Tema 1 – Generalidades sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.)

1.1 Definiciones

Se llama **ecuación diferencial** a toda ecuación que **contiene** las **derivadas** de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.

Se llama **ecuación diferencial ordinaria** (E. D. O.) a una ecuación diferencial en la que aparecen **derivadas ordinarias** de una o más variables dependientes **respecto a una única variable independiente**.

Se llama **ecuación diferencial en derivadas parciales** (E. D. P.) a una ecuación diferencial en la que aparecen **derivadas parciales** de una o más variables dependientes **respecto a más de una variable independiente**.

Muchas de las leyes generales de la naturaleza encuentran su expresión más natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. También tienen múltiples aplicaciones en Geometría, Ingeniería, Economía y muchos otros campos de las Ciencias Aplicadas.

Se denomina **orden** de una ecuación diferencial al **orden de la derivada más alta** entre todas las que figuran en dicha ecuación.

Ejemplo 1 La ecuación: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy(\dfrac{dy}{dx})^3 = e^x$ tiene orden 2.

Una ecuación diferencial ordinaria **lineal de orden n** en la variable dependiente y y en la variable independiente x es una **ecuación** que puede expresarse de la forma:

$$\boxed{a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x),}$$

donde $a_0(x)$ es una función **no idénticamente nula**.

Ejemplo 2

1.
$$3\,\frac{d^3y}{dx^3} + y = 2$$
es una E. D. O. **lineal de orden 3** y **coeficientes constantes**.

2.
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\,\frac{dy}{dx} + (x^2 - 2)y = 22x$$
es una E. D. O. **lineal de orden 2** y **coeficientes variables**.

3.
$$xe^x\,\frac{d^4y}{dx^4} = 25\,x^3$$
es una E. D. O. **lineal de orden 4** y **coeficientes variables**.

4.
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5y\,\frac{dy}{dx} = x$$
es una E. D. O. **no lineal** de **orden 2**.

Consideremos la E. D. O. de orden n:

$$\boxed{F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0,}$$

donde F es una **función real** de sus **(n+2) argumentos**.

Sea f una función **real** definida para todo x **en** un intervalo real I que posea **derivada n-ésima** en todo I. La función f es una **solución explícita** de la E. D. O. en el intervalo I **si**:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n}(x))$$

está definida para todo x de I y verifica:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Es decir, la **sustitución de y por f** en la E. D. O. reduce la ecuación a una **identidad en I**.

Se dice que una relación $g(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de la E. D. O. en el intervalo I **si** esta relación define, al menos, una **función real f** de la variable x en I de manera que esta función sea una **solución explícita de la E. D. O.** en dicho intervalo I.

Ejemplo 3

1. La función f definida en toda la recta real mediante:

$$f(x) = a\, sen(x) + b\, cos(x),\ \ a, b \in \mathbb{R}$$

   es una **solución explícita** de la E. D. O.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

   en todo $\mathbb{R}$, pues: $f''(x) + f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. La relación:

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

   es una **solución implícita** de la E. D. O.

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

   en el intervalo $I = (-5, 5)$. En efecto, dicha relación define dos funciones:

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad \forall x \in I,$$

$$f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}, \quad \forall x \in I,$$

   que son **soluciones explícitas** de la E. D. O. en I.

Observación 1 La relación:

$$x^2 + y^2 + 25 = 0$$

también podría ser una solución implícita de la E. D. O.

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0,$$

pues si derivamos dicha relación respecto a x se obtiene:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

que es equivalente a la E. D. O.

Por tanto, esta relación satisface formalmente la E. D. O. pero de aquí **no** podemos deducir que sea una **solución implícita**, ya que no define una solución real explícita. (La función:

$$f(x) = \pm\sqrt{-25 - x^2}$$

toma valores complejos en toda la recta real).

En consecuencia, la relación es meramente una **solución formal**.

1.2 Familias de curvas. Trayectorias ortogonales

Sea la familia de funciones o curvas:

$$g(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

dependiente de n **parámetros**. La **derivación** n **veces** con respecto a la variable x conduce a $(n+1)$ **ecuaciones** de las que se podrán eliminar las n constantes y obtener una relación de tipo:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

esto es, una **E. D. O. de orden** n.

A dicha **familia de curvas** se le denominará **solución general** de la E. D. O. correspondiente.

Ejemplo 4

1. $g(x, y, c) = y - x^2 - c$ es una **familia de parábolas**.

2. $g(x, y, a, b, r) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$ es una **familia de circunferencias**.

