Cálculo integral de funciones de varias variables

1 La integral doble

Sea un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 1 .- *Se dice que D es una región elemental de $\mathbb{R}^2$ de tipo I (o proyectable sobre el eje X) si y solo si existen dos funciones continuas $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \ \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)\}$$

Definición 2 .- *Se dice que D es una región elemental de $\mathbb{R}^2$ de tipo II (o proyectable sobre el eje Y) si y solo si existen dos funciones continuas $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \leq y \leq d, \ \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y)\}$$

Definición 3 .- *Se dice que D es una región elemental de $\mathbb{R}^2$ de tipo III (o proyectable sobre los ejes X e Y) si y solo es simultáneamente una región elemental de tipo I y de tipo II.*

Teorema 1 *(Integrales dobles en regiones de tipo I) .- Sea una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en una región elemental*

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \ \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)\}$ de tipo I. Entonces:

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Teorema 2 *(Integrales dobles en regiones de tipo II) .- Sea una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en una región elemental $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \leq y \leq d, \ \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y)\}$ de tipo II. Entonces:*

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Definición 4 *.- La medida de una región $D \subset \mathbb{R}^2$, que denominaremos área de D, se define como:*

$$A(D) = \int_D 1\, dx\, dy$$

Definición 5 *.- Sea la aplicación $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^1$ una transformación definida por:*

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \qquad \forall (u, v) \in D^*.$$

Se define el jacobiano de la transformación T como el determinante:

$$J(T) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1 *(Transformación a coordenadas polares) .- Las coordenadas polares:*

$$T(r,\theta) = (r\ \cos(\theta), r\ \mathrm{sen}(\theta)) \equiv (x(r,\theta), y(r,\theta))$$

para $0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$, *tienen como jacobiano:*

$$J(T) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\ \mathrm{sen}(\theta) \\ \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\ \cos(\theta) \end{vmatrix} = r\ \cos^2(\theta) + r\ \mathrm{sen}^2(\theta) = r.$$

Teorema 3 *(Teorema del cambio de variable) .- Sean* D *y* D^* *dos regiones elementales de* $\mathbb{R}^2$, *y sea* $T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ *una transformación de clase* $\mathcal{C}^1$, *biyectiva en el interior de* D^* *y tal que* $T(D^*) = D$. *Entonces, para toda función* f *integrable en* D *se tiene:*

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{D^*} (f \circ T)(u,v)\, |J(T)|\, du\, dv$$

Lema 1 *.-* T *es un biyección de un conjunto* A *en* $T(A)$ *si y solo si* $J(T) \neq 0$ *en* A.

2 La integral triple

Sea un conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$.

Definición 6 *.- Se dice que* D *es una región elemental de* $\mathbb{R}^3$ *de tipo I (o proyectable sobre el plano* XY*) si y solo si puede expresarse como:*

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ a \leq x \leq b,\ \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x),$$

$$\gamma_2(x,y) \leq z \leq \gamma_1(x,y)\}$$

o como:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ c \leq y \leq d, \ \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y),$$
$$\gamma_2(x, y) \leq z \leq \gamma_1(x, y)\}$$

con ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2, γ_1, γ_2 *funciones continuas.*

Observación 1 .- *Por tanto,* D *es una región elemental de* $\mathbb{R}^3$ *de tipo I si y solo si*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D', \ \gamma_2(x, y) \leq z \leq \gamma_1(x, y)\}$$

con D' *región elemental de* $\mathbb{R}^2$*.*

Definición 7 .- *Se dice que* D *es una región elemental de* $\mathbb{R}^3$ *de tipo II (o proyectable sobre el plano* YZ*) si y solo si puede expresarse como:*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ c \leq y \leq d, \ \phi_2(y) \leq z \leq \phi_1(y),$$
$$\gamma_2(y, z) \leq x \leq \gamma_1(y, z)\}$$

o como:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ e \leq z \leq f, \ \psi_2(z) \leq y \leq \psi_1(z),$$
$$\gamma_2(y, z) \leq x \leq \gamma_1(y, z)\}$$

Definición 8 .- *Se dice que* D *es una región elemental de* $\mathbb{R}^3$ *de tipo III (o proyectable sobre el plano* XZ*) si y solo si puede expresarse como:*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \leq x \leq b, \ \phi_2(x) \leq z \leq \phi_1(x),$$
$$\gamma_2(x, z) \leq y \leq \gamma_1(x, z)\}$$

o como:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ e \leq z \leq f, \ \psi_2(z) \leq x \leq \psi_1(z),$$
$$\gamma_2(x, z) \leq y \leq \gamma_1(x, z)\}$$

Definición 9 .- *Se dice que D es una región elemental de $\mathbb{R}^3$ de tipo IV si y solo es simultáneamente una región elemental de tipos I, II y III.*

Teorema 4 *(Integrales triples en regiones de tipo I) .- Sea una función $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua en una región elemental $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; a \leq x \leq b, \; \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x), \; \gamma_2(x, y) \leq z \leq \gamma_1(x, y)\}$ de tipo I. Entonces:*

$$\int_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \left(\int_{\gamma_2(x,y)}^{\gamma_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

(De manera análoga para regiones de tipos II y III.)

Definición 10 .- *La medida de una región $D \subset \mathbb{R}^3$, que denominaremos volumen de D, se define como:*

$$V(D) = \int_D 1\, dx\, dy\, dz$$

Definición 11 .- *Sea la aplicación $T : D^* \subset \mathbb{R}^3 \to D \subset \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ una transformación definida por:*

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), \;\; \forall (u, v, w) \in D^*.$$

Se define el jacobiano de la transformación T como el determinante:

$$J(T) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Teorema 5 *(Teorema del cambio de variable) .- Sean D y D^* dos regiones elementales de $\mathbb{R}^3$, y sea $T : D^* \subset \mathbb{R}^3 \to D \subset \mathbb{R}^3$ una transformación de clase $\mathcal{C}^1$, biyectiva en el interior de D^* y tal que $T(D^*) = D$. Entonces, para toda función f integrable en D se tiene:*

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{D^*} (f \circ T)(u,v,w)\,|J(T)|\,du\,dv\,dw$$

Ejemplo 2 *(Transformación a coordenadas cilíndricas) .- Las coordenadas cilíndricas:*

$$T(r,\theta,z) = (r\,\cos(\theta), r\,\operatorname{sen}(\theta), z)$$

para $0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\infty < z < \infty$, tienen como jacobiano:

$$J(T) = r.$$

Ejemplo 3 *(Transformación a coordenadas esféricas) .- Las coordenadas esféricas:*

$$T(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\,\cos(\theta)\,\operatorname{sen}(\varphi), \rho\,\operatorname{sen}(\theta)\,\operatorname{sen}(\varphi), \rho\,\cos(\varphi))$$

para $0 \leq \rho < \infty,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi$, tienen como jacobiano:

$$J(T) = -\rho^2\,\operatorname{sen}(\varphi).$$