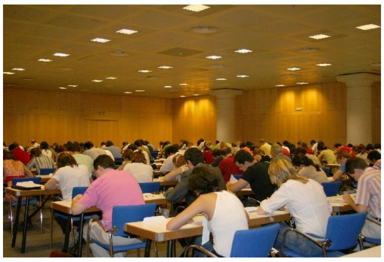
MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2011, treball no. 6, 19 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Matemáticas y evaluación

Xavier Bardina, Eduardo Liz

1. Introducción



Cuando la evaluación de los alumnos no se reduce a la nota de un examen final sino que se tienen en cuenta otros trabajos o pruebas que el alumno hace a lo largo del curso (lo que se suele llamar la evaluación continua), es necesario reflexionar sobre el peso que debe tener cada una de las dos partes en la nota final. Aquí entran en juego las Matemáticas porque se hace necesaria una fórmula; quizá la manera más simple consiste en fijar el porcentaje que se le da a cada parte y usar la siguiente fórmula para la nota final N:

$$N(x, y) = p\,x + (1 - p)\,y,$$

donde x es la nota de la evaluación continua, y es la nota del examen final y p es el porcentaje de la nota que se asigna a la evaluación continua.

Los dos autores de este artículo decidimos buscar una fórmula diferente que respondiese a una serie de reflexiones sobre la manera en que nos gustaría evaluar. Por ejemplo, si un alumno no puede seguir de forma normal la evaluación continua, puede desmotivarse por el hecho de presentarse al examen final con un descuento considerable de la nota (si $p = 0{,}5$ entonces el alumno que no haya podido realizar las pruebas de evaluación continua necesitaría un 10 en el examen final para aprobar).

Curiosamente, con un lapso de 10 años y de forma independiente, ambos llegamos a la misma fórmula. Cabe destacar que la fórmula es independiente de la forma de evaluación continua escogida y por supuesto su uso no está restringido al ámbito de las Matemáticas (ni siquiera al ámbito de la enseñanaza universitaria). Tanto el contexto académico como la forma de evaluación continua son diferentes en el caso de los autores. En la asignatura de Cálculo de Probabilidades de la Diplomatura de Estadística de la UAB, la conveniencia de usar la evaluación continua surgió en el curso 2000/2001 para ayudar a marcar el ritmo de estudio a los alumnos que seguían la asignatura de forma virtual y consistía en una serie de entregas periódicas de trabajos y listas de problemas. En las asignaturas de Cálculo I y Álgebra Lineal para el grado de Ingeniería de la Energía de la Universidad de Vigo, la evaluación continua comenzó en el curso 2010/2011, momento en el que se implantaron los nuevos grados adaptados al sistema de Bolonia. La evaluación continua consiste en este caso en tres pruebas parciales realizadas en clase.

Puestos en contacto los dos autores, hemos decidido escribir un trabajo conjunto donde aparecen las diferentes motivaciones y más curiosidades. En particular, la mayor experiencia en el uso de la fórmula en la UAB nos ha permitido mencionar posibles variantes, que en el caso de la UVIGO todavía no habían tenido tiempo de surgir.

También se proponen algunas alternativas para aquellos a los que les guste la idea pero tengan dudas sobre algunos de los aspectos del uso de la fórmula.

La estructura del artículo es la siguiente: en la Sección 2 se exponen los postulados que debía cumplir la fórmula (casi coincidentes para ambos autores) y se explican los distintos modos de derivar la fórmula; aquí se nota la orientación investigadora de cada uno de los autores (el primero en el área de Estadística y el segundo en la de Matemática Aplicada). En la Sección 3 se comentan posibles alternativas a la fórmula; en particular se define una familia de fórmulas que cumplen los axiomas expuestos y que permiten mayor flexibilidad. Algunas características de esa familia de fórmulas se estudian desde un punto de vista matemático en un apéndice, para evitar romper la lectura fluida del artículo. En la Sección 4 se muestra con algunos ejemplos cómo la propia fórmula se puede utilizar para ilustrar algunos de los conceptos de una asignatura de Cálculo Diferencial. Terminamos con dos secciones breves: en la Sección 5 comentamos los resultados del uso de la fórmula en nuestras asignaturas y en la Sección 6 hacemos una breve (pero necesaria) reflexión sobre el objetivo de la evaluación.

2. Derivación de la fórmula

En esta sección se presentan los postulados que ha de cumplir la fórmula y luego se exponen varias maneras de deducirla a partir de estas hipótesis. Hemos incluido los enfoques que han utilizado cada uno de los autores, de acuerdo en ambos casos con su orientación investigadora.

Para llegar a la expresión de la fórmula se han tenido en cuenta cuatro motivaciones o hipótesis:

(H1) La calificación final del alumno ha de ser una suma del esfuerzo hecho en la evaluación continua y en el examen final, de tal modo que el esfuerzo necesario para aprobar en el final se modere por el que se ha hecho antes.

(H2) Toda calificación obtenida en la evaluación continua ayuda en el examen final (excepto en el caso de que la nota del final sea un 10).

(H3) Si el alumno no quiere o no puede hacer la evaluación continua, su nota será la del examen final.

(H4) La nota máxima que se puede obtener con la evaluación continua es 5, mientras que el examen final puntúa sobre 10.

Las dos primeras motivaciones pretenden que los alumnos se esfuercen en la evaluación continua y no se desanimen si las primeras pruebas les han salido mal. La tercera hipótesis nos parece necesaria para alumnos que trabajen, se incorporen tarde a la asignatura, o sufran algún tipo de percance que no les permita seguir de forma normal la evaluación continua. Por otra parte, si la evaluación continuada tiene un peso fijo –no recuperable– en la nota final, hay alumnos que a las pocas semanas de clase ya ven que cada vez tienen más difícil superar la asignatura y una parte de ellos decide abandonarla.