Observación 2 En general, la familia de curvas no englobará todas las soluciones de la E. D. O.

Observación 3 Tampoco se podrá asegurar que para una E. D. O. dada, exista una familia de curvas que sea su solución.

Ejemplo 5 Sea la **E. D. O.** de primer orden: $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.
Las funciones de la forma:

$$g(x, c) = h_c(x) = x^2 + c\,, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

son soluciones de dicha ecuación para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Es decir, tenemos una familia de soluciones, que se denomina **solución general**.

Cada una de las funciones de la familia es una **solución particular** de la ecuación.

Sea la E. D. O. de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y),$$

donde G es una función real que hace corresponder a cada punto (x, y) una **pendiente** $G(x, y)$. Supongamos que dicha E. D. O. tiene una **familia de soluciones** de la forma $y = g(x, c)$ donde c es el parámetro de la familia.

A su **representación geométrica en el plano** se le llama **familia uniparamétrica de curvas** (las pendientes de cada punto de las curvas vienen dadas directamente por la E. D. O.). **Cada una de las curvas** de la familia recibe el nombre de **curva integral** de dicha ecuación.

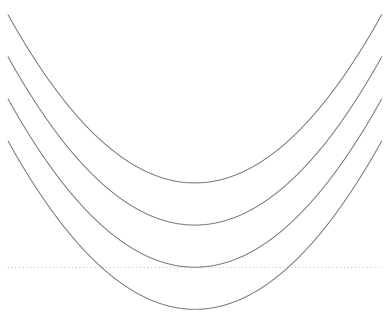
Ejemplo 6 Consideremos de nuevo la E. D. O. de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Esta ecuación tiene una familia de soluciones:

$$y = x^2 + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Su representación geométrica es la familia uniparamétrica de curvas, donde cada una de las curvas integrales es una parábola.



Ejemplo 7 La E. D. O. de tercer orden:

$$y'''(1+(y')^2) - 3y'(y'')^2 = 0$$

tiene como familia de soluciones:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Su representación geométrica es una familia de curvas que depende de tres parámetros, a, b y r, donde cada una de las curvas integrales es una circunferencia.

Observación 4 Puede ocurrir que la eliminación de los n parámetros de una familia de curvas lleve a una E. D. O. de orden menor que n. Esto ocurre cuando los parámetros no son esenciales.

Por ejemplo, la familia de 2 parámetros:

$$y = c_1 + log(c_2 x)$$

tiene asociada la ecuación de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Pero, en realidad, dicha familia puede escribirse simplificadamente como dependiente de un único parámetro:

$$y = log(c\,x)$$

Trayectorias ortogonales

Sea $g(x, y, c) = 0$ una **familia uniparamétrica de curvas**. Cuando una curva **corta a todas las curvas** de la familia en **ángulos rectos**, recibe el nombre de **trayectoria ortogonal** a la familia dada.

Por ejemplo, dada la familia uniparamétrica de circunferencias centradas en el origen, $x^2 + y^2 = r^2$, cualquier recta pasando por el origen es una trayectoria ortogonal.

Si $g(x, y, c) = 0$ es una familia uniparamétrica de curvas, tendrá asociada una **E. D. O. de primer orden**:

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y).$$

Por tanto, cualquier **curva** de la familia que **pase por** el punto (x, y) deberá tener **pendiente** $G(x, y)$ en ese punto. Puesto que una trayectoria ortogonal a la familia corta a cada curva de la familia formando un ángulo recto, la **pendiente de la trayectoria ortogonal** en el punto (x, y) deberá ser $-\dfrac{1}{G(x, y)}$.

Por tanto, la **E. D. O.** de la familia de **trayectorias ortogonales** será:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{G(x,y)},}$$

que tendrá como **solución** una familia uniparamétrica $g_1(x,y,k) = 0$.

Ejemplo 8 Las trayectorias ortogonales a la familia uniparamétrica de parábolas: $y = cx^2$, son las elipses de la familia: $x^2 + 2y^2 = k$.

Trayectorias oblicuas

Sea $g(x,y,c) = 0$ una familia uniparamétrica de curvas. Se denomina **trayectoria oblicua** a la familia a cualquier curva que **corta** a todas las curvas de la familia formando un **ángulo constante** $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Si la **familia uniparamétrica de curvas** tiene asociada una **E. D. O. de primer orden**:

$$\frac{dy}{dx} = G(x,y),$$

entonces la pendiente de la curva de la familia que pase por el punto (x,y) es $G(x,y)$, esto es, el **ángulo** que forma es $arctg(G(x,y))$. Por tanto, la **trayectoria oblicua** a la familia formará un ángulo $arctg(G(x,y)) + \alpha$ en el punto (x,y).

