Cálculo integral de funciones de una variable

1 La integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$.

Definición 1 .- *Una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ del intervalo $[a, b]$ es una sucesión finita creciente de puntos del intervalo tal que:*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

Se define $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, n$. El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ se denota $\mathcal{P}[a, b]$.

Definición 2 .- *Si se denotan, para $i = 1, \ldots, n$:*

$$M_i = \sup\{f(x) \,:\, x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) \,:\, x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

se define la suma superior de f relativa a la partición P:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta t_i$$

y la suma inferior de f relativa a la partición P:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta t_i$$

Definición 3 .- *Se define la integral superior de Riemann de* f *en* $[a,b]$*:*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

y la integral inferior de Riemann de f *en* $[a,b]$*:*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

Teorema 1 .-

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Definición 4 .- *Se dice que* f *es Riemann integrable en* $[a,b]$ *(y se denota* $f \in \mathcal{R}([a,b])$*) si y solo si se da la igualdad:*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

A este valor se le denomina la integral de Riemann de f *en* $[a,b]$*, y se denota:*

$$\int_a^b f \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 2 .- $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *si y solo si se satisface la condición de Cauchy-Riemann en* $[a,b]$*, esto es,*

$$\forall \varepsilon > 0, \;\exists P \in \mathcal{P}[a,b] \;\; \textit{tal que} \;\; U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

2 Propiedades

Principales propiedades de la integral de Riemann:

1. $f \in \mathcal{R}([a,b]),\ c \in (a,b) \ \Leftrightarrow\ f \in \mathcal{R}([a,c])$ y $f \in \mathcal{R}([c,b])$. Además,
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. $f,g \in \mathcal{R}([a,b]) \ \Rightarrow\ f+g \in \mathcal{R}([a,b])$. Además,
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

3. $f \in \mathcal{R}([a,b]),\ \lambda \in R \ \Rightarrow\ \lambda f \in \mathcal{R}([a,b])$. Además,
$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$

4. $f,g \in \mathcal{R}([a,b]),\ f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g$

5. $f \in \mathcal{R}([a,b]) \ \Rightarrow\ |f| \in \mathcal{R}([a,b])$. Además,
$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$$

6. $f,g \in \mathcal{R}([a,b]) \ \Rightarrow\ fg \in \mathcal{R}([a,b])$.

7. $f,g \in \mathcal{R}([a,b]),\ |g(x)| \ge c > 0,\ \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow\ \dfrac{f}{g} \in \mathcal{R}([a,b])$.

3 Funciones Riemann integrables

Teorema 3 .- *Toda función* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monótona y acotada en* $[a, b]$ *es Riemann integrable en* $[a, b]$.

Teorema 4 .- *Toda función* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *(salvo, a lo sumo, en un conjunto de contenido cero, por ejemplo, un conjunto finito de puntos o una sucesión convergente) y acotada es Riemann integrable en* $[a, b]$.

Corolario 1 .- *Sean dos funciones* f, $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que el conjunto de puntos donde ambas son distintas*

$$A = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$$

tiene contenido cero. Entonces, f *es Riemann integrable en* $[a, b]$ *si y sólo si* g *también lo es. Además, en este caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^b g \ .$$

4 Teoremas fundamentales del Cálculo Integral

Teorema 5 *(Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral) .- Sea* f *acotada y Riemann integrable en* $[a, b]$. *Entonces:*
(a) La función $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es continua en $[a, b]$.

(b) Si además f es continua en $x_0 \in [a,b]$, se tiene que F es derivable en x_0, y verifica:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Definición 5 *.- Dada $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que una función $F : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $[a,b]$ es una primitiva de f en $[a,b]$ si y solo si*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

Si F es una primitiva de f en $[a,b]$, y le sumamos una constante $c \in \mathbb{R}$, la función resultante $F + c$ también es una primitiva de f en $[a,b]$. Se denomina integral indefinida de f al conjunto de todas sus primitivas, y se suele denotar $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Corolario 2 *.- Sean $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $g, h : [a,b] \to [a,b]$ derivables en $[a,b]$. Entonces:*

(a) La función $F : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

es continua en $[a,b]$.

(b) Si además f es continua en $x_0 \in [a,b]$, se tiene que F es derivable en x_0, y verifica:

$$F'(x_0) = f(h(x_0))\,h'(x_0) - f(g(x_0))\,g'(x_0)$$

Teorema 6 *(Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral) .- Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y acotada, donde:*

$$m = \inf\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$$

$$M = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$$

Entonces $\exists c \in [m, M]$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f = c(b-a)$.

Si además f *es continua en* $[a,b]$, *se tiene que* $\exists x_0 \in [a,b]$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f = f(x_0)(b-a)$.

Teorema 7 *(Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Regla de Barrow) .- Sea* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *y sea* F *una primitiva de* f *en* $[a,b]$. *Entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Teorema 8 *(Integración por partes) .- Sean* $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$. *Entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Observación 1 *.- Para en caso de integrales indefinidas se tiene:*

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

o, en una escritura equivalente más habitual,

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Teorema 9 *(Integración por cambio de variable) .- Sean* $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $g : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g \in \mathcal{C}^1([c,d])$ *y* $g([c,d]) \subset [a,b]$. *Entonces, si* $f \in \mathcal{C}(g([c,d]))$ *o bien* $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in [c,d]$, *se tiene que:*

$$\int_c^d f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\, dt$$

(Se dice que se ha realizado el cambio de variable $t = g(x)$*.)*

5 Integrales impropias

Definición 6 *.- Se denomina integral impropia de primera especie a la integral de una función* f *acotada en un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *no acotado, esto es,* $\displaystyle\int_a^\infty f$, $\displaystyle\int_{-\infty}^b f$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f$.

Definición 7 *.- Sea* $f : [a,\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *acotada,* $f \in \mathcal{R}([a,t])$, $\forall t > a$. *Se define la integral impropia de primera especie de* f *en* $[a,\infty)$ *como:*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

(a) Si este límite existe y es finito, la integral impropia se dice convergente.
(b) Si existe, pero no es finito, se dice divergente.
(c) Si el límite no existe, se dice oscilante.

Definición 8 *.- Se denomina integral impropia de segunda especie a la integral de una función* f *no acotada en un intervalo acotado* $I = [a,b]$.

Definición 9 .- *Sea* $f : [a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$*,* $f \in \mathcal{R}([a,t])$*,* $\forall t \in (a,b)$*. Se define la integral impropia de segunda especie de* f *en* $[a,b]$ *como:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

(a) Si este límite existe y es finito, la integral impropia se dice convergente.

(b) Si existe, pero no es finito, se dice divergente.

(c) Si el límite no existe, se dice oscilante.