Estas tres primeras consideraciones fueron completamente comunes como hipótesis de trabajo para los dos autores de manera independiente. La hipótesis (H4) establece un peso para la evaluación continua y es más flexible. De hecho, podría fijarse cualquier valor máximo entre 0 y 10. Así, mientras que en el caso de la UVIGO se ha elegido el 5, la nota máxima que se podía obtener con la evaluación continuada en el caso de la UAB era de 3. Para dar uniformidad al artículo, aquí fijaremos el valor de 5 en la hipótesis (H4). Nótese que esto sólo afecta al rango de valores que puede tomar la nota parcial, de modo que el resto del artículo no sería muy distinto fijando un valor diferente.

Observación 1. *Es interesante comentar que, si bien un alumno que haga perfectas las pruebas de evaluación continua podría aprobar sin hacer el examen final, es poco probable que se conformase con un 5. De hecho, los resultados indican que los alumnos cuya nota se aproxima al 5 en la evaluación continua también obtienen sobresaliente en el examen final.*

Teniendo en cuenta las hipótesis de trabajo, la calificación del alumno debe ser una función de la nota obtenida por parciales (sobre 5) y la nota del examen final (sobre 10). Denotaremos por x a la primera y por y a la segunda, de modo que la nota resultante es $N = N(x, y)$. Aquí empiezan a aparecer las matemáticas, necesarias para obtener la fórmula y analizar sus propiedades.

2.1. Derivación de la fórmula: un enfoque estadístico

Desde un punto de vista estadístico, un modo de obtener una fórmula que cumpla con las hipótesis planteadas es proponer una media ponderada entre la nota y del examen final y un 10, de forma que la evaluación continuada, x, sirva para establecer los pesos que deben corresponder a cada una de las dos notas. De esta forma nos aseguramos que la nota resultante tomará un valor entre la nota del examen final, y, y 10.

Empezaremos proponiendo una media aritmética. En la sección 3 veremos que si proponemos otros tipos de medias (véase [1]) podemos obtener otras fórmulas alternativas que también cumplen las hipótesis.

Si denotamos el peso de la nota del examen final por $f(x)$, debemos realizar la media aritmética de

$$\begin{cases} y & \text{con un peso de } f(x), \\ 10 & \text{con un peso de } 1 - f(x). \end{cases}$$

Por tanto, la nota final de la asignatura será de la forma:

$$N(x, y) = (1 - f(x)) \times 10 + f(x) \times y.$$

Si ahora imponemos que la nota de un alumno que saca un 0 en el examen final sea la nota de la evaluación continuada tenemos que

$$N(x, 0) = x,$$

es decir,

$$(1 - f(x)) \times 10 + f(x) \times 0 = x,$$

de donde se obtiene

$$f(x) = 1 - \frac{x}{10}.$$

Por tanto, la fórmula que obtenemos para la nota final es

$$N(x, y) = \frac{x}{10}\, 10 + \left(1 - \frac{x}{10}\right) y = x + \left(1 - \frac{x}{10}\right) y. \tag{2.1}$$

Es fácil comprobar que la fórmula (2.1) se ajusta a los postulados (H1)–(H4). En particular, (H2) es equivalente a que $N(x, y) > y$ siempre que $x > 0$ y $0 \leq y < 10$, lo cual se deduce de la relación

$$N(x, y) > y \iff x + \left(1 - \frac{x}{10}\right) y > y \iff x \left(1 - \frac{y}{10}\right) > 0.$$

Nótese que obtener un 10 en el examen final es la única manera de que la calificación final sea de 10.

2.2. Derivación de la fórmula: un enfoque analítico

La inspiración del segundo autor para llegar a esta fórmula surgió de un modelo discreto de dinámica de poblaciones que había estudiado recientemente. Supongamos que los individuos de una población al cabo de n años se dividen en dos estructuras de edades: juveniles (J_n) y adultos (A_n), de modo que los juveniles que sobreviven se convierten en adultos al cabo de un año. Suponiendo que una parte de los adultos sobrevive al período reproductivo, la cantidad de adultos el siguiente año es

$$A_{n+1}(A_n, J_n) = \alpha A_n + \beta(A_n) J_n, \tag{2.2}$$

donde suponemos que la tasa de supervivencia de adultos es una constante $\alpha \in [0,1]$ y la tasa de supervivencia de juveniles depende de la densidad de adultos. Esto es típico de poblaciones de peces, como los salmones, donde hay cierto canibalismo: los peces adultos se comen una parte de los huevos. Un modelo bien conocido para este tipo de poblaciones es el modelo de Ricker (ver, por ejemplo, la referencia [3]).

En el contexto académico, la nota de la evaluación continua juega el papel de A_n y la nota del examen final correspondería a J_n. La nota final juega el papel de A_{n+1}, que debe obtenerse como la suma de un porcentaje fijo de la evaluación continua (αA_n) y un porcentaje (que depende de la evaluación continua) de la nota del examen final ($\beta(A_n)J_n$).

Si x_1 es la nota de la evaluación continua sobre 10 e y es la nota del examen final, podemos escribir la nota final $N(x_1, y)$ como

$$N(x_1, y) = \alpha x_1 + \beta(x_1) y,$$

donde α es el porcentaje máximo que se le asigna a la evaluación continua y $\beta(x_1)$ es el porcentaje asignado a la nota final. Nótese que αx_1 es lo que hemos denominado x; lo escribimos así para destacar la analogía con (2.2).

Imponiendo la condición $N(x_1, 10) = 10$, para todo valor de x_1 (lo que quiere decir que si un alumno alcanza un 10 en el examen final, su nota debe ser 10 independientemente de lo que haya hecho en la evaluación continua), se tiene:

$$N(x_1, 10) = 10 \iff \alpha x_1 + \beta(x_1) 10 = 10 \iff \beta(x_1) = 1 - \frac{\alpha x_1}{10}.$$

Así,

$$N(x_1, y) = \alpha x_1 + \beta(x_1) y = \alpha x_1 + \left(1 - \frac{\alpha x_1}{10}\right) y.$$

Sin más que sustituir $x = \alpha x_1$, se obtiene de aquí la fórmula (2.1). Recuérdese que trabajaremos con $\alpha = 0{,}5$, pero se le puede asignar cualquier otro valor entre cero y uno.