En consecuencia, la **E. D. O.** de la familia de **trayectorias oblicuas** será:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = tg(arctg(G(x,y)) + \alpha).}$$

Teniendo en cuenta que:

$$tg(a+b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a) \cdot tg(b)}$$

se deduce que la ecuación de las **trayectorias oblicuas** es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y) + tg(\alpha)}{1 - G(x,y) \cdot tg(\alpha)}.}$$

1.3 Problemas de valor inicial y de contorno

Supongamos una **E. D. O. de orden n**. Si buscamos una **solución** de la ecuación tal que en un punto x_0 verifique unas **condiciones suplementarias** (tantas condiciones como indique el orden de la ecuación) diremos que estamos ante un **problema con condiciones iniciales**.

Ejemplo 9

1. El problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y' = 2x, \\ y(1) = 4, \end{cases}$$

   tiene como **solución única**: $y(x) = x^2 + 3$.

2. El problema de condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(\pi) = 3, \\ y'(\pi) = -4, \end{cases}$$

   tiene como **solución única**: $y(x) = 4\,sen(x) - 3\,cos(x)$.

Si lo que buscamos es una **solución** de la ecuación tal que en **diferentes puntos** verifiquen unas **condiciones suplementarias** diremos que estamos ante un **problema con condiciones de contorno**.

Ejemplo 10

1. El problema de condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 5, \end{cases}$$

   tiene como **solución única**: $y(x) = cos(x) + 5\,sen(x)$.

2. El problema de condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y(\pi) = 5, \end{cases}$$

   no tiene solución.

Tema 2 – E.D.O. de primer orden

2.1 El problema de Cauchy para ecuaciones de primer orden

Sea una **E. D. O. de primer orden**: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde f es una función definida en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.

El **problema de Cauchy** (o **de valor inicial**) asociado a dicha ecuación consiste en hallar una solución y de la ecuación diferencial definida en un intervalo real que contenga al punto x_0 y que satisfaga la **condición inicial**: $y(x_0) = y_0$.

Generalmente, el **problema de Cauchy** se escribe de la forma abreviada:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Geométricamente, se puede **interpretar** el problema de Cauchy como la **búsqueda** de aquella **curva** perteneciente a la **solución general de la E. D. O.** que pasa por el punto (x_0, y_0).

2.2 Existencia y unicidad de solución

Teorema 1 **Teorema de existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy**
Consideremos la E. D. O.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Supongamos que se verifica:

1. La función f es **continua** en las variables (x, y) en un dominio D.
2. La función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es **continua** en las variables (x, y) en un dominio D.

Entonces, para cualquier punto $(x_0, y_0) \in D$ **existe una única solución** y de la ecuación diferencial definida en un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ que satisface la condición:

$$y(x_0) = y_0.$$

Observación 5 Las condiciones que se imponen en el teorema anterior son **suficientes** pero **no necesarias**, es decir, pueden rebajarse. En efecto, la **continuidad de** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ puede **sustituirse** por una propiedad más débil para f, conocida como **condición de Lipschitz** (en la variable y):

$$\boxed{\exists L > 0 \ / \ \mid f(x, y_1) - f(x, y_2) \mid \leq L \mid y_1 - y_2 \mid, \quad \forall\, (x, y_1), (x, y_2) \in D.}$$

Ejemplo 11 Consideremos el problema:

$$\begin{cases} y' = -x^2 + y^2 + 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Tanto $f(x, y) = -x^2 + y^2 + 1$ como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto, el problema de Cauchy tiene solución única $y(x)$ definida en el intervalo $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

En realidad, puede probarse que $y(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 12

1. Consideremos el problema:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

   Tanto $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ son continuas en todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x > 0$. Por tanto, el problema de Cauchy tiene solución única $y(x)$ definida en el intervalo $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

   En realidad, puede probarse que $y(x) = 2\, e^{2(\sqrt{x}-1)}, \ \forall x \in (0, \infty)$.

2. Consideremos ahora el problema:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Como $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ no es continua en el punto $(0, 2)$, no podemos asegurar que el problema tenga solución, pero tampoco que no la tenga.

