-2} = \frac{-1}{e^2}.$$

6) Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud del segundo trozo sea el doble de la del primero y tal que, al construir un cuadrado con cada uno de los trozos de hilo, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Hallar la longitud de cada trozo.

Solución: Si denotamos por x la longitud del primer trozo, la del segundo es $2x$ y la del tercero es $140 - 3x$.
La función a minimizar es la suma de las áreas de los cuadrados. Como cada uno de ellos tiene arista $l/4$, donde l es la longitud del trozo de hilo, la función objetivo es

$$F(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(5x^2 + (140-3x)^2\right).$$

Derivando e igualando a cero, se tiene:

$$F'(x) = \frac{28x - 840}{16} = 0 \iff x = \frac{840}{28} = \frac{210}{7} = 30.$$

Es un mínimo de F porque $F''(x) = 28/16$ es siempre positiva. Por tanto, las longitudes de cada trozo son (en metros):

$$l_1 = x = 30\ ,\ l_2 = 2x = 60\ ,\ l_3 = 140 - 3x = 50.$$

Capítulo 4
Regla de L'Hôpital

1) Usar la regla de L'Hôpital para calcular el valor de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$.

Solución:
Ambas son indeterminaciones del tipo $0/0$, de modo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to \pi/2}\left(1-\frac{1}{2\operatorname{sen}(x)}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2) Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x-1)e^x$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\operatorname{sen}(x)}$

Solución:

a) Se trata de una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$. Pasamos e^x al denominador para transformarla en ∞/∞ y aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

b) Se trata de una indeterminación del tipo 0/0. Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\,\mathrm{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\,\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{sen}(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\,\mathrm{sen}(x)}=\frac{-1}{2}.$$

3) Calcular el valor del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{1-x-e^{-x}}.$$

Solución:
Se trata de una indeterminación del tipo 0/0. Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{1-x-e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1/(x+1)}{-1+e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(x+1)^2}{-e^{-x}}=-1.$$

4) Calcular el siguiente límite usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{1-\cos(x)}.$$

Solución: Se trata de una indeterminación del tipo 0/0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+[x/(x+1)]}{\mathrm{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[1/(x+1)]+\left[1/(x+1)^2\right]}{\cos(x)}=2.$$

Hemos encontrado otra indeterminación del tipo 0/0 y hemos vuelto a aplicar la regla de L'Hôpital.

5) Calcular los valores de λ y μ para los cuales se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lambda\cos(x)+\mu\,\mathrm{sen}(\lambda x)-2}{x}=1.$$

Solución: En primer lugar observemos que

$$\lim_{x\to 0}\lambda\cos(x)+\mu\,\mathrm{sen}(\lambda x)-2=\lambda-2.$$

Si $\lambda-2\neq 0$ entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lambda\cos(x)+\mu\,\mathrm{sen}(\lambda x)-2}{x}=\pm\infty.$$

Por tanto, $\lambda = 2$. Sustituyendo este valor, se obtiene una indeterminación del tipo $0/0$, de modo que el límite se puede calcular aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) + \mu \operatorname{sen}(2x) - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}(x) + 2\mu\cos(2x)}{1} = 2\mu.$$

Finalmente, $2\mu = 1 \Longrightarrow \mu = 1/2$.

6) Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + \lambda \operatorname{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcular el valor de λ y el del límite.

Solución: Al ser una indeterminación del tipo $0/0$, aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + \lambda \operatorname{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\operatorname{sen}(x) + \lambda\cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\lambda+1)\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)}{3x^2}.$$

Si $\lambda + 1 \neq 0$ entonces el límite es infinito. Por tanto, $\lambda = -1$.

Sustituyendo el valor de $\lambda = -1$, simplificando y aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen}(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{3} = \frac{-1}{3}.$$

7) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}$. Sabiendo que la gráfica de g tiene en 0 un punto de inflexión, calcular $g(0)$ para que se cumpla la igualdad

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + g(-x) - 2g(0)\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)} = 1.$$

Solución: Utilizando que g, g' y g'' son continuas en 0 y aplicando la regla de L'Hôpital dos veces (a indeterminaciones del tipo $0/0$), se obtiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + g(-x) - 2g(0)\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - g'(-x) + 2g(0)\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x) + 2x\cos(2x)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{g''(x) + g''(-x) + 2g(0)\cos(x)}{4\cos(2x) - 4x\operatorname{sen}(2x)} = \frac{2g''(0) + 2g(0)}{4}.\end{aligned}$$

Como g tiene en 0 un punto de inflexión, $g''(0) = 0$ y por tanto: $2g(0)/4 = 1 \Longrightarrow g(0) = 2$.

8) Calcular los valores de a y b para los que se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{ax^3 + b} = 1.$$

Solución:

En primer lugar, $b = 0$ porque en caso contrario el límite sería cero. Sustituimos $b = 0$ en la expresión y aplicamos tres veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{ax^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3ax^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{6ax} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{6a} = \frac{-1}{6a}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{ax^3 + b} = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{-1}{6}\ ,\ b = 0.$$

Capítulo 5
Localización de ceros de funciones

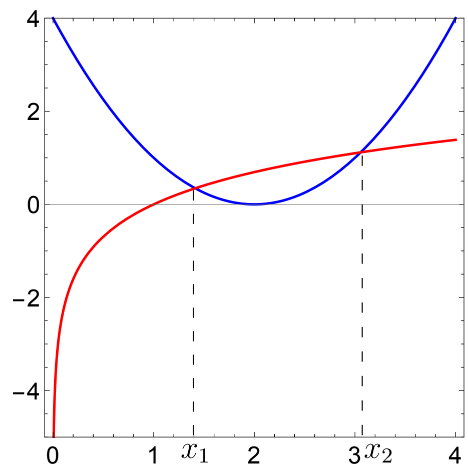
1) Se considera la ecuación $(x-2)^2 = \ln(x)$, $x > 0$.

a) Esbozar las gráficas de $f_1(x) = (x-2)^2$ y $f_2(x) = \ln(x)$ para visualizar gráficamente las soluciones de la ecuación.

b) Probar analíticamente que la ecuación tiene exactamente dos soluciones positivas y acotarlas en intervalos de longitud uno.

Solución:

a) La gráfica de $f_1(x) = (x-2)^2$ es una parábola con vértice en $(2,0)$ (en azul en la figura) y la gráfica de $f_2(x) = \ln(x)$ es creciente, con una asíntota vertical en $x = 0$ por la derecha (en rojo en la figura). Gráficamente se observa que hay dos puntos de corte en x_1, x_2, que son las soluciones de la ecuación $(x-2)^2 = \ln(x)$.



b) Consideramos la función $h(x) = (x-2)^2 - \ln(x)$, de modo que las soluciones de la ecuación $(x-2)^2 = \ln(x)$ son los ceros de h. En primer lugar probamos que h no puede tener más de dos ceros. La función h es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $(0,\infty)$. Derivando dos veces h, se obtiene:

$$h'(x) = 2(x-2) - \frac{1}{x} \quad ; \quad h''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Es evidente que h'' es positiva y por tanto no tiene ceros. Una aplicación del Teorema de Rolle permite deducir que h no puede tener más de dos ceros.
A continuación usamos el Teorema de Bolzano para acotar las soluciones (los ceros de h) en intervalos de longitud 1. Calculamos los valores en los enteros a partir de 1:

$$h(1) = 1 > 0\ ,\ h(2) = -\ln(2) < 0\ ,\ h(3) = 1 - \ln(3) < 0\ ,\ h(4) = 4 - \ln(4) > 0\,.$$

Teniendo en cuenta los cambios de signo, existen dos ceros de h: $x_1 \in (1,2)$, $x_2 \in (3,4)$.