Es interesante que la fórmula (2.1) se podría introducir axiomáticamente buscando un polinomio cuadrático $p(x, y)$ que verificase $p(0, y) = y$ para todo

y, $p(x,0) = x$ para todo x, y $p(x,10) = 10$ para todo x. Las dos primeras propiedades reflejan que si un alumno no realiza alguna de las dos partes de la evaluación, su nota es la de la otra. La tercera ya se ha explicado antes. Es un ejercicio sencillo comprobar que un polinomio cuadrático

$$p(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

cumple estas tres condiciones si y sólo si $A = 0$, $B = 0$, $C = -1/10$, $D = 1$, $E = 1$, $F = 0$, es decir,

$$p(x,y) = x + y - \frac{1}{10}xy = x + \left(1 - \frac{x}{10}\right) y = N(x,y).$$

La primera expresión de $p(x,y)$ en la fórmula anterior indica claramente que $N(x,y)$ es una función simétrica, es decir, $N(x,y) = N(y,x)$ siempre que x e y estén entre 0 y 5. Como consecuencia, la fórmula (2.1) también se puede escribir como

$$N(x,y) = y + \left(1 - \frac{y}{10}\right) x.$$

Con esta expresión resulta claro que cualquier nota positiva en la evaluación continua contribuye a subir la nota y del examen final, con un peso que es una función lineal decreciente de y.

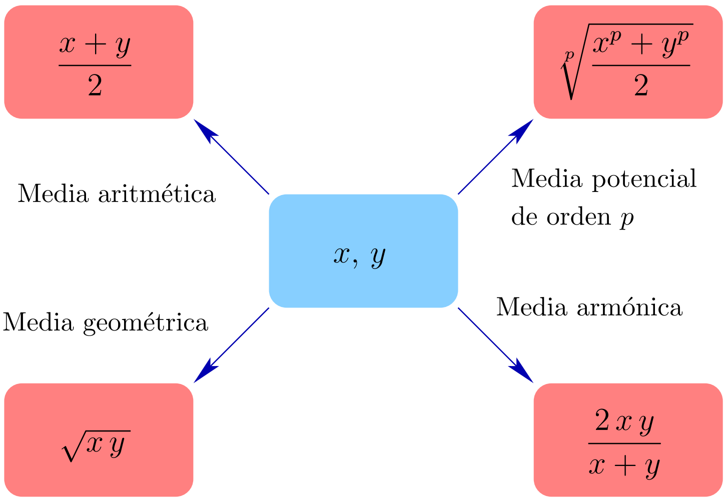
3. Alternativas a la fórmula

Uno de los problemas sobre la fórmula que han planteado algunos docentes reticentes a aplicarla en su forma original es el hecho de que siempre suma, incluso cuando las notas obtenidas en la evaluación continua son muy bajas. Esto no es un problema grave. Por un lado, esta fórmula permite tener en cuenta en la evaluación tipos de trabajo que debe realizar el alumno que son difíciles de traducir en una nota, como podrían ser la participación en una *wiki*, la búsqueda de bibliografía, la realización de según que tipo de prácticas, etc. Por otro lado, si la evaluación continuada está formada por controles parciales, ejercicios o prácticas que sí que se traducen en una nota concreta, una solución para evitar este problema consiste en sólo puntuar aquellos trabajos que sean considerados suficientemente satisfactorios como para tenerlos en cuenta. Por ejemplo, considerar solamente aquéllos cuya nota sea superior a 4 o, si se quiere ser más conservador, sólo aquéllos que superen el 5.

A modo de curiosidad, si no se impone ninguna restricción de este tipo, la nota mínima sobre 10 que un alumno tendría que alcanzar tanto en los parciales de la evaluación continuada como en el examen final para aprobar la asignatura vendría dada resolviendo la ecuación

$$N(y/2, y) = 5,$$

cuya única solución en el intervalo $(0, 10)$ es $y = 15 - 5\sqrt{5} \approx 3{,}81966$. Es decir, si no se pone ninguna restricción, una persona que obtuviese esta nota en todos los trabajos de la evaluación continuada (que luego se ponderan al 50 % en la obtención de la calificación final) y su nota fuese la misma en el examen final, aprobaría con un 5 la asignatura. Si, como en el caso de las asignaturas de la UAB, la nota máxima de la evaluación continua es de 3, entonces este valor asciende a $y = 5(13 - \sqrt{109})/3 \approx 4{,}26616$.



Diferentes tipos de media (sin ponderar).

3.1. Una familia de fórmulas alternativas

A continuación vamos a obtener otras fórmulas que cumplen las hipótesis de trabajo (H1)–(H4), de modo que podrían usarse como alternativas a la fórmula (2.1), dependiendo de la ventaja que se le quiera dar al alumno.

Si en lugar de la media aritmética se emplea una media potencial ponderada de orden p (véase [1]), un desarrollo análogo al seguido en la sección 2.1 permite deducir la fórmula

$$N_p(x, y) = \left(x^p + y^p \left(1 - \left(\frac{x}{10}\right)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

Por ejemplo, para $p = 2$ (media cuadrática) tendríamos la fórmula

$$N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 \left(1 - \left(\frac{x}{10}\right)^2\right)}.$$

La expresión (3.3) representa una familia de fórmulas alternativas para ponderar la evaluación continua que cumplen las hipótesis (H1), (H2), (H3) y (H4). Otra propiedad común interesante es que la función N_p es simétrica para todo $p > 0$, es decir,

$$N_p(x, y) = N_p(y, x), \; \forall \, x, y. \tag{3.4}$$

De alguna manera, esta propiedad indica que, como cabe esperar, el esfuerzo que no se haga en la evaluación continua habrá de compensarse con un buen examen final.

Pese a las analogías, la familia de fórmulas (3.3) proporciona toda una serie de posibilidades de tener en cuenta la evaluación continua que van desde las más conservadoras hasta las más “generosas” con el alumno.

La figura 1 representa el gráfico conjunto de las notas finales en función de la nota del examen de un alumno que obtuvo una calificación de $x = 2{,}5$ (la mitad de los puntos posibles) en la evaluación continuada, aplicando distintas elecciones del parámetro p en la fórmula (3.3).