Ejercicio 1 Se considera la función:

$$f(x, y) = \frac{x^3 + x^2y - xy^2 - y^3}{2x^2y + 4xy^2 + 2y^3}.$$

1. Estudiar la existencia y la unicidad de solución del problema:

$$y' = f(x, y), \qquad y(1) = 3.$$

2. Estudiar la existencia y la unicidad de solución del problema:

$$y' = f(x, y), \qquad y(1) = -1.$$

2.3 Prolongación de soluciones. Solución maximal

Sean las funciones:

$$y_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$y_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diremos que y_2 es una **prolongación de y_1** cuando $I_1 \subset I_2$ y se verifique que $y_1(x) = y_2(x), \ \forall x \in I_1$.

Si y_1 e y_2 son dos soluciones de una E. D. O. se dice que **la solución y_2 prolonga a la solución y_1**.

Diremos que una **solución** es **maximal** cuando **no existe** ninguna **otra** solución **que la prolongue**. El intervalo en que está definida esta solución se llamará **intervalo maximal**.

Teorema 2 Sea f una función **continua en D** y verificando la **condición de Lipschitz**. **Entonces todo problema de Cauchy**:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $(x_0, y_0) \in D$, **admite** una **solución maximal**.

Teorema 3 Sean y_1 e y_2 dos **soluciones** de la E. D. O. $y' = f(x,y)$ definidas, respectivamente, en los intervalos $I_1 = [a, x_0]$ e $I_2 = [x_0, b]$, verificando que $y_1(x_0) = y_2(x_0)$. **Entonces** la función y, construida como **prolongación de ambas**, y definida en $[a, b]$ como:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in [a, x_0], \\ y_2(x), & x \in [x_0, b], \end{cases}$$

es **solución de $y' = f(x,y)$ en** $[a, b]$.

2.4 Dependencia respecto a los datos del problema

Teorema 4 (dependencia continua de la solución respecto a la condición inicial) Sea f una función **continua en** (x, y) y que satisface una **condición de Lipschitz en** y con constante k en un dominio D. Sean y_1, y_2 tales que los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_2, \end{cases}$$

tengan **solución única** definida en el intervalo $\mid x - x_0 \mid \leq h$ y que denotaremos, respectivamente, $y^1(x)$ y $y^2(x)$. **Entonces**, si $\mid y_1 - y_2 \mid = \delta$:

$$\boxed{\mid y^1(x) - y^2(x) \mid \leq \delta \cdot e^{kh}, \qquad \text{en} \quad \mid x - x_0 \mid \leq h.}$$

Esto es, la **solución depende con continuidad de la condición inicial**.

Teorema 5 **(dependencia continua de la solución respecto al segundo miembro)** Sean f_1 y f_2 dos funciones **continuas en** (x, y) y que satisfacen una **condición de Lipschitz en** y con constante k en un dominio D, $k = max\{k_1, k_2\}$. Sea $(x_0, y_0) \in D$ tal que los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f_2(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

tengan **solución única** definida en el intervalo $| x - x_0 | \leq h$ y que denotaremos, respectivamente, $y^1(x)$ y $y^2(x)$. **Entonces**, si $| f_1(x, y) - f_2(x, y) | \leq \varepsilon, \ \forall (x, y) \in D$:

$$\boxed{| y^1(x) - y^2(x) | \leq \frac{\varepsilon}{k} \cdot (e^{kh} - 1), \qquad \textbf{en} \ \ | x - x_0 | \leq h.}$$

Esto es, la **solución depende con continuidad del segundo miembro** de la ecuación.

Observación 6 Todos los resultados previos se pueden generalizar, como veremos en próximos temas, al caso de un **problema de Cauchy de orden superior**, esto es, una **E. D. O. de orden n con n condiciones iniciales**.

Para el caso de los **problemas con condiciones de contorno**, la obtención de **resultados similares** es **mucho más costosa**. Así, por ejemplo, podemos considerar una ecuación lineal de segundo orden:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad \forall x \in (x_0, x_1),$$

y plantear el siguiente problema:

Encontrar las soluciones de la E. D. O. anterior que verifiquen las dos condiciones de contorno:

$$\alpha y(x_0) + \beta y'(x_0) = y_0,$$

$$\gamma y(x_1) + \delta y'(x_1) = y_1,$$

donde algunos de los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son no nulos.

Los teoremas de existencia y unicidad de solución de este tipo de problemas de contorno son, en general, mucho más complicados que los correspondientes al problema de Cauchy, y recaen siempre en la búsqueda de soluciones no triviales del correspondiente problema homogéneo ($y_0 = y_1 = 0,\ f(x) = 0$). Es lo que se denomina la búsqueda de autofunciones y autovalores.