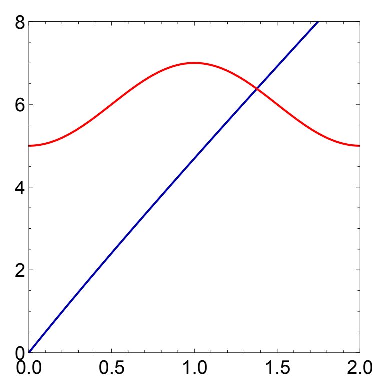
2) Dos partículas siguen trayectorias planas. La primera se mueve a partir del punto $(0,5)$ siguiendo la curva $y = 6 - \cos(\pi x)$, $x > 0$, y la segunda parte de $(0,0)$ siguiendo la curva $y = 4x + \ln(x+1)$, $x > 0$. Probar que las dos trayectorias se cortan en un único punto (x_1, y_1) y acotar el valor de x_1 en un intervalo de longitud 1.

Solución: Las trayectorias se cortan en un punto (x,y) si $6 - \cos(\pi x) = 4x + \ln(x+1)$. Se define la función
$$h(x) = 6 - \cos(\pi x) - 4x - \ln(x+1),$$
de modo que las abscisas de los puntos de corte de las trayectorias se corresponden con los ceros de h. La derivada de h es
$$h'(x) = \pi \operatorname{sen}(\pi x) - 4 - \frac{1}{x+1} \leq \pi - 4 < 0,\ \forall x > 0.$$

Por tanto, el teorema de Rolle garantiza que h no puede tener más de un cero. Usamos el teorema de Bolzano para probar que existe y acotarlo. Como

$$h(0) = 5 > 0 \quad ; \quad h(1) = 3 - \ln(2) > 0 \quad ; \quad h(2) = -3 - \ln(3) < 0\,,$$

se deduce que existe $x_1 \in (1,2)$ tal que $h(x_1) = 0$. El punto $(x_1, 6 - \cos(\pi x_1))$ es el único punto de corte de las trayectorias. En la figura se muestran las gráficas de $f_1(x) = 6 - \cos(\pi x)$ (en rojo) y $f_2(x) = 4x + \ln(x+1)$ (en azul).



3) Probar que la ecuación $(x-1)^2 = \sqrt{x}$ tiene exactamente 2 soluciones positivas y acotarlas en intervalos de longitud uno.

Solución:
Se define la función $h(x) = (x-1)^2 - \sqrt{x}$, de modo que los ceros de h son las soluciones de $(x-1)^2 = \sqrt{x}$.

En primer lugar, observemos que

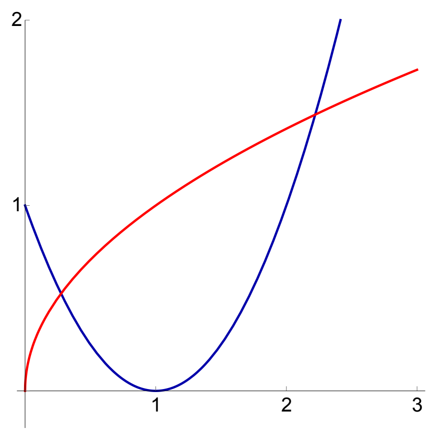
$$h'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad h''(x) = 2 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Es claro que $h''(x) > 0$, $\forall\, x > 0$ y por tanto h no tiene ceros en $(0,\infty)$. Una aplicación del teorema de Rolle garantiza que f no puede tener más de dos ceros en $(0,\infty)$.

En segundo lugar utilizamos el teorema de Bolzano para garantizar que h tiene exactamente dos ceros en $(0,\infty)$ y los acotamos en intervalos de longitud uno:

$$\left\{\begin{array}{l} h(0) = 1 > 0 \\ h(1) = -1 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, x_1 \in (0,1) \,/\, h(x_1) = 0 \ ; \ \left\{\begin{array}{l} h(2) = 1 - \sqrt{2} < 0 \\ h(3) = 4 - \sqrt{3} > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, x_2 \in (2,3) \,/\, h(x_2) = 0.$$

Por tanto, las dos soluciones positivas de la ecuación $(x-1)^2 = \sqrt{x}$ están en los intervalos $(0,1)$ y $(2,3)$. En la figura se muestran las gráficas de $f(x) = (x-1)^2$ (en azul) y $g(x) = \sqrt{x}$ (en rojo).



Capítulo 6
Estudio de funciones y polinomio de Taylor

1) Se considera la función
$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

a) Hallar el dominio de definición de f y probar que f es creciente en dicho dominio.
b) Calcular las asíntotas verticales a la gráfica de f y esbozar dicha gráfica.
c) Justificar la existencia de la función inversa f^{-1} y determinar su expresión.
d) Hallar el dominio de definición de f^{-1} y esbozar su gráfica.

Solución:

a) Denotemos por $D(f)$ el dominio de definición de f.

$$x \in D(f) \Longleftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (-1,1),$$

ya que $(-1,1)$ es el único intervalo donde $1+x$ y $1-x$ tienen el mismo signo. Por tanto $D(f) = (-1,1)$. Como f es derivable, para probar que f es creciente basta demostrar que su derivada es positiva en $D(f)$. Derivando y simplificando se obtiene que

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0,\ \forall\, x \in (-1,1).$$

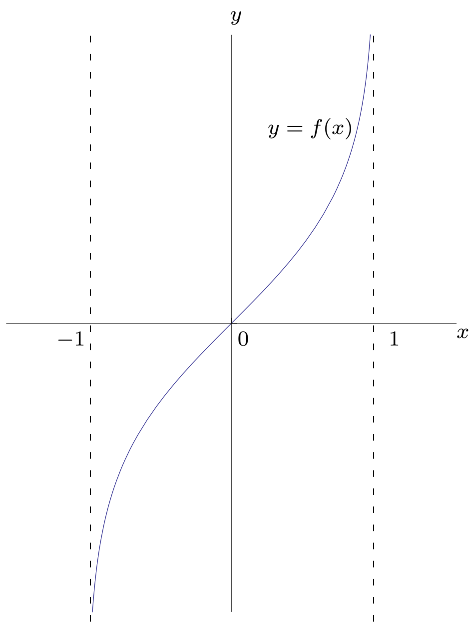
b) Puede haber asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$. Calculamos los límites laterales donde tienen sentido:

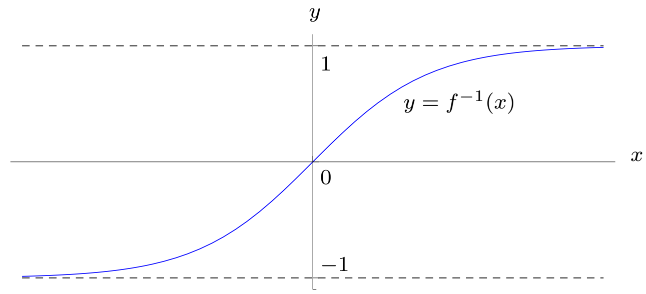
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1+x}{1-x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \infty$$

Por tanto $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales a la gráfica de f.
Teniendo en cuenta las asíntotas verticales, que f es creciente y que $f(0) = 0$, la gráfica es la que aparece en la figura a la izquierda. (No es difícil comprobar que hay un punto de inflexión en $(0,0)$ ya

que $f''(x) = 2x/(1-x^2)^2$.)





c) La función inversa f^{-1} existe porque f es estrictamente creciente. Calculemos su expresión:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Longleftrightarrow e^{2y}(1-x) = (1+x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow e^{2y} - 1 = x(e^{2y}+1) \Longleftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = f^{-1}(y).$$

d) Es claro que $D(f) = \mathbb{R}$. La gráfica de f^{-1} es simétrica respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de f. Está esbozada a la derecha de la de f en la figura. Nótese que las rectas $y = -1$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales de la gráfica de f^{-1}.