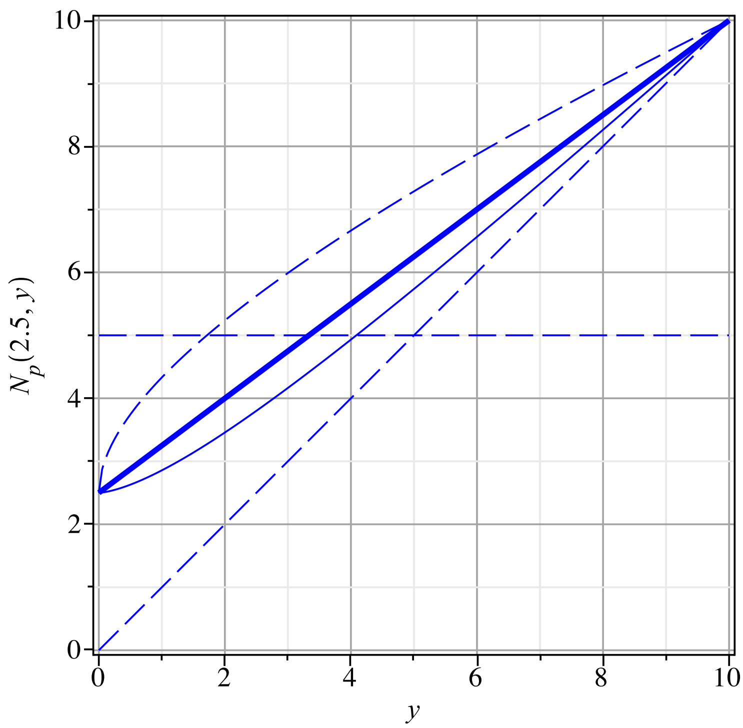


Figura 1: Nota final N_p de un alumno que ha obtenido 2,5 puntos en la evaluación continua en función de la nota del examen final y. Comparativa de distintas elecciones de p en la fórmula (3.3): línea discontinua superior para $p = 0{,}5$, línea gruesa para $p = 1$, y línea fina para $p = 1{,}5$. También se incluyen en trazo discontinuo la recta $N_p = y$ (que correspondería a no tener en cuenta la evaluación continua; formalmente, $p = \infty$) y la recta horizontal $N_p = 5$, nivel del aprobado.

Observamos que la fórmula $N_{1,5}(x,y)$ es más conservadora y la fórmula $N_{0,5}(x,y)$ es más favorable al alumno. De hecho, si $x = 2{,}5$, la nota mínima que un alumno necesita en el examen final para obtener un aprobado es de $y = 1{,}71573$ para $p = 0{,}5$, $y = 3{,}333$ para $p = 1$, e $y = 4{,}0862$ para $p = 1{,}5$.

Esto podría parecerle a algún docente un regalo excesivo para el alumno, pero téngase en cuenta que, usando el método tradicional de exámenes parciales que liberan materia, el alumno podría estar aprobado con su 2,5 sobre 5 en las pruebas parciales, sin necesidad de presentarse al examen final.

La ayuda obtenida con la evaluación continuada se puede computar como la diferencia $N_p(x,y) - y$, es decir, la distancia entre la nota sin evaluación continuada (recta $N_p = y$) y las notas con las distintas fórmulas. Podemos observar que, mientras que las fórmulas $N(x,y)$ y $N_{1,5}(x,y)$ ayudan más cuando menor es la nota y (pues la distancia entre las gráficas correspondientes a estas fórmulas y la recta $N_p = y$ es una función decreciente de y), esta propiedad de monotonía deja de cumplirse para la fórmula $N_{0,5}(x,y)$. De hecho, como ya se ha indicado antes, la función de ayuda de la evaluación continua en el caso $p = 1$ no es más que la función

$$A(x,y) = N(x,y) - y = x\left(1 - \frac{y}{10}\right).$$

Es decir, el factor de ayuda de la nota parcial es $1 - y/10$, que decrece linealmente desde el factor 1 (toda la nota parcial) para $y = 0$ al factor 0 para $y = 10$ (la nota parcial no ayuda nada si en el examen final el alumno tiene un 10).

3.2. Estrategia de reparto del esfuerzo

Si consideramos que el alumno debe repartir su esfuerzo en las tareas de evaluación continua y la preparación del examen final (aunque difícilmente se pueden considerar tareas independientes), es interesante preguntarse cuál es la estrategia óptima para alcanzar el aprobado utilizando los diferentes valores del parámetro p en la fórmula (3.3).

Una manera de plantear este problema desde un punto de vista matemático consiste en encontrar los valores de (x,y) de tal forma que $N_p(x,y) = 5$ y la norma euclídea del vector (x,y) sea mínima. En el apéndice se justifica matemáticamente el hecho de que la mejor estrategia es obtener la misma calificación en la evaluación continua que en el examen final, es decir $x = y$, siempre que $0 < p < p^*$, donde p^* toma un valor aproximado de 1,65122. De hecho, el "esfuerzo necesario" para llegar al aprobado es una función creciente de p, lo que permite escoger un valor dependiendo del grado de ayuda que se le quiera dar al alumno; la fórmula (3.3) con valores de p menores que 1 son más favorables al alumno que la fórmula (2.1), mientras que los valores de p mayores que 1 tienen el efecto contrario. Véase la figura 2, donde se representan las curvas de nivel $N_p(x,y) = 5$ para $p \in \{0{,}5\,,\ 1\,,\ 1{,}5\}$.

También se incluye la recta $y = x$ para destacar la distancia mínima de cada una de las curvas a $(0, 0)$.