Tema 3 – Resolución de E.D.O. de orden 1

Dada una **E. D. O. de primer orden**: $y' = f(x, y)$, estudiaremos distintos métodos para calcular la **solución** $y(x)$ de la ecuación, verificando la **condición inicial:** $y(x_0) = y_0$.

3.1 Ecuaciones exactas

Una ecuación del tipo:
$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

se dice que es una ecuación diferencial **EXACTA si existe** una función $V(x, y)$ verificando:

$$P(x, y) = \partial_x V(x, y), \qquad Q(x, y) = \partial_y V(x, y).$$

La **única solución** $y(x)$ de la ecuación **verificando** $y(x_0) = y_0$ vendrá dada por la expresión:

$$V(x, y) = V(x_0, y_0).$$

Ejemplo 13 La ecuación:
$$y' = -\frac{y}{x}, \qquad y(x_0) = y_0,$$
es exacta, pues basta tomar $V(x, y) = x \cdot y$

Por tanto, la solución del problema será:

$$x \cdot y = x_0 \cdot y_0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{x_0 \cdot y_0}{x}.$$

Teorema 6 **Condición necesaria y suficiente de exactitud**
La **E. D. O.** $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ es **exacta si y sólo si**:

$$\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y).$$

Además, en caso de exactitud, se tiene la expresión:

$$\boxed{V(x,y) - V(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy,}$$

lo que proporciona la **solución implícita**:

$$V(x,y) - V(x_0,y_0) = 0.$$

Ejercicio 2 Demostrar que la E. D. O.

$$y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$$

es exacta y calcular la solución tal que $y(0) = 1$.

3.2 Ecuaciones en variables separadas

Una ecuación en **VARIABLES SEPARADAS** es un tipo de **ecuación exacta** muy sencillo:

$$y' = -\frac{P(x)}{Q(y)}.$$

La solución de la ecuación verificando $y(x_0) = y_0$ será entonces:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0.}$$

Ejemplo 14 La ecuación:

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y(x_0) = y_0,$$

tiene como solución:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Ejercicio 3 Resolver la E. D. O.

$$y' = (1 + y^2) \cdot tg^2(x)$$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

3.3 Ecuaciones homogéneas

Recibe el nombre de ecuación **HOMOGÉNEA** toda ecuación que se pueda expresar en la forma:

$$y' = G(\frac{y}{x}).$$

Se resolverá mediante el **cambio de variable** $u = \frac{y}{x}$:

$$y = u \cdot x \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot x + u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{y' - u}{x}.$$

Por tanto, tenemos que resolver la **ecuación en variables separadas**:

$$\boxed{u' = \frac{G(u) - u}{x} = -\frac{1/x}{\frac{1}{-G(u)+u}}.}$$

Ejercicio 4 Demostrar que la ecuación:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \qquad y(x_0) = y_0,$$

tiene solución implícita:

$$-log(x) + \frac{y^2}{2x^2} = -log(x_0) + \frac{y_0^2}{2x_0^2}.$$

3.4 Factores integrantes

Dada la ecuación diferencial **no exacta**: $$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

si existe una función $\mu(x,y)$ tal que la ecuación:

$$y' = -\frac{P(x,y)\cdot\mu(x,y)}{Q(x,y)\cdot\mu(x,y)}$$

es **exacta**, se dice que $\mu(x,y)$ es un **FACTOR INTEGRANTE** de la ecuación.

Ejemplo 15 La ecuación:

$$y' = -\frac{3y + 4xy^2}{2x + 3x^2 y}$$

no es exacta, pues:

$$\partial_y P = 3 + 8xy \neq 2 + 6xy = \partial_x Q.$$

Si consideramos la función $\mu(x, y) = x^2 y$, entonces:

$$y' = -\frac{3y^2x^2 + 4x^3y^3}{2x^3y + 3x^4y^2}$$

ya es exacta, pues:

$$\partial_y (P \cdot \mu) = 6x^2 y + 12x^3y^2 = \partial_x (Q \cdot \mu).$$

Por tanto, $\mu(x, y) = x^2 y$ es un factor integrante.