2) Se considera la función $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

a) Hallar el dominio de definición $D(f)$ y las asíntotas verticales de la gráfica de f.

b) Probar que f alcanza un máximo global en $x = 0$ y representar de forma aproximada la gráfica de f.

c) Se define la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x^2} & \text{si } x \in D(f),\ x \neq 0; \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

c.1) Determinar el valor de a para que g sea continua en 0.

c.2) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en 0 y utilizarlo para aproximar $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} g(x)\,dx$.

Solución:

a) Como el logaritmo está definido únicamente para números reales positivos:

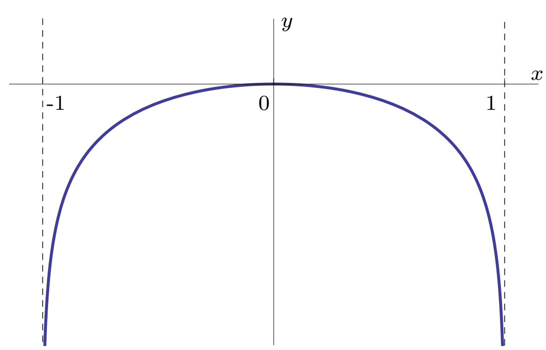
$$x \in D(f) \Longleftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x^2 < 1 \Longleftrightarrow x \in (-1, 1).$$

El dominio de definición es $D(f) = (-1, 1)$.
Como f es continua en $(-1, 1)$, las únicas asíntotas verticales pueden ser $x = -1$ y $x = 1$. Dado que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, se tiene que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln(1 - x^2) = -\infty\ ; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \ln(1 - x^2) = -\infty$$

Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la gráfica de f.

b) La derivada primera de f es $f'(x) = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$. Para $x \in (-1, 1)$, se obtiene que $1 - x^2 > 0$ y por tanto $f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 0)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 1)$. En consecuencia, f es estrictamente creciente en $(-1, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1)$. Esto implica que f alcanza un máximo global en $(0, 0)$. La gráfica de f se esboza en la figura.



c.1) Para que g sea continua en $x = 0$, $g(0)$ debe coincidir con $\lim_{x\to 0} g(x)$. Como es una indeterminación del tipo $0/0$, usamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{2x(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1-x^2} = -1.$$

Por tanto g es continua en $0 \iff a = -1$.

c.2) Ya sabemos que $f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$. Derivando de nuevo y simplificando se obtiene

$$f''(x) = \frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Por tanto, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$ y el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en 0 es

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -x^2.$$

Utilizando el polinomio $p(x)$ como aproximación de f, se tiene:

$$\int_{-1/2}^{0} g(x)\,dx = \int_{-1/2}^{0} \frac{f(x)}{x^2}\,dx \approx \int_{-1/2}^{0} \frac{p(x)}{x^2}\,dx = \int_{-1/2}^{0} (-1)\,dx = \frac{-1}{2}.$$

3) Se considera la función $f : (-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \ln(1 + \operatorname{sen}(x))$.

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y determinar los máximos y mínimos locales.

b) Hallar las asíntotas verticales de la gráfica de f y dibujar de forma aproximada dicha gráfica.

c) Sabiendo que uno de los siguientes es el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en $x_0 = 0$, razonar cuál es sin calcular $f''(x)$ (descartar los que no pueden serlo).

$$\text{(i) } p(x) = x - \frac{x^2}{2} \qquad \text{(ii) } q(x) = x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{(iii) } r(x) = \frac{x^2}{2} \qquad \text{(iv) } s(x) = -\frac{x^2}{2}.$$

Deducir el valor de $f''(0)$.

d) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Solución:

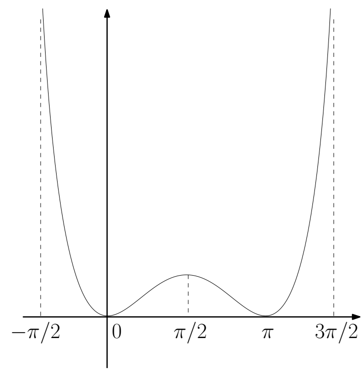
a) Aplicando la regla de la cadena y simplificando obtenemos que

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}.$$

Como $f'(x) = 0 \iff \cos(x) = 0$ o $\operatorname{sen}(x) = 0$, los puntos críticos de la función f en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ son 0, $\pi/2$ y π.

Teniendo en cuenta que $1 + \operatorname{sen}(x) > 0$ para $x \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ y los signos del seno y el coseno de x en los intervalos $(-\pi/2, 0)$, $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$ y $(\pi, 3\pi/2)$, se tiene:

$$\begin{aligned} x \in (-\pi/2, 0) &\Longrightarrow f'(x) < 0, \\ x \in (0, \pi/2) &\Longrightarrow f'(x) > 0, \\ x \in (\pi/2, \pi) &\Longrightarrow f'(x) < 0, \\ x \in (\pi, 3\pi/2) &\Longrightarrow f'(x) > 0. \end{aligned}$$



Por tanto, f es decreciente en $(-\pi/2, 0) \cup (\pi/2, \pi)$ y creciente en $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$. De aquí se deduce que f alcanza un máximo local en $x = \pi/2$ y sendos mínimos locales en $x = 0$ y $x = \pi$. Los valores son

$$f(\pi/2) = 1 - \ln(2) \quad , \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

b) Las rectas $x = -\pi/2$ y $x = 3\pi/2$ son asíntotas verticales a la gráfica de f ya que

$$\lim_{x \to -\pi/2} f(x) = \lim_{x \to 3\pi/2} f(x) = \infty.$$

La forma aproximada de la gráfica de f se muestra en la figura.

c) El polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en 0 es $p_2(x) = f(0) + f'(0)\, x + (f''(0)/2)x^2$.

Por una parte, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$, con lo que $p_2(x)$ no puede ser ni $p(x)$ ni $q(x)$. Por otra parte, como f alcanza un mínimo local en 0, necesariamente $f''(0) \geq 0$, lo que descarta a $s(x)$.
En consecuencia, $p_2(x) = r(x) = x^2/2$ y por tanto $f''(0) = 1$.

d) Como $f(0) = f'(0) = 0$, usamos la regla de L'Hôpital dos veces para resolver las indeterminaciones del tipo 0/0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

4) Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Probar que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ y calcular $f'(0)$.
b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $g(x) = e^x$ centrado en $x_0 = 0$ y utilizarlo para aproximar el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Solución:

a) En primer lugar probamos que f es continua. Para $x \neq 0$, f es continua por ser cociente de funciones continuas y no haber puntos distintos de cero donde se anule el denominador. La continuidad en $x = 0$

se deduce de la siguiente igualdad, donde hemos usado la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1 = f(0).$$

Por otra parte, f es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}.$$

Como antes, f' es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Finalmente, aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ y $f'(0) = 1/2$.

b) Para $g(x) = e^x$, se obtiene inmediatamente que $g'(x) = g''(x) = g'''(x) = e^x$. El polinomio de Taylor de grado 3 de g centrado en $x_0 = 0$ es

$$p(x) = g(0) + g'(0)\,x + \frac{g''(0)}{2}\,x^2 + \frac{g'''(0)}{6}\,x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\,.$$

Sustituyendo e^x por $p(x)$, se obtiene la siguiente aproximación:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{1} \frac{p(x)-1}{x}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{19}{9} \approx 2,11.$$

5) Se considera la función real $f(x) = 1 - 3/x + 4/x^3$.

a) Calcular el dominio de definición de f.