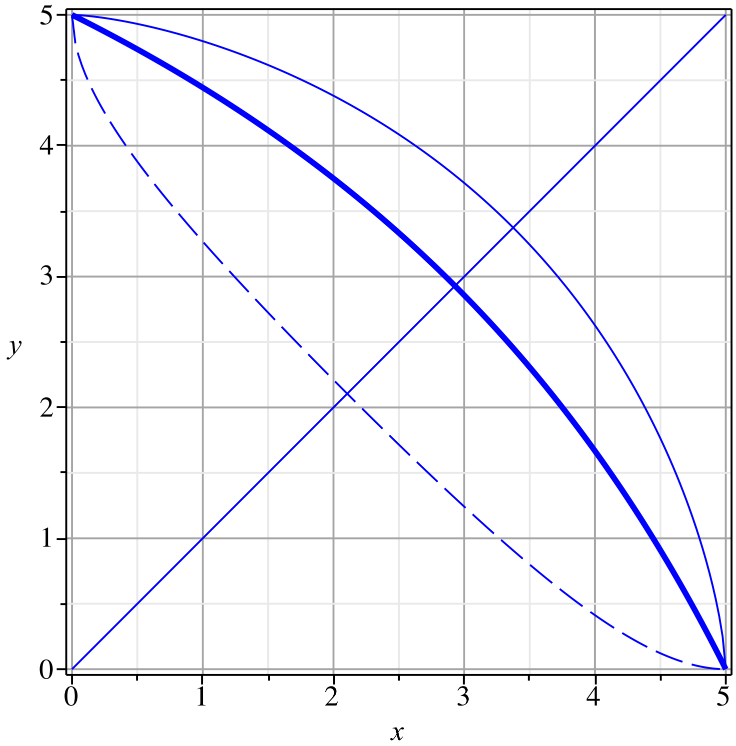


Figura 2: Representación de $N_p(x, y) = 5$ para $p = 1$ (línea continua gruesa), $p = 0{,}5$ (línea discontinua) y $p = 1{,}5$ (línea continua fina). También se incluye la recta $x = y$.

No es difícil probar que, para cada $p > 0$, la curva de nivel $N_p(x, y) = 5$ tiene un único punto fijo en el intervalo $[0, 5]$ y viene dado por

$$c(p) = 10 \left(1 - \sqrt{1 - (0{,}5)^p}\right)^{1/p}.$$

En el caso de aplicar la fórmula (2.1), el alumno aprobaría alcanzando $x = y = c(1) = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2{,}92893$, para $p = 0{,}5$ le bastaría $x = y = c(0{,}5) \approx 2{,}10501$, mientras que para $p = 1{,}5$ necesitaría $x = y = c(1{,}5) \approx 3{,}37398$.

Para valores de $p > p^*$, la mejor estrategia deja de ser obtener la misma calificación, y para $p > 2$ podemos concluir que, aunque los puntos de la evaluación continua siguen sumando, de algún modo el esfuerzo invertido en la evaluación continua deja de ser rentable. Algunas de estas afirmaciones se justifican en el apéndice; otras se dejan planteadas como problemas abiertos.

No debemos olvidar que $x = x_1/2$, donde x_1 es la nota de la evaluación continua sobre 10. Por tanto, la "estrategia óptima" $x = y$ en realidad supone que el alumno se esfuerza el doble en la evaluación continua que en el examen final ($x_1 = 2y$).

4. La fórmula como ilustración de conceptos de la asignatura de Cálculo

Aparte de que la función definida en (2.1) sea satisfactoria desde el punto de vista de las premisas (H1)–(H4), también puede convertirse en un buen ejemplo para ilustrar algunos de los conceptos de la propia asignatura de Cálculo. En esta sección se exponen algunos ejemplos. Para una explicación más detallada de los distintos conceptos véase cualquier libro de Cálculo Vectorial, por ejemplo, [2].

4.1. Curvas de nivel

El alumno conoce su nota de las pruebas parciales antes de presentarse al examen final y quiere saber la nota necesaria para alcanzar el aprobado (o el notable, o el sobresaliente). Para cada $K \in [0, 10]$ se pueden calcular los valores de x e y para los cuales $N_p(x, y) = K$; estas son las curvas de nivel de la función y, en particular, $N_p(x, y) = 5$ define la curva de nivel del aprobado para cada elección de p en la fórmula (3.3). En la figura 3 se representan las curvas de nivel de N y de $N_{0,5}$ para los valores enteros de K entre 1 y 10.

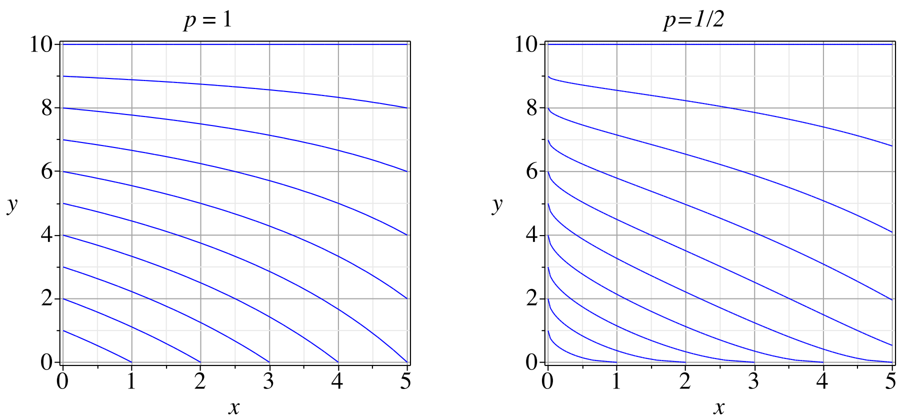


Figura 3: Curvas de nivel de N_p para $p = 1$ (izquierda) y $p = 1/2$ (derecha).

Las curvas de nivel de N_p se pueden obtener explícitamente:

$$N_p(x, y) = K \Longleftrightarrow \left(1 - \left(\frac{x}{10}\right)^p\right) y^p = K^p - x^p \Longleftrightarrow y = \left(\frac{K^p - x^p}{1 - \left(\frac{x}{10}\right)^p}\right)^{1/p}.$$

Si denotamos por $y = g_{p,K}(x)$ la función definida por la curva de nivel $N_p(x,y) = K$, es sencillo comprobar que $g'_{p,K}(x) < 0$ para todo $x \in [0,5]$ y $K < 10$. El hecho de que las curvas de nivel sean decrecientes con x (salvo en el caso $K = 10$, en el que son constantes) ilustra de nuevo la hipótesis (H2).

