Transformada de Laplace

CÁLCULO II

Departamento de Matemática Aplicada II
E.E. Telecomunicación

Universidade de Vigo

Table of contents

Definición

Se llama **Transformada de Laplace** de la función $f(t),\ t \geq 0$, a la función

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \ ,$$

siempre y cuando la función esté definida.

Ejemplo. Sea $f(t) = e^{at}$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty$$

Por tanto,

$$\text{si } a > s \ \Rightarrow \ \frac{1}{a-s}(e^\infty - e^0) = \infty \ \ \Rightarrow \ \ \nexists \mathscr{L}\{e^{at}\}$$

$$\text{si } a < s \Rightarrow \frac{1}{a-s}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \ .$$

Es decir,

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad / \quad s > a \ .$$

Definición

Sea $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, llamaremos **Transformada Inversa de Laplace**, $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Observación

La transformada de Laplace es una herramienta que permite resolver problemas de valor inicial de manera más sencilla. La idea es reemplazar un problema de valor inicial en el dominio del tiempo t por una ecuación algebraica en el dominio de s (la frecuencia en análisis de circuitos).

Algunas transformadas:

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\operatorname{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$		

Sean $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

Linealidad

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Primera Traslación

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

Segunda Traslación

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \Rightarrow \mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Cambio de escala

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

Transformada de las derivadas

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}\{f^{(n}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2}(0) - f^{(n-1}(0)$$

$$\mathscr{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^nF^{(n}(s)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n}(s)\} = (-1)^nt^nf(t)$$

Transformada de las integrales

$\mathscr{L}\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \frac{F(s)}{s}$

$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t f(x)\,dx$

$\mathscr{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(x)\,dx,$ siempre que $\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$

$\mathscr{L}^{-1}\{\int_s^\infty F(x)\,dx\} = \frac{f(t)}{t}$

Teorema de Convolución

$\mathscr{L}\{\int_0^t f(x)g(t-x)\,dx\} = F(s)G(s)$

$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\}$

En primer lugar, se hace la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \quad \Rightarrow \begin{array}{r} A+B=3 \\ -3A+B=7 \end{array} \Rightarrow A=-1, \quad B=4,$$

Aplicando las propiedades de linealidad:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}\} =$$

$$= -\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + 4\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\}$

Puede plantearse de dos formas:

- Partiendo de que $\mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} = F(s)$, utilizando la primera traslación se obtiene
$$\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\} = F(s-3) \;=\; \frac{2}{(s-3)^3}\,.$$
- Por otra parte, partiendo de $\mathscr{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3} = F(s)$, y teniendo en cuenta que
$$F'(s) = \frac{-1}{(s-3)^2} \quad \text{y} \quad F''(s) = \frac{2}{(s-3)^3}\,,$$
se concluye que
$$\mathscr{L}\{e^{3t}t^2\} = (-1)^2 F''(s) = \frac{2}{(s-3)^3}\,.$$

Ejemplo. Calcular $\mathscr{L}\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\}$

Como $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)}{1} = 1$, se tiene que

$$\mathscr{L}\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\} = \int_s^\infty F(x)\, dx, \quad \text{con } F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Entonces,

$$\mathscr{L}\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\} = \int_s^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x)\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

Ejemplo. Hallar $\mathscr{L}\{h(t)\}$, siendo $h(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(2x)\, \cos(t-x)\, dx$

$$\mathscr{L}\{h(t)\} = \mathscr{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}\mathscr{L}\{\cos(t)\} = \frac{2}{s^2+4}\,\frac{s}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Delta de Dirac

Se llama **Delta de Dirac**, $\delta(t)$, al límite $\lim\limits_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$, donde

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon}, & \text{si } 0 \leq t \leq \epsilon \\ \\ 0 & \text{si } t > \epsilon \end{cases}$$

En algunos textos se conoce como "función" **impulso** (señal de amplitud infinita y duración cero), pero no es una función sino una distribución que verifica:

$$\int_0^\infty \delta(t-a) f(t) dt = f(a) \quad \text{si } f \text{ es continua y } a \geq 0$$

Utilizando esa propiedad, se prueba que la transformada de Laplace de $\delta(t)$ es:

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Además, la "primitiva" de la Delta de Dirac es la función escalón.