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus extremos locales.

c) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

d) Calcular las asíntotas horizontales y verticales de f y esbozar su gráfica.

e) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en $x_0 = 1$ y utilizarlo para aproximar el valor de $f(1.1)$.

Solución:

a) La función f está definida en todos los números reales excepto en $x = 0$, de modo que su dominio es $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{12}{x^4}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $x \neq 0$, $f'(x) = 0 \iff x^4 = 4x^2 \iff x = \pm 2$.

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento consideramos los intervalos donde f' puede cambiar de signo: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Se comprueba que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup$

$(2,\infty)$ y $f'(x) < 0$ en $(-2,0)\cup(0,2)$. Por tanto, f es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ y decreciente en $(-2,0)\cup(0,2)$.
En consecuencia, f alcanza un máximo local en $x=-2$ y un mínimo local en $x=2$.

c) La derivada segunda de f es

$$f''(x) = \frac{-6}{x^3} + \frac{48}{x^5}.$$

De nuevo teniendo en cuenta que $x \neq 0$, $f''(x) = 0 \iff x^5 = 8x^3 \iff x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.

Analizando los signos de f'' en los intervalos $(-\infty,-2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},0)$, $(0,2\sqrt{2})$ y $(2\sqrt{2},\infty)$, se tiene que f es convexa en $(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(0,2\sqrt{2})$ y cóncava en $(-2\sqrt{2},0)\cup(2\sqrt{2},\infty)$.
En consecuencia, f tiene sendos puntos de inflexión $x=-2\sqrt{2}$ y $x=2\sqrt{2}$.

d) La recta $y=1$ es una asíntota horizontal a la gráfica de f en $-\infty$ y en ∞ ya que

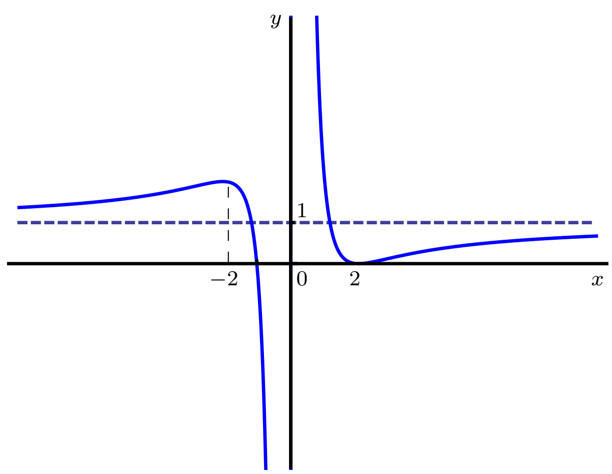
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

Por otra parte, la recta $x=0$ es una asíntota vertical a la gráfica de f ya que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3} = \infty.$$

En base al análisis previo y teniendo en cuenta que $f(x)=0 \iff x=-1$ ó $x=2$ y que los valores en los extremos locales son $f(-2)=2$, $f(2)=0$, la representación aproximada de la gráfica de f es la que se muestra en la figura:



e) El polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en 1 es

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)\ (x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = 2 - 9\ (x-1) + 21(x-1)^2.$$

Por tanto, podemos aproximar

$$f(1.1) \approx p_2(1.1) = 2 - 0.9 + 0.21 = 1.31.$$

6) Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

a) Calcular el dominio de definición de f.
b) Calcular las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de f.
c) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de $g(x) = x\ln(x)$ centrado en $x = 1$ y utilizarlo para aproximar el valor de $f(1/2)$.

Solución:

a) Un número real x está en el dominio de definición de f si el logaritmo está bien definido, es decir, $x > 0$, y el denominador no se anula. Como $x \neq 0$,

$$x\ln(x) \neq 0 \iff \ln(x) \neq 0 \iff x \neq 1.$$

Por tanto, $D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$.

b) La única posible asíntota horizontal de f se obtiene calculando el límite en infinito.

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ln(x)} = 0.$$

Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en infinito.
Teniendo en cuenta que f es continua en su dominio de definición, las posibles asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = 1$.
Usamos la regla de L'Hôpital para calcular el límite por la derecha de f en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty.$$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de f por la derecha.
Finalmente, calculamos los límites laterales de f en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x\ln(x)} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\ln(x)} = \infty,$$

ya que $\ln(1) = 0$ y $\ln(x)$ toma valores negativos a la izquierda de 1 y positivos a la derecha.
Así, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la gráfica de f por ambos lados.

c) Las derivadas sucesivas hasta orden 3 de $g(x) = x\ln(x)$ son

$$g'(x) = 1 + \ln(x)\ ,\ g''(x) = \frac{1}{x}\ ,\ g'''(x) = \frac{-1}{x^2}\ .$$

El polinomio de Taylor de grado 3 de g centrado en $x_0 = 1$ es

$$p(x) = g(1) + g'(1)\,(x-1) + \frac{g''(1)}{2}\,(x-1)^2 + \frac{g'''(1)}{6}\,(x-1)^3 = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3\,.$$

Sustituyendo $g(x)$ por $p(x)$, se obtiene la siguiente aproximación:

$$f(1/2) = \frac{1}{g(1/2)} \approx \frac{1}{p(1/2)} = \frac{-48}{17}.$$

7) Se considera la función real $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.

a) Calcular el dominio de definición de f.
b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus extremos locales.
c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la gráfica de f.
d) Calcular las asíntotas horizontales y verticales de f y esbozar su gráfica.

Solución:

a) La función f está definida en todos los números reales excepto en $x = -1$, donde se anula el denominador. Por tanto su dominio de definición es $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

b) La derivada primera de f es

$$f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

Es evidente que $f'(x) > 0$ si $x > 0$ y $f'(x) < 0$ si $x < 0$. Por tanto, f es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y creciente en $(0,\infty)$.
En consecuencia, el único extremo local de f se alcanza en $x = 0$ y es un mínimo local.

c) Derivando la expresión de f' y simplificando se obtiene que

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)e^x}{(1+x)^3}.$$

Como el numerador es siempre positivo y el denominador es negativo para $x < -1$ y positivo para $x > -1$, se tiene que f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, \infty)$.

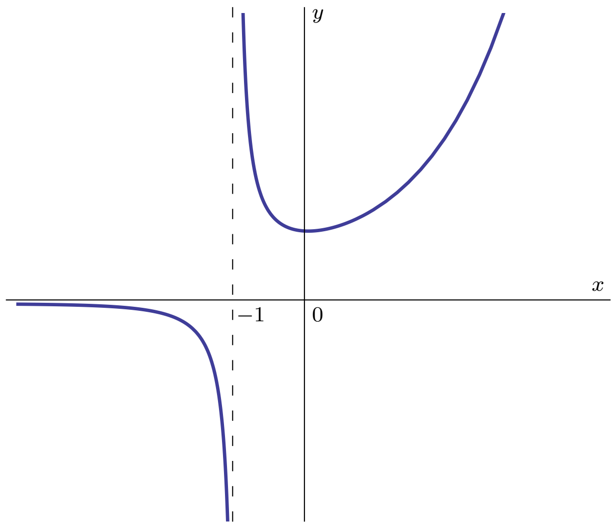
d) Para calcular las asíntotas horizontales a la gráfica de f, calculamos los límites en $-\infty$ y $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

En el primer límite hemos tenido en cuenta que el numerador tiende a 0 y el denominador tiende a $-\infty$. En el segundo hemos aplicado la regla de L'Hôpital. En consecuencia, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal a la gráfica de f en $-\infty$
Por otra parte, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f por la izquierda y por la derecha ya que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{e^x}{1+x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{e^x}{1+x} = \infty.$$

En base al análisis previo y teniendo en cuenta que $f(0) = 1$ y f es negativa en $(-\infty, -1)$ y positiva en $(-1, \infty)$, la representación aproximada de la gráfica de f es la que se muestra en la figura:



8) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ cuyo polinomio de Taylor de grado 2 centrado en 0 es $p(x) = 1 - x^2$.
a) Probar que f alcanza en 0 un extremo local e indicar si es máximo o mínimo.
b) Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en 0 de la función $g(x) = e^{1-f(x)}$.