Nótese que de la propiedad de simetría (3.4) se sigue que las curvas de nivel son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

4.2. Gradiente como dirección de crecimiento más rápido

Es bien sabido que una importante interpretación geométrica del vector gradiente, $\nabla f(x_0)$, de un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto x_0 (en particular para $n = 2$ y $n = 3$, donde se puede visualizar) es que apunta en la dirección en la cual f crece más rápidamente.

En el caso de la función $N(x,y)$ definida en (2.1), el alumno parte al principio del curso del punto $(0,0)$ y podría plantearse con qué estrategia de reparto de su esfuerzo entre la evaluación continua y la preparación del examen final avanzaría más rápido hacia el aprobado. Dado que

$$\nabla N(x,y) = \left(1 - \frac{y}{10}, 1 - \frac{x}{10}\right),$$

se obtiene que $\nabla N(0,0) = (1,1)$. La dirección del gradiente conduce a la intersección de la recta $y = x$ con la curva de nivel del 5, que es el punto $(c(1), c(1))$, donde $c(1) = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2{,}93$ ya fue calculado en la Sección 3.2.

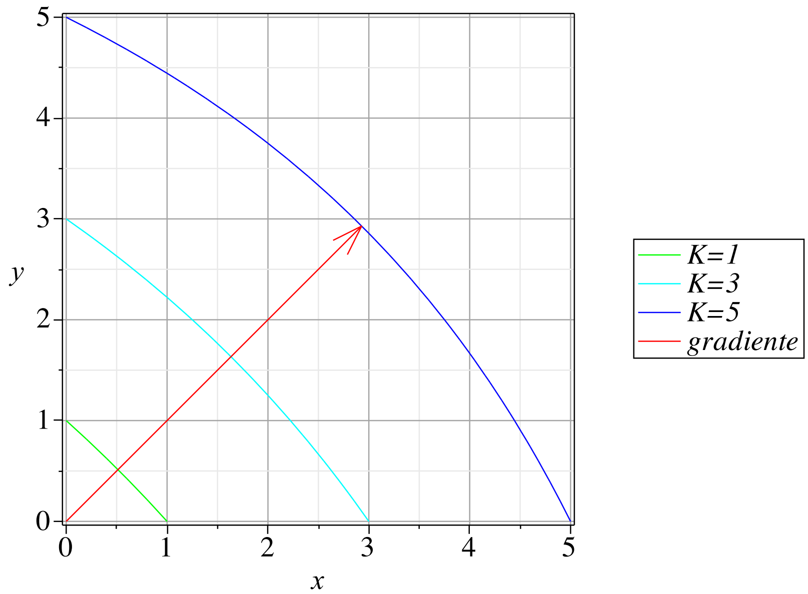


Figura 4: Dirección de máximo crecimiento de N a partir de $(0,0)$.

En la figura 4 se representan las curvas de nivel de N correspondientes a 1, 3 y 5 y un vector en la dirección del gradiente hasta su intersección con la curva de nivel del aprobado.

Buscando el camino de máxima pendiente.

4.3. Extremos absolutos y extremos condicionados

Como N es una función continua definida en un subconjunto compacto $D = [0, 5] \times [0, 10]$ de $\mathbb{R}^2$, alcanza el máximo y el mínimo absolutos en D. Es sencillo comprobar que no hay puntos críticos de N en el interior de D, ya que el único punto donde $\nabla N(x, y) = (0, 0)$ es $(10, 10)$, que no pertenece a D y además es un punto de silla puesto que la matriz hessiana de N es siempre indefinida. Un análisis de la función N restingida a la frontera de D muestra que el mínimo absoluto es 0 y se alcanza en $(0, 0)$, mientras que el máximo absoluto es 10, que se alcanza en todos los puntos de la forma $(x, 10)$, con $x \in [0, 5]$.

Una ilustración del teorema de los multiplicadores de Lagrange consiste en minimizar la función $F(x, y) = x^2 + y^2$ (que mide la distancia al cuadrado de (x, y) a $(0, 0)$) sujeta a la restricción $N(x, y) = 5$, es decir, minimizar el esfuerzo para llegar al 5. El resultado es de nuevo el punto $(c(1), c(1))$, representado en la figura 4.

Este problema de optimización para el caso general de $N_p(x, y)$ con $p > 0$ ya se ha tratado en la Sección 3.2. En este caso, el método de los multiplicadores lleva a un complicado sistema de ecuaciones no lineales; por ello en el apéndice se aborda de una manera diferente.

5. Resultados

En los diez años que se lleva aplicando la fórmula por parte de distintos profesores del Departamento de Matemáticas de la UAB hemos podido comprobar que fomenta en gran medida el trabajo continuado del alumno. De hecho hay una correlación muy alta, en general, entre la nota que los alumnos obtienen en la evaluación continuada y su nota en el examen final. Por tanto, la mayor virtud de la fórmula, más que ayudar a aprobar más alumnos, que también, es que fomenta el trabajo a lo largo del curso. Por este motivo muchos profesores del Departamento de Matemáticas de la UAB la han aplicado en sus asignaturas. Primero su uso se extendió entre el profesorado de la Diplomatura de Estadística, pero después también se empezó a utilizar en asignaturas de matemáticas y estadística de distintas titulaciones.

La experiencia llevada a cabo durante el curso 2010/2011 en la asignatura de cálculo diferencial en una y varias variables del grado de Ingeniería de la Energía de la Universidad de Vigo corrobora la de la UAB. Otro aspecto destacable es el alto nivel de participación: de los 49 alumnos matriculados, 46 hicieron las tres pruebas parciales y 48 se presentaron al examen final.

Una vez finalizado el cuatrimestre, los alumnos opinan que hacer 3 pruebas parciales es un sistema de evaluación continua que les motiva para llevar al día la asignatura.