A fin de calcular un **factor integrante** de la ecuación: $\quad y' = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$,
debemos **imponer** que la ecuación:

$$y' = -\frac{P(x, y) \cdot \mu(x, y)}{Q(x, y) \cdot \mu(x, y)}$$

sea **exacta**, o equivalentemente:

$$\partial_y(P \cdot \mu) = \partial_x(Q \cdot \mu) \quad \Leftrightarrow$$

$$\partial_y P \cdot \mu + P \cdot \partial_y \mu = \partial_x Q \cdot \mu + Q \cdot \partial_x \mu \quad \Leftrightarrow$$

$$(\partial_y P - \partial_x Q) \cdot \mu = Q \cdot \partial_x \mu - P \cdot \partial_y \mu.$$

Esta ecuación en derivadas parciales puede resolverse en algunos **casos sencillos**:

1. **Si** $\dfrac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q} = \Phi$ depende únicamente de x, **entonces** se tiene el **factor integrante** dependiente exclusivamente de x:

$$\mu(x) = e^{\int \Phi(x) dx}.$$

2. **Si** $\dfrac{\partial_y P - \partial_x Q}{P} = \Psi$ depende únicamente de y, **entonces** se tiene el **factor integrante** dependiente exclusivamente de y:

$$\mu(y) = e^{-\int \Psi(y) dy}.$$

3. También puede calcularse el factor integrante cuando se conoce la **dependencia de x e y**. Por ejemplo:

$$\mu(x \cdot y), \quad \mu(x + y), \quad \mu(x \cdot e^y), \ \ldots$$

Ejemplo 16 La E. D. O. no exacta:

$$y' = -\frac{2x^2 + y}{x^2 y - x}, \quad y(x_0) = y_0$$

admite un factor integrante de la forma:

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2},$$

lo que permite resolver la ecuación, obteniéndose la solución implícita:

$$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = 2x_0 - \frac{y_0}{x_0} + \frac{y_0^2}{2}.$$

Ejercicio 5 Demostrar que la E. D. O.

$$y' = -\frac{y}{x - 3x^3 y^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

admite un factor integrante de la forma $\mu(x \cdot y)$ y, a continuación, resolver dicha ecuación.

3.5 Ecuaciones lineales

Una ecuación **LINEAL** de **primer orden** tiene la expresión: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, o equivalentemente:

$$y' = -\frac{p(x) \cdot y - q(x)}{1} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\ .$$

Como:

$$\frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q} = p(x),$$

admite el **factor integrante**:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Entonces, la solución de la ecuación lineal viene dada por:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right],}$$

donde C es una constante que se determina imponiendo la **condición inicial**.

Ejercicio 6 Comprobar que la solución del problema:

$$y' + \frac{y}{x} - 3x = 0\ , \quad y(1) = 2 \quad \text{es} \quad y(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

Tema 4 – E.D.O. lineales de orden dos

4.1 Resultados básicos

Sea una **E. D. O. lineal de orden** 2 de la forma:

$$\boxed{a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x),}$$

donde vamos a suponer de modo general que:

1. a_0, a_1, a_2, F son funciones **reales continuas** en un intervalo real $[a, b]$.
2. $a_0(x) \neq 0, \ \forall x \in [a, b]$.

Al término $F(x)$ se le denomina **término no homogéneo** (o segundo miembro de la ecuación).

En el caso en que F **sea nula**, se dice que es una **ecuación homogénea**.

Tenemos los siguientes resultados de existencia y unicidad de solución:

Teorema 7 Sea una **E. D. O. lineal de orden** 2:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x)$$

en las **hipótesis anteriores**.

Sea $x_0 \in [a, b]$ y sean α_0, α_1 **constantes** reales arbitrarias. **Entonces**, **existe una única solución** y de la ecuación definida **en** $[a, b]$ tal que:

$$\boxed{y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1.}$$

Corolario 1 Sea y la **solución** de la **E. D. O.** lineal **homogénea** de orden 2:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

en las hipótesis anteriores, **tal que**:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0\,.$$

Entonces:

$$y(x) = 0, \ \forall x \in [a, b].$$

4.2 Caracterización de la solución general en el caso homogéneo

Teorema 8 Sean y_1, y_2 2 **soluciones** de la **E. D. O. lineal homogénea** de orden 2:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

Entonces, la **combinación lineal**:

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$$

es también **solución de la E. D. O.** para cualesquiera c_1, c_2, **constantes reales** arbitrarias.

Se dice que las 2 soluciones y_1, y_2 **son linealmente dependientes** en el intervalo $[a, b]$ **si existen** constantes c_1, c_2 **no todas nulas**, tales que:

$$c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = 0, \ \forall x \in [a, b].$$

En **caso contrario**, se dirán **linealmente independientes**.

Teorema 9 Toda **E. D. O. lineal homogénea de orden** 2 posee siempre 2 **soluciones linealmente independientes** en $[a, b]$.