Solución:

a) El polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en 0 es

$$p(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 - x^2.$$

Por tanto, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$, de donde se deduce que f alcanza en 0 un máximo local.

b) Las derivadas primera y segunda de $g(x) = e^{1-f(x)}$ son

$$g'(x) = -f'(x)e^{1-f(x)} \quad ; \quad g''(x) = \left(-f''(x) + (f'(x))^2\right) e^{1-f(x)}.$$

Teniendo en cuenta estas expresiones y que $g(x) = e^{1-f(x)}$:

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \\ f''(0)=-2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(0)=1 \\ g'(0)=0 \\ g''(0)=2. \end{array}\right.$$

Por tanto el polinomio de Taylor de grado 2 de g centrado en 0 es

$$q(x)=g(0)+g'(0)\ x+\frac{g''(0)}{2}x^2=1+x^2.$$

9) Se considera la función $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1+x(\ln(x)-1) & \text{si } x>0, \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

a) Probar que f es continua en $[0,\infty)$. Estudiar si f es derivable por la derecha en $x=0$.
b) Hallar los extremos locales de f, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
c) Estudiar si existe alguna asíntota vertical u horizontal de la gráfica de f y representar de forma aproximada dicha gráfica.
d) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en $x=1$ y utilizarlo para aproximar el valor de $\ln(2)$.

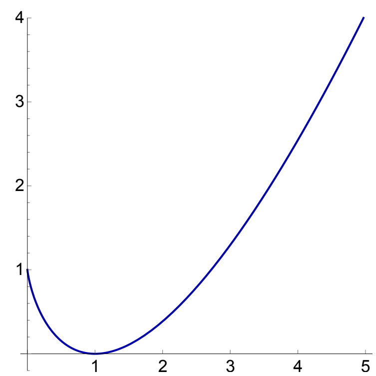
Solución:

a) La función f es continua en $(0,\infty)$ porque se obtiene a partir de sumas y productos de funciones continuas. Para que sea continua en $x=0$, es necesario que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Usamos la regla de L'Hôpital para calcular este límite:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1+\lim_{x\to 0^+} x(\ln(x)-1)=1+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)-1}{1/x}=1+\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=1+\lim_{x\to 0^+}(-x)=1.$$

Por tanto, f es continua en $x=0$.
Derivando y simplificando, se obtiene que $f'(x)=\ln(x)\,,\ \forall\ x>0$. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$, f no es derivable en 0.

b) Como $f'(x) = \ln(x) < 0$ para $x \in (0,1)$ y $f'(x) = \ln(x) > 0$ para $x > 1$, se deduce que f es decreciente en $(0,1)$ y creciente en $(0,\infty)$. En particular, f alcanza un mínimo local en $x = 1$, con un valor de $f(1) = 0$, y un máximo local en $x = 0$, con un valor de $f(0) = 1$.
La derivada segunda de f es $f''(x) = 1/x$, que toma valores positivos en $(0,\infty)$. Por tanto, f es convexa en $(0,\infty)$.



c) Como f es continua en $[0,\infty)$, no tiene asíntotas verticales. Por otra parte, tampoco tiene asíntotas horizontales porque

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + x(\ln(x) - 1) = \infty$$

(ya que $\lim\limits_{x\to\infty} x = \lim\limits_{x\to\infty} (\ln(x) - 1) = \infty$).

Teniendo en cuenta el análisis anterior, esbozamos la gráfica de f a la derecha.

d) Las derivadas sucesivas hasta orden 3 de $f(x)$ son

$$f'(x) = \ln(x)\ ,\ f''(x) = \frac{1}{x}\ ,\ f'''(x) = \frac{-1}{x^2}\ .$$

Por tanto, $f(1) = f'(1) = 0$, $f''(1) = 1$, $f'''(1) = -1$. El polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en $x_0 = 1$ es

$$p(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}\,(x-1)^3 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3\,.$$

Aproximando $f(2)$ por $p(2)$, se obtiene:

$$f(2) = 1 + 2(\ln(2) - 1) \approx p(2) = \frac{1}{3} \Longrightarrow 2(\ln(2) - 1) \approx \frac{-2}{3} \Longrightarrow \ln(2) - 1 \approx \frac{-1}{3} \Longrightarrow \ln(2) \approx \frac{2}{3}.$$

10) Sabiendo que la recta $x+y+2 = 0$ es tangente en el punto $Q = (1,-3)$ a la gráfica del polinomio $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$, calcular el polinomio $p(x)$ y el punto en el que su gráfica pasa de ser cóncava a convexa.

Solución: Dado que la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $(1,-3)$ es $y = -x - 2$, su pendiente es -1 y por tanto $p'(1) = -1$. Por otra parte $p(1) = -3$ para que la gráfica pase por Q.
Como $p'(x) = 6x^2 + 2ax + b$, se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} p(1) = -3 \\ p'(1) = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 + a + b - 4 = -3 \\ 6 + 2a + b = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = -1 \\ 2a + b = -7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -6 \\ b = 5 \end{array}\right\}$$

Así, el polinomio es $p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x - 4$ y su derivada segunda es $p''(x) = 12x - 12$. Para que la gráfica de $p(x)$ pase de ser cóncava a convexa, es necesario que $p''(x) = 0$. Como $p''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$, el punto de inflexión es $Q = (1,-3)$.

11) Se considera la función $f(x) = \cos(x^2)$.

a) Calcular las derivadas sucesivas de f hasta orden 4.

b) Justificar que f alcanza en 0 un extremo local, indicando si es máximo o mínimo.

c) Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 de f centrado en $x_0 = 0$ y utilizarlo para aproximar el valor de la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Solución:

a) Las derivadas sucesivas de $f(x) = \cos(x^2)$ hasta orden 4, una vez simplificadas, son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\,\mathrm{sen}(x^2) \\ f''(x) &= -2\,\mathrm{sen}(x^2) - 4x^2\cos(x^2) \\ f'''(x) &= -12x\cos(x^2) + 8x^3\,\mathrm{sen}(x^2) \\ f^{iv)}(x) &= (16x^4 - 12)\cos(x^2) + 48x^2\,\mathrm{sen}(x^2). \end{aligned}$$

b) Como $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ y $f^{iv)}(0) = -12 < 0$, f alcanza en $x = 0$ un máximo local.

c) El polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x)$ centrado en 0 es

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv)}(0)}{4!}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^4.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(x - \frac{x^5}{10}\right)\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{10} = 0.9.$$

12) Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 e^{-x}$.

a) Calcular los extremos locales de f y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si alguno de los extremos locales es un extremo global de f.

b) Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la gráfica de f.

c) Calcular las asíntotas horizontales de f y esbozar su gráfica.

d) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en $x_0 = 0$ y utilizarlo para aproximar el valor de $e^{-1/4}$.