Aplicación a la resolución de EDOs

Sea una EDO de segundo orden lineal con coeficientes constantes

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t), \quad a_0 \neq 0$$

Aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados, se convierte la EDO en una ecuación algebraica, cuya solución viene dada por $\mathscr{L}\{y(t)\} = y_s$, de forma que la solución de la ecuación diferencial será $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{y_s\}$

Ejemplo. Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y'' + y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$\mathscr{L}\{y''+y\} = \mathscr{L}\{t\} \Rightarrow \mathscr{L}\{y''\}+\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t\} \Rightarrow s^2 y_s - sy(0) - y'(0) + y_s = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2 y_s - s + 2 + y_s = \frac{1}{s^2} \Rightarrow y_s(s^2+1) = \frac{1}{s^2} + (s-2) = \frac{1+s^2(s-2)}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$\text{con } A = 1,\ B = 1,\ C = -3 \ \Rightarrow\ y_s = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} \ \Rightarrow$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} + \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} - 3\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = t + \cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t)$$

Ejemplo. Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y'' + y = \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$\mathscr{L}\{y''\} + \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\cos(t)\} \Rightarrow \ s^2 y_s - sy(0) - y'(0) + y_s = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$y_s(s^2+1) - 1 = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow y_s = \frac{s^2+s+1}{(s^2+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2}$$

$$\text{con } A = 0,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0 \Rightarrow y_s = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} + \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\} = \operatorname{sen}(t) + \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo. Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$\mathscr{L}\{y''\} - 4\mathscr{L}\{y'\} + 4\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^3 e^{2t}\} \Rightarrow$$

$$s^2 y_s - sy(0) - y'(0) - 4sy_s + 4y(0) + 4y_s = \frac{3!}{(s-2)^4} \Rightarrow$$

$$y_s = \frac{6}{(s-2)^4(s^2-4s+4)} = \frac{6}{(s-2)^6} \Rightarrow$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{6}{(s-2)^6}\} = \frac{1}{20} t^5 e^{2t}$$

Observaciones sobre la notación

En la asignatura *Análisis de circuitos lineales*, entre otras, se habla de la función escalón unidad $u(t)$ definida por :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En nuestra notación, como nos restringimos a funciones definidas en el intervalo $[0, \infty)$, se corresponde con la función constante 1 y, por tanto, no aparece escrita explicitamente. Por ejemplo, para $t \geq 0$, $k\,u(t) \equiv k,1 \equiv k$.

Puede probarse que la “derivada” de la función escalón $u(t)$ es la Delta de Dirac $\delta(t)$.

En cuanto al estudio de las fracciones simples cuando intervienen raíces complejas conjugadas, es decir, de la forma:

$$F(s) = \frac{As+B}{(s-a)^2+b^2} = \frac{As+B}{(s-(a+bj))(s-(a-bj))} = \frac{\alpha}{s-(a+bj)} + \frac{\beta}{s-(a-bj)}$$

debe tenerse en cuenta que:

$$\alpha = \frac{A}{2} - \frac{Aa+B}{2b}j, \qquad \beta = \frac{A}{2} + \frac{Aa+B}{2b}j = \bar{\alpha}$$

Si denotamos $\gamma = \dfrac{A}{2}$ y $\eta = -\dfrac{Aa+B}{2b}$, es decir, $\alpha = \gamma + \eta j$, se tiene que la transformada inversa de Laplace del término es:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = Ae^{at}\cos(bt) + \frac{Aa+B}{b}e^{at}\,\mathrm{sen}(bt) = 2e^{at}(\gamma\cos(bt) - \eta\,\mathrm{sen}(bt))$$

Si tenemos en cuenta que $|\alpha| = \sqrt{\gamma^2+\eta^2}$, y elegimos θ tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\gamma}{|\alpha|}, \qquad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{\eta}{|\alpha|}$$

la transformada inversa anterior puede escribirse también como:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = 2|\alpha|e^{at}\cos(bt+\theta)$$

Ejercicios propuestos

1. Halla las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

$$f(t) = t^2 + 6t - 3$$
$$f(t) = 3e^{-4t} + \frac{1}{2}\cos(5t) + \frac{3}{4}t^3 + 8$$
$$f(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

2. Halla las siguientes Transformadas Inversas de Laplace:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+6s+13}\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\}$$

3. Usando la Transformada de Laplace, resuelve

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}\ ,\ \ y(0) = 2\ ,\ \ y'(0) = 12$$
$$y'' - 6y' + 13y = 2e^{3t}\cos(2t)\ ,\ \ y(0) = 1\ ,\ \ y'(0) = 1$$
$$y'' - y = 4e^{t} - 2e^{-t}\ ,\ \ y(0) = 1\ ,\ \ y'(0) = 4$$
$$y'' - 2y' = 1\ ,\ \ y(0) = 2\ ,\ \ y'(0) = 1$$

4. Sea $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$. Calcula $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ y deduce $\mathscr{L}^{-1}\{F^{(5}(s)\}$ utilizando propiedades de la transformada de Laplace.