Además, si y_1, y_2 son 2 **soluciones linealmente independientes** de la ecuación, **toda solución** de dicha ecuación **se puede expresar** como **combinación lineal** de ellas:

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2.$$

mediante una adecuada elección de las constantes c_k.

Al **conjunto** de las 2 **soluciones linealmente independientes** en el intervalo $[a, b]$ de la E. D. O. lineal homogénea de orden 2 se le denomina **sistema fundamental de soluciones** de la ecuación, y la solución definida por:

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x), \ \ x \in [a, b]}$$

se llama **solución general** de la ecuación en $[a, b]$.

Dadas 2 funciones reales f_1, f_2 **derivables** hasta el orden 1 en el intervalo $[a, b]$, el siguiente determinante se llama **wronskiano** de las 2 funciones y constituye una función real definida en $[a, b]$.

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

Teorema 10 Las 2 soluciones y_1, y_2 de una **E. D. O.** lineal **homogénea** de orden 2 son **linealmente independientes** en $[a, b]$ **si y sólo si** el **wronskiano** de estas funciones es **distinto de cero** para **algún punto** del intervalo $[a, b]$.

Observación 7 En realidad puede probarse que el wronskiano es no nulo en algún punto del intervalo **si y sólo si** es no nulo en todos los puntos del intervalo.

Ejemplo 17 Consideramos la ecuación homogénea $y'' + y = 0$.
Las funciones $y_1(x) = sen(x)$, $y_2(x) = cos(x)$ son soluciones de la ecuación.
Además, son linealmente independientes, pues su wronskiano:

$$\begin{vmatrix} sen(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación es $y(x) = c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x)$.

Reducción del orden

Sea f una **solución no trivial** de la **E. D. O.** lineal **homogénea** de **orden** 2, **entonces** la transformación $y = f \cdot v$ **REDUCE** la ecuación anterior a una **E. D. O.** lineal **homogénea** de **orden** (1) en la nueva variable:

$$w = \frac{dv}{dx}.$$

Ejemplo 18 Sea f una solución de la E. D. O. lineal homogénea de orden 2:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

Mediante la transformación $y = f \cdot v$ se obtiene, en la variable $w = \dfrac{dv}{dx}$, la ecuación lineal de orden 1:

$$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + [2a_0(x)f'(x) + a_1(x)f(x)]w = 0,$$

que se puede resolver fácilmente, pues es una ecuación en variables separadas. Una vez calculada $w(x)$, mediante integración se determina $v(x)$, y finalmente, multiplicando por $f(x)$, se obtiene la solución buscada $y(x)$.

4.3 Caracterización de la solución general en el caso no homogéneo

Teorema 11 Sea la **E. D. O. lineal no homogénea** de orden 2:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x)$$

Sean v una solución cualquiera de la ecuación **no homogénea** y u una solución cualquiera de la ecuación homogénea correspondiente, **entonces** $u + v$ es también una **solución** de la E. D. O. **no homogénea**.

Consideremos la **E. D. O.** lineal **no homogénea** de orden 2:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = \ F(x)$$

y la **E. D. O.** lineal **homogénea** correspondiente:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = \ 0\ .$$

La **solución general** de la ecuación **homogénea** se denomina **función complementaria** de la ecuación no homogénea. La denotaremos por y_c .

Una **solución** cualquiera de la ecuación **no homogénea** se denomina **solución o integral particular**. La denotaremos por y_p .

Por tanto, el teorema anterior puede resumirse diciendo que la suma $y = y_c + y_p$ de la **función complementaria** de la ecuación no homogénea y de una **solución particular** constituye la **solución general** de la ecuación no homogénea.

En consecuencia, el cálculo de la solución general de una ecuación no homogénea pasa por la búsqueda de la solución general de la homogénea correspondiente y una solución particular de la no homogénea.

Ejemplo 19

Consideramos la ecuación no homogénea $y'' + y = x.$

La función complementaria de la ecuación es $y_c(x) = c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x).$

Una solución particular es, por ejemplo, $y_p(x) = x.$

Por tanto, la **solución general** de la ecuación es $y(x) = x + c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x).$

Teorema 12 Sean y_1, y_2 soluciones particulares de las E. D. O. lineales no homogéneas de orden 2 :

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F_1(x)\ , \qquad a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F_2(x)\ .$$

Entonces, para $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2$ es **solución particular** de la ecuación:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = k_1F_1(x) + k_2F_2(x)\ .$$

Ejemplo 20 Consideramos la ecuación no homogénea $y'' + y = 3x + 5\, tg(x)$.