Solución:

a) Derivando $f(x)$ y simplificando, se obtiene que $f'(x) = 3x(2 - x)e^{-x}$.
Es claro que $f'(x) = 0 \iff x = 0$ o $x = 2$.

Derivando de nuevo, se obtiene $f''(x) = (3x^2 - 12x + 6)e^{-x}$. Por tanto, $f''(0) = 6 > 0$ y $f''(2) = -6e^{-2} < 0$. En consecuencia, f alcanza un mínimo local en $(0,0)$ y un máximo local en $(2, 12e^{-2})$.
En particular, f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente en $(0, 2)$.
El mínimo local es un mínimo global porque $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. El máximo local no es un máximo global porque $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a menos infinito.

b) Como f es dos veces derivable en todo punto, los puntos de inflexión deben ser ceros de f'', es decir, soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2 - 12x + 6 = 0$. Las soluciones son $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ y $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.
Para comprobar que efectivamente son puntos de inflexión, veamos que f'' cambia de signo en los intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y (x_2, ∞).

- $f''(0) = 6 > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0, \, \forall\, x < 2 - \sqrt{2}$.
- $f''(2) = -6e^{-2} < 0 \Longrightarrow f''(x) < 0, \, \forall\, x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.
- $f''(4) = 6e^{-4} > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0, \, \forall\, x > 2 + \sqrt{2}$.

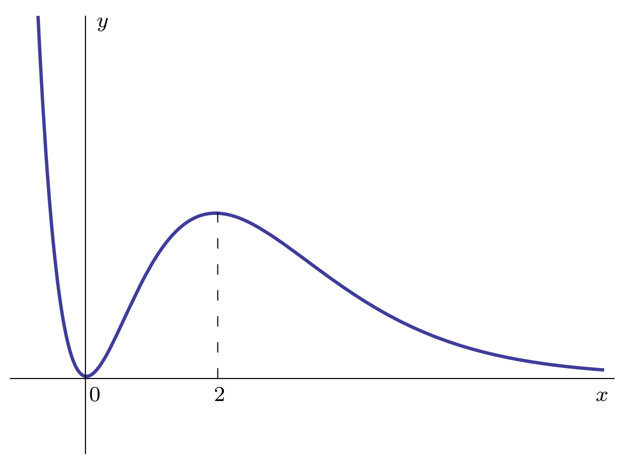
Teniendo en cuenta el signo de f'' se deduce que f es convexa en $(-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$ y cóncava en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.

c) Para calcular las asíntotas horizontales a la gráfica de f, calculamos los límites en $-\infty$ y $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^2 e^{-x} = \infty\,;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 3x^2 e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

En el segundo límite hemos aplicado la regla de L'Hôpital en dos ocasiones. En consecuencia, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal a la gráfica de f en ∞.
En base al análisis previo, la representación aproximada de la gráfica de f es la que se muestra en la figura:



d) El polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en 0 es

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3.$$

Ya hemos calculado $f'(x)$ y $f''(x)$.
Derivando $f''(x)$ y simplificando se obtiene $f'''(x) = (-3x^2+18x-18)e^{-x}$. Evaluando f y sus derivadas en 0, obtenemos $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$, $f'''(0) = -18$. Así,

$$p_3(x) = 3x^2 - 3x^3.$$

Para aproximar el valor de $e^{-1/4}$, observemos que

$$f(1/4) = \frac{3}{16}e^{-1/4} \approx p_3(1/4) = \frac{3}{16} - \frac{3}{64} \Longrightarrow e^{-1/4} \approx 1 - \frac{1}{4} = 0.75.$$

13) Se considera la función de una variable real f definida por

$$f(x) = \frac{e\,x - e^x}{x}.$$

a) Calcular el dominio de definición de f.
b) Hallar los extremos locales de f, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Existe algún punto de inflexión?
c) Calcular las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de f y representar de forma aproximada dicha gráfica.
d) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en $x_0 = 1$.

Solución:

a) La función f está definida en todos los números reales salvo en $x = 0$, en el que se anula el denominador. Por tanto, $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

b) Utilizando las reglas de derivación y simplificando se obtiene que las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{x^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{-e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

La primera derivada sólo se anula en $x = 1$. Como $f'(x) > 0$ para $x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$, se deduce que f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$. En particular, f alcanza un máximo local en $x = 1$, con un valor de $f(1) = 0$.
Para estudiar el signo de la derivada segunda, observemos que $p(x) = x^2 - 2x + 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que $p(x)$ no tiene raíces reales y $p(0) = 2 > 0$. Por tanto, el signo depende del de x^3, de modo que $f''(x) > 0$ si $x < 0$ y $f''(x) < 0$ si $x > 0$. En consecuencia, f es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, \infty)$. No existen puntos de inflexión porque f no está definida en $x = 0$.

c) Para calcular las posibles asíntotas horizontales, estudiamos los límites de f en $-\infty$ y $+\infty$:
Usando la regla de L'Hôpital, se obtiene:

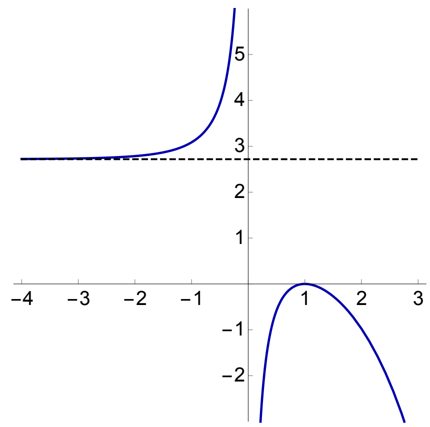
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e\,x - e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e - e^x}{1} = e;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e\,x - e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e - e^x}{1} = -\infty.$$

La recta $y = e$ es una asíntota horizontal de f en $-\infty$.
La recta $x = 0$ es una asíntota vertical a ambos lados ya que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e\,x - e^x}{x} = \infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e\,x - e^x}{x} = -\infty.$$

Ambas relaciones se deducen de que el numerador tiende a -1, el denominador tiende a 0 y el signo de x es negativo a la izquierda de 0 y positivo a la derecha.
Teniendo en cuenta el análisis anterior, esbozamos la gráfica de f:



d) Utilizando la expresión de las derivadas primera y segunda de $f(x)$, se tiene que

$$f(1) = f'(1) = 0,\; f''(1) = -e.$$

El polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en $x_0 = 1$ es

$$p(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2}\,(x-1)^2 = \frac{-e}{2}(x-1)^2\,.$$

14) Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}\,.$$

a) Hallar el dominio de definición de f.
b) Calcular las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de f.
c) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de f.
d) Sabiendo que la gráfica de f no tiene puntos de inflexión, representar dicha gráfica de forma aproximada.

Solución:

a) El dominio de f contiene todos los números reales excepto los que anulan el denominador. Como las dos raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + x - 6 = 0$ son $x = -3$ y $x = 2$, el dominio de f es

$$D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty).$$

b) Las posibles asíntotas horizontales se obtienen calculando los límites de f en $\pm\infty$. En este caso,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+x-6} = 0,$$

por lo que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal a la gráfica de f en $-\infty$ e ∞.