6. Una reflexión sobre el objetivo de la evaluación

Esta fórmula lleva incorporada una idea de la docencia que puede (y debe) ser motivo de debate. Con la docencia de la asignatura queremos que los alumnos alcancen unos objetivos determinados; con la evaluación queremos que el alumno demuestre evidencias de que ha alcanzado unas determinadas competencias relacionadas con esa materia, que a menudo se traducen en unos determinados resultados del aprendizaje. La metodología docente y la planificación de la asignatura consisten en trazar un camino que el profesor sabe, por su experiencia en la materia, que conduce a estos objetivos. Pero evidentemente hay otros caminos alternativos que también conducen a este mismo objetivo final. Esta fórmula incluye de forma implícita la idea de que no hay que penalizar a un alumno que haya seguido otro camino alternativo si es capaz de demostrar que ha alcanzado los objetivos propuestos. Por otro lado, el profesor traza ese camino general teniendo en cuenta la ubicación de la asignatura en el plan de estudios, sabiendo cuáles son las materias que el alumno ya debería haber cursado. Pero en el grupo de alumnos matriculados cada vez hay más heterogeneidad. En el caso de la UAB había profesionales, ya licenciados en otra disciplina, que cursaban como segunda titulación la Diplomatura de Estadística. Estos alumnos, que en su mayoría utilizan la estadística en su trabajo diario, ya han alcanzado algunas de las competencias asociadas a algunas asignaturas y, sin embargo, deben profundizar más en otras. Hay también en el aula alumnos Erasmus de los cuales no tenemos toda la información sobre qué competencias han trabajado en las asignaturas que han cursado en su universidad de origen y que, en cualquier caso, el plan de estudios que han cursado seguro que no coincidirá con el de nuestra universidad. Hay también alumnos que se han cambiado de universidad o de titulación, etc. Esta diversidad en el aula hace que el camino trazado por el profesor, que será el que seguirá la mayoría, no sea el más adecuado para una minoría. Esta fórmula no penaliza los alumnos que decidan seguir otras alternativas siempre y cuando terminen demostrando que han alcanzado los objetivos de la asignatura.

Apéndice

En este apéndice se prueban algunos resultados relacionados con el problema planteado en la Sección 3.2.

Denotaremos por $g_{p,K}(x)$ la función que define la curva de nivel $N_p(x,y) = K$, que ya ha sido obtenida en la Sección 4.1:

$$g_{p,K}(x) = \left(\frac{K^p - x^p}{1 - \left(\frac{x}{10}\right)^p} \right)^{1/p}. \tag{6.5}$$

Nótese que, aunque para el propósito de esta nota el rango de valores de x es $[0,5]$, la función $g_{p,K}$ está bien definida en el intervalo $[0,K]$ y toma valores en $[0,K]$. En el primer resultado se establecen dos propiedades de $g_{p,K}$ que se usarán después.

Proposición 1. *Las funciones $g_{p,K}$ son estrictamente decrecientes en $[0,K]$ si $K < 10$ y además son involuciones, es decir,*

$$g_{p,K}(g_{p,K}(x)) = x, \ \forall\, x \in [0,K]. \tag{6.6}$$

Demostración. Para probar que $g'_{p,K}(x) < 0$ para todo $x \in [0, K]$, basta demostrar que $H'(y) < 0$, $\forall\, y \in [0, K^p]$, donde

$$H(y) = \frac{K^p - y}{10^p - y}\,.$$

Esto es una consecuencia de que $g_{p,K}(x) = 10(H(x^p))^{1/p}$. De manera elemental se obtiene que si $K < 10$ entonces

$$H'(y) = \frac{K^p - 10^p}{(10^p - y)^2} < 0\,,\ \forall\, y \in [0, K^p].$$

La segunda parte de la proposición se puede probar directamente, es decir, calculando $g_{p,K}(g_{p,K}(x))$ y simplificando el resultado. Una forma más elegante de probarlo es utilizar el hecho de que las curvas de nivel de una función simétrica son involuciones, con lo cual el resultado se deduce de la fórmula (3.4). □

Observación 2. *La propiedad de que las curvas de nivel de una función simétrica son involuciones se explica en el trabajo de Wiener y Watkins [4]. El lector interesado en las involuciones puede encontrar más propiedades y referencias en un trabajo posterior de los mismos autores [5].*

Una consecuencia útil de la Proposición 1 es la siguiente:

Corolario 1. *Si x_p es un punto fijo de $g_{p,K}$ entonces $g'_{p,K}(x_p) = -1$.*

Demostración. Sin más que aplicar la regla de la cadena a la relación (6.6), se tiene

$$g'_{p,K}(g_{p,K}(x))\, g'_{p,K}(x) = 1,\ \forall\, x \in [0, K].$$

En un punto fijo x_p, la relación anterior se convierte en

$$(g'_{p,K}(x_p))^2 = 1.$$

Como $g_{p,K}$ es decreciente, la única posibilidad es que $g'_{p,K}(x_p) = -1$. □

Utilizaremos el Corolario 1 para relacionar los puntos fijos de $g_{p,K}$ con los extremos locales de la función que mide la distancia de la curva de nivel $N_p(x, y) = K$ al origen. Como es habitual, trabajaremos con el cuadrado de la distancia para simplificar los cálculos. Consideramos entonces la función

$$d_{p,K}(x) := \|(x, g_{p,K}(x))\|^2 = x^2 + (g_{p,K}(x))^2. \tag{6.7}$$

Proposición 2. *Si x_p es un punto fijo de $g_{p,K}$ entonces $d'_{p,K}(x_p) = 0$.*

Demostración. Aplicando las reglas elementales de derivación se obtiene:

$$d'_{p,K}(x) = 2x + 2g_{p,K}(x)g'_{p,K}(x).$$

Si x_p es un punto fijo de $g_{p,K}$ entonces, por el Corolario 1,

$$d'_{p,K}(x_p) = 2x_p + 2x_p g'_{p,K}(x_p) = 2x_p - 2x_p = 0.$$

□

Cálculos directos prueban que existe un único punto fijo de $g_{p,K}$ en $[0, K]$ y viene dado por la expresión

$$c_{p,K} = 10\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{K}{10}\right)^p}\right)^{1/p}. \tag{6.8}$$

El siguiente resultado se prueba mediante cálculos elementales, usando la expresión (6.6) y el Corolario 1.