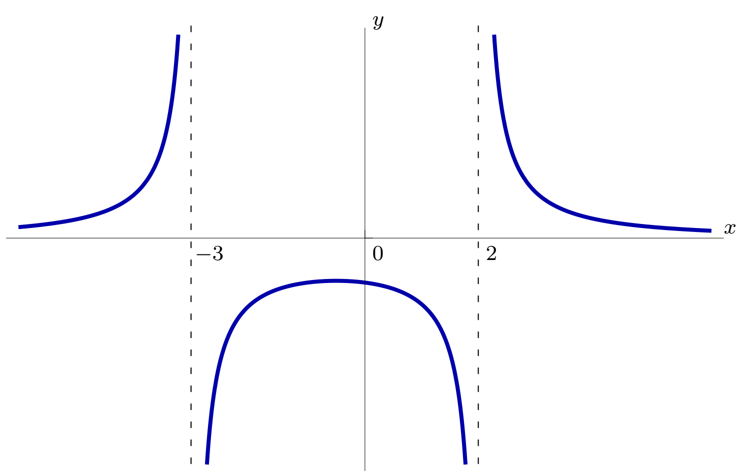
Las posibles asíntotas verticales son $x = -3$ y $x = 2$. Teniendo en cuenta que $x^2 + x - 6$ es negativo en el intervalo $(-3, 2)$ y positivo en el resto, se tiene:

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

Las rectas $x = -3$ y $x = 2$ son asíntotas verticales a la gráfica de f por ambos lados.

c) La derivada de f es $f'(x) = (-2x-1)/(x^2+x-6)^2$. Es claro que $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1/2$ y que $-2x-1$ es positivo si $x < -1/2$ y negativo si $x > -1/2$. Por tanto, f es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1/2)$ y decreciente en $(-1/2, 2) \cup (2, \infty)$.

d) Teniendo en cuenta la información anterior y que el mínimo local de f se alcanza en $f(-1/2) = -4/25 < 0$, la gráfica se puede esbozar del siguiente modo:



15) Se considera la función $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{x-1}-x\ln(x)$.

a) Estudiar si la gráfica de f tiene en $x=1$ un extremo local o un punto de inflexión.

b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en $x_0=1$ y utilizarlo para aproximar el valor de $f(3/2)$.

c) Calcular el valor de a para que la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} x-a & \text{si } x\le 0\\ f(x) & \text{si } x>0\end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$. Razonar si para ese valor de a la función g es derivable en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Las derivadas sucesivas de $f(x)=e^{x-1}-x\ln(x)$ hasta orden 3 son:

$$f'(x)=e^{x-1}-\ln(x)-1 \quad ; \quad f''(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x} \quad ; \quad f'''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}\ .$$

Como $f'(1)=f''(1)=0$ y $f'''(1)=2\neq 0$, la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $x=1$.

b) El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x)$ centrado en 1 es

$$p(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Teniendo en cuenta que $f(1)=1$, $f'(1)=f''(1)=0$ y $f'''(1)=2$, se obtiene el polinomio

$$p(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Aproximamos el valor de $f(3/2)$: $f(3/2)\approx p(3/2)=1+\dfrac{1}{24}=\dfrac{25}{24}=1.04166\ldots$

c) Es claro que g es continua en todo punto distinto de cero. Calculamos a para que g sea continua en cero. Debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0).$$

Por una parte, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g(x)=g(0)=-a$. Por otra parte,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{x-1}-x\ln(x)\right)=e^{-1}-\lim_{x\to 0^+} x\ln(x).$$

Pasando x al denominador y usando la regla de L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=e^{-1}$ y se deduce que g es continua en $\mathbb{R}$ para $a=-e^{-1}=-1/e$.

g no es derivable en $x=0$ porque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{x-1}-\ln(x)-1\right)=\infty$.

16) Se considera la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right)$.

a) Hallar el dominio de definición de f y probar que $f(x) < 0 \iff x < 0$.

b) Probar que $f'(x) = -3(x+1)/(x^3-1)$ para todo $x \in D(f)$.

c) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de f y los extremos locales.

d) Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f.

e) Esbozar la gráfica de f.

f) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0,0)$ y utilizarla para aproximar el valor de $f(0.1)$.

g) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)\,\mathrm{sen}(x)}{x^2}\right)$.

Solución:

a) Como el polinomio $q(x) = x^2+x+1$ no tiene raíces reales y $q(0) = 1 > 0$, se deduce que $q(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Por otra parte, es claro que $(x-1)^2 > 0\,,\ \forall\, x \neq 1$. Por tanto f está definida en todos los números reales salvo en $x = 1$, en el que se anula el denominador, y $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
Como $\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$, se cumple que

$$f(x) < 0 \iff \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} < 1 \iff x^2+x+1 < (x-1)^2 = x^2-2x+1 \iff 3x < 0 \iff x < 0.$$

b) La expresión de la derivada de f se obtiene utilizando la regla de la cadena y simplificando.

c) Es claro que

$$f'(x) = \frac{-3(x+1)}{x^3-1} = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1.$$

Analizando los signos de f' en $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,\infty)$, se deduce que f es decreciente en $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ y creciente en $(-1,1)$. En particular, f alcanza un mínimo local en $x = -1$.

d) Como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = 1,$$

se tiene que

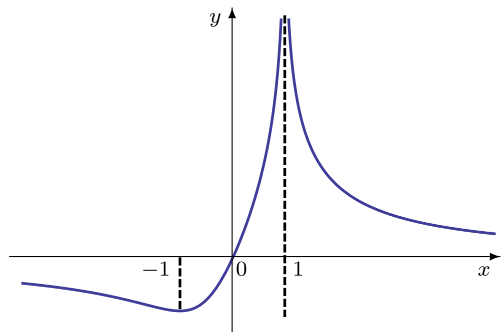
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \ln(1) = 0,$$

y por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f en $\pm\infty$.

Por otra parte, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical a ambos lados ya que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty.$$

e) Teniendo en cuenta las asíntotas horizontales y verticales, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y que $f(0) = 0$, esbozamos la gráfica de f:



f) Utilizando la expresión de $f(x)$ y $f'(x)$, se tiene que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 3$.
Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 0)$ es $y = f'(0)\,x = 3\,x$.
Utilizando la recta tangente para aproximar f, se tiene que $f(0.1) \approx 3(0.1) = 0.3$.

g) Usando la regla de L'Hôpital dos veces, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\,\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)\,\operatorname{sen}(x) + f(x)\,\cos(x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)\,\operatorname{sen}(x) + 2f'(x)\,\cos(x) - f(x)\,\operatorname{sen}(x)}{2} = f'(0) = 3.$$

17) Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{3 + x^2}.$$

a) Calcular los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de la gráfica de f.
b) Hallar el punto p en el que se alcanza el máximo valor de la derivada de f y escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(p, f(p))$.
c) Hallar las asíntotas horizontales de f y representar de forma aproximada la gráfica de f junto con la recta tangente calculada en el apartado *b*).

Solución:

a) La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{-2x}{(3 + x^2)^2}.$$

Es claro que $f'(x) = 0 \iff x = 0$ y que $f(x)$ es positiva si $x < 0$ y negativa si $x > 0$. Por tanto, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$. En 0 f alcanza un máximo local.
Derivando f' y simplificando se obtiene que derivada segunda de f es

$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(3 + x^2)^3}.$$

En este caso, $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$. El signo de f'' es negativo entre -1 y 1 y positivo antes de -1 y después de 1. Por tanto, f es convexa en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y cóncava en $(-1, 1)$.