Proposición 3. *Para el punto fijo definido en (6.8) se cumple la siguiente propiedad:*

$$d''_{p,K}(c_{p,K}) > 0 \Longleftrightarrow \frac{p^2}{4} + \left(\frac{K}{10}\right)^p < 1.$$

Para cada $K \in (0, 10)$, denotamos por $p^*(K)$ la única solución positiva de la ecuación implícita

$$\frac{p^2}{4} + \left(\frac{K}{10}\right)^p = 1. \tag{6.9}$$

Las proposiciones 2 y 3 permiten afirmar que el punto fijo $c_{p,K}$ es un mínimo local de la función $d_{p,K}$ para todo $p \in (0, p^*(K))$. Es inmediato deducir de la ecuación (6.9) que $p^*(K) \to 2$ cuando $K \to 0$ y $p^*(K) \to 0$ cuando $K \to 10$. En la figura 5 se representan los valores de $p^*(K)$ para $K \in (0, 10)$.

En el caso particular del nivel $K = 5$ (el del aprobado), se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2. *La función $d_{p,5}$ alcanza un mínimo local en $c_{p,5}$ si y sólo si $0 < p < p^*(5)$, donde $p^*(5) \approx 1{,}65122$ es la única solución positiva de la ecuación*

$$\frac{p^2}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^p = 1.$$

El Corolario 2 prueba que la estrategia $x = y$ (es decir, obtener la misma calificación en la evaluación continua y en el examen final) es una solución del problema de minimizar la función $d_{p,5}$ siempre que se use la fórmula (3.3) con $0 < p < p^*(5)$.

Nuestras simulaciones muestran que de hecho $d_{p,5}$ alcanza un mínimo global en $c_{p,5}$ si $0 < p < p^*(5)$, pero no hemos sido capaces de probarlo. Dejamos aquí propuesto el siguiente problema abierto:

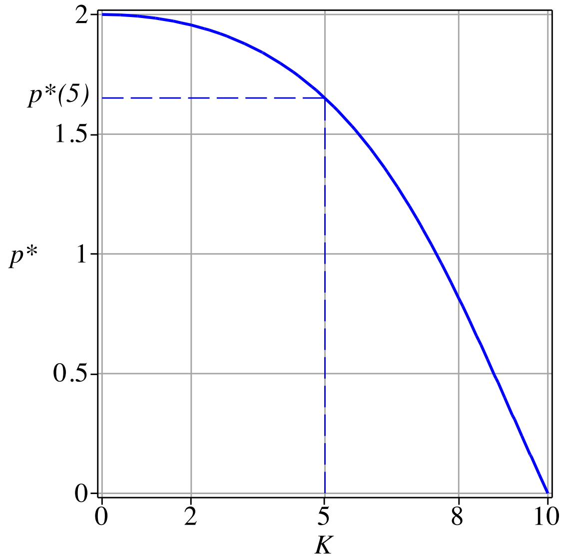


Figura 5: Representación de $p^*(K)$ para $K \in (0,10)$. Se destaca el valor de $p^*(5) \approx 1{,}65122$.

Problema 1. *Probar que* $d''_{p,5}(x) > 0$ *para todo* $x \in (c_{p,5}, 5)$ *si* $0 < p < p^*(5)$.

Nótese que probar esta afirmación es suficiente ya que, de ser cierta, se deduce del Teorema de Rolle que $d'_{p,5}$ no se puede anular en el intervalo $(c_{p,5}, 5)$, y por tanto $d_{p,5}$ no tiene otro mínimo local en ese intervalo. Por la propiedad de simetría de N_p, tampoco pueden existir mínimos locales de $d_{p,5}$ en $(0, c_{p,5})$.

Resta comentar qué sucede si $p > p^*(5)$. Nuestros estudios numéricos muestran que en este caso el mínimo global deja de alcanzarse en un punto fijo de $g_{p,5}$. A cambio, $d_{p,5}$ tiene un máximo local en c_p y se alcanza un mínimo local (y global) en dos puntos $c_{1p} < c_{p,5} < c_{2p}$, de tal modo que $c_{1p} \to 0$ y $c_{2p} \to 5$ si $p \to 2^-$. Nótese que, por la propiedad de simetría de N_p, se cumple que $c_{2p} = g_{p,5}(c_{1p})$.

Para $p > 2$ los mínimos absolutos de d_p en $[0,5]$ se alcanzan para $x = 0$ y $x = 5$. Es decir, una estrategia de mínimo esfuerzo es tener un cero en la evaluación continua y alcanzar un 5 en el examen final. Se podría interpretar que el esfuerzo invertido en la evaluación continua deja de ser rentable si se usa la fórmula (3.3) con $p > 2$.

Agradecimientos

Eduardo Liz agradece a los profesores José Ángel Cid y Juan Luis Varona que le hayan animado a escribir una nota sobre el método de evaluación. Los dos autores agradecen al profesor Armengol Gasull que los haya puesto en contacto y sus sugerencias, incluyendo la referencia [5].

Los aspectos principales de la organización del trabajo fueron discutidos durante una visita de Xavier Bardina a la UVIGO. Este autor agradece la hospitalidad del Departamento de Matemática Aplicada II.

Referencias

[1] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Series: Mathematics and Its Applications, Vol. 560, 2nd ed., Springer, 2003.

[2] J. E. Marsden y A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial* (5ª ed.), Pearson, 2004.

[3] H. R. Thieme, *Mathematics in Population Biology,* Princeton University Press, 2003.

[4] J. Wiener y W. Watkins, *A classroom approach to involutions,* Coll. Math. J. **19** (1988), 247–250.

[5] J. Wiener y W. Watkins, *A glimpse into the wonderland of involutions,* Missouri J. Math. Sci. **14** (2002), 175–185.

Xavier Bardina
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Xavier.Bardina@uab.cat

Eduardo Liz
Departamento de Matemática Aplicada II
Universidad de Vigo
eliz@dma.uvigo.es

Publicat el 8 de novembre de 2011