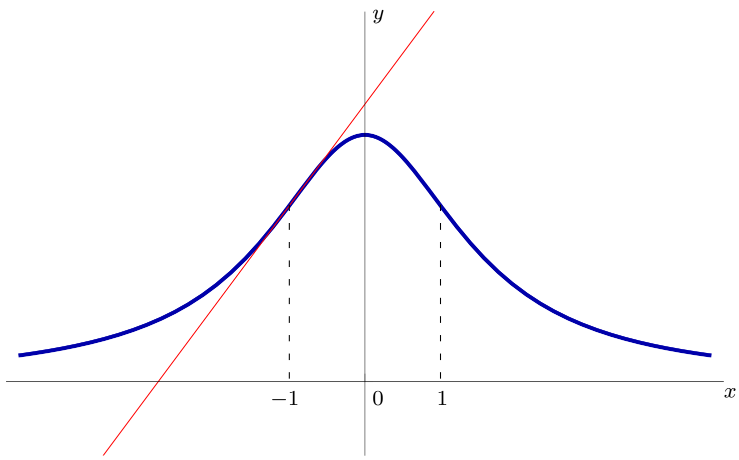
b) Del signo de f'' calculado en el apartado *a*) se deduce que el máximo de f' se alcanza en $p = -1$ porque f' crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, 1)$. Como $f(-1) = 1/4$ y $f'(-1) = 1/8$, la ecuación de la recta tangente en el punto $(-1, 1/4)$ es

$$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(x + 1) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{8}(x + 3).$$

c) Las posibles asíntotas horizontales se obtienen calculando los límites de f en $\pm\infty$. En este caso,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3 + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3 + x^2} = 0,$$

por lo que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal a la gráfica de f en $-\infty$ e ∞.
Teniendo en cuenta la información anterior, la gráfica de f y la recta tangente se representan en la figura:



18) Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.

a) Calcular el dominio de definición de f y sus asíntotas horizontales y verticales.

b) Probar que $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}$ y calcular los extremos locales de la gráfica de f, indicando si son máximos o mínimos.

c) Probar que $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2-2x+3)}{(x+1)^4}$ y determinar los intervalos de convexidad y concavidad de f.

d) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en 0 y utilizarlo para aproximar el valor de $f(1/4)$.

e) Probar que existe un único valor $x_0 > 0$ tal que las rectas tangentes a la gráfica de f y a la parábola $y = 3x - x^2$ son paralelas en el punto con abscisa x_0. Determinar un intervalo de longitud 1 que contiene a x_0.

Solución:

a) El único punto donde f no está bien definida es $x = -1$, para el que se anula el denominador. Por tanto, $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

<u>Asíntotas horizontales:</u>

- La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f en $-\infty$ ya que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{(x+1)^2} = 0.$$

- f no tiene asíntota horizontal en ∞: en efecto, usando la regla de L'Hôpital dos veces, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

<u>Asíntotas verticales:</u>
La recta $x = -1$ es una asíntota vertical a ambos lados ya que

$$\lim_{x\to-1} \frac{e^x}{(x+1)^2} = \infty.$$

b) La expresión de la derivada de f se obtiene utilizando la fórmula de la derivada del cociente y simplificando.
Es claro que $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Además, $f'(x) < 0$ para $x \in (-1, 1)$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por tanto, la gráfica de f tiene un mínimo local en $(1, f(1)) = (1, e/4)$.

c) Aplicando de nuevo la fórmula de la derivada del cociente y simplificando, se obtiene la expresión de la derivada segunda de f. Analizamos el signo de $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 2x + 3 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}.$$

Como las raíces no son reales, el polinomio no cambia de signo y es positivo siempre. Por tanto $f''(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$ y f es convexa en su dominio de definición.

d) Evaluando en 0 las expresiones de f, f' y f'', tenemos que $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ y $f''(0) = 3$. Por tanto, el polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en 0 es

$$p(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 - x + \frac{3}{2}\,x^2.$$

Así, $f(1/4) \approx p(1/4) = 27/32 = 0.84375$.

e) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de abscisa x es $f'(x)$. La pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 3x - x^2$ en el punto de abscisa x es $3 - 2x$. Para que las rectas sean paralelas, debe cumplirse que $f'(x) = 3 - 2x$ ($\Longleftrightarrow f'(x) - 3 + 2x = 0$).
Se define la función $h(x) = f'(x) - 3 + 2x$, de modo que los ceros de h son los puntos donde las tangentes son paralelas. En primer lugar, observemos que

$$h'(x) = f''(x) + 2 > 0, \ \forall\, x > 0.$$

El teorema de Rolle garantiza que h no puede tener más de un cero. Usamos el teorema de Bolzano para probar que existe y acotarlo. Como

$$h(0) = f'(0) - 3 = -4 < 0 \quad ; \quad h(1) = f'(1) - 1 = -1 < 0 \quad ; \quad h(2) = f'(2) + 1 = 1 + \frac{e^2}{27} > 0\,,$$

se deduce que existe $x_0 \in (1, 2)$ tal que $h(x_0) = 0$.

19) Se considera la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x}\right)$.

a) Hallar el dominio de definición de f.
b) Calcular las asíntotas verticales de la gráfica de f.
c) Probar que f es estrictamente decreciente en su dominio de definición. Hallar la expresión de la función inversa f^{-1} y el dominio de definición de f^{-1}.
d) Calcular los puntos de inflexión de f y los intervalos de concavidad y convexidad.
e) Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en 1 y utilizarlo para aproximar el valor de $\ln(3)$.

Solución:

a) Teniendo en cuenta que el logaritmo está definido para números positivos, el dominio de definición está formado por los números $x \in \mathbb{R}$ para los que los signos de $(2-x)$ y x son ambos positivos o ambos negativos. Por tanto, $D(f) = (0, 2)$.

b) Las rectas $x = 0$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la gráfica de f ya que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) = -\infty.$$

c) Aplicando las reglas de derivación y simplificando, tenemos: $f'(x) = \dfrac{-2}{x(2-x)}$.
Es claro que $f'(x) < 0\,,\ \forall\ x \in (0,2)$ y por tanto f es estrictamente decreciente en su dominio de definición.
Para calcular la inversa de f, despejamos x en la expresión $f(x) = y$:

$$\ln\left(\frac{2-x}{x}\right) = y \iff \frac{2-x}{x} = e^y \iff 2-x = xe^y \iff x(e^y+1) = 2 \iff x = \frac{2}{e^y+1}.$$

Por tanto, $f^{-1}(y) = \dfrac{2}{e^y+1}$ y $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

d) La derivada segunda de f es

$$f''(x) = \frac{4-4x}{(2x-x^2)^2}.$$

Es claro que $f''(x) = 0 \iff x = 1$. Además, $f''(x) > 0$ si $x \in (0,1)$ y $f''(x) < 0$ si $x \in (1,2)$, por lo que f tiene un único punto de inflexión en $x = 1$, es convexa en $(0,1)$ y cóncava en $(1,2)$.

e) El polinomio de Taylor de grado 3 de f centrado en 1 tiene la expresión

$$p(x) = f(1) + f'(1)\ (x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Derivando de nuevo f'', se obtiene:

$$f'''(x) = \frac{-4(2x-x^2)^2 - (4-4x)2(2x-x^2)(2-2x)}{(2x-x^2)^4}.$$

Evaluamos f, f', f'' y f''' en 1:

$$f(1) = 0,\ f'(1) = -2,\ f''(1) = 0,\ f'''(1) = -4,$$

de modo que el polinomio de Taylor es

$$p(x) = -2(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)^3.$$

Como

$$\frac{2-x}{x} = 3 \iff x = \frac{1}{2},$$

tenemos:

$$\ln(3) = f(1/2) \approx p(1/2) = \frac{13}{12} = 1.0833\ldots$$