Una solución particular de la ecuación $y'' + y = x$ es $y_1(x) = x.$

Una solución particular de la ecuación $y'' + y = tg(x)$ es $y_2(x) = -cos(x) \cdot log(sec(x) + tg(x)).$

Una solución particular de $y'' + y = 3x + 5\, tg(x)$ es $y_p(x) = 3\, x - 5\, cos(x) \cdot log(sec(x) + tg(x)).$

Entonces, la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = 3x - 5cos(x) \cdot log(sec(x) + tg(x)) + c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x).$$

4.4 Cálculo de la solución de una ecuación homogénea con coeficientes constantes

Consideraremos una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**:

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2\, y = 0 \ .$$

Buscaremos soluciones de la forma exponencial:

$$\boxed{y(x) = e^{mx}.}$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{d^k y(x)}{dx^k} = m^k e^{mx}, \ \forall k \in \mathbb{N}$ y sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$a_0\, m^2 e^{mx} + a_1\, m e^{mx} + a_2\, e^{mx} = 0.$$

De modo que m debe ser **raíz** del polinomio:

$$\boxed{a_0\, m^2 + a_1\, m + a_2 = 0,}$$

conocido con el nombre de **ecuación característica** de la E. D. O.

Vamos a ver que, a partir de las **raíces de la ecuación característica** se puede obtener la **solución general de la E. D. O.** Para ello veremos tres casos distintos:

4.4.1 Caso de raíces reales simples

Teorema 13 Sea una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**. **Si** la **ecuación característica** de la E. D. O. tiene 2 **raíces reales distintas** m_1, m_2, **entonces** el **sistema fundamental de soluciones** es:

$$\{e^{m_1 x}, e^{m_2 x}\} .$$

Por tanto, la **solución general** de la E. D. O. es:

$$\boxed{y(x) = c_1\, e^{m_1 x} + c_2\, e^{m_2 x}}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 21

Sea la ecuación	$y'' - 3y' + 2y = 0.$
Su ecuación característica es	$m^2 - 3m + 2 = 0,$
cuyas raíces son	$m_1 = 1, \quad m_2 = 2.$
Entonces, la solución general es	$y(x) = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x}.$

4.4.2 Caso de una raíz real doble

Teorema 14 Sea una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**. **Si** la **ecuación característica** de la E. D. O. tiene **una raíz real** m **de multiplicidad** 2 **entonces** el **sistema fundamental de soluciones** correspondiente a esa **raíz** es:

$$\{e^{mx}, x\, e^{mx}\}\ .$$

Por tanto, la **solución general** de la E. D. O. correspondiente a esa **raíz** viene dada por:

$$\boxed{(c_1 + c_2 x)\, e^{mx}}$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 22

Sea la ecuación	$y'' - 6y' + 9y = 0.$
Su ecuación característica es	$m^2 - 6m + 9 = 0,$
cuyas raíces son	$m_1 = m_2 = 3.$
Entonces, la solución general es	$y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x}.$

4.4.3 Caso de dos raíces complejas conjugadas

Teorema 15 Sea una ecuación **homogénea** lineal de orden 2 **con coeficientes constantes**. **Si** la **ecuación característica** de la E. D. O. tiene **dos raíces complejas conjugadas simples** $m_1 = a + bi,\ m_2 = a - bi$, **entonces** el **sistema fundamental de soluciones** correspondiente a **ambas raíces** es:

$$\{e^{ax}\, sen(bx), e^{ax}\, cos(bx)\}\ .$$

Por tanto, la **solución general** de la E. D. O. correspondiente a **ambas raíces** viene dada por:

$$\boxed{e^{ax}\,(c_1\, sen(bx) + c_2\, cos(bx)).}$$

Ejemplo 23

1. Sea la ecuación $y'' + y = 0.$

   Su ecuación característica es $m^2 + 1 = 0,$

   cuyas raíces son $m_1 = i, \quad m_2 = -i.$

   (Esto es, $a = 0,\ b = 1$).

   Entonces, la solución general es $y(x) = c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x).$

2. Sea la ecuación $y'' - 6y' + 25y = 0.$

   Su ecuación característica es $m^2 - 6m + 25 = 0,$

   cuyas raíces son $m_1 = 3 + 4i, \quad m_2 = 3 - 4i.$

   (Esto es, $a = 3,\ b = 4$).

   Entonces, la solución general es $y(x) = e^{3x}\,(c_1\, sen(4x) + c_2\, cos(4x)).$

4.5 Cálculo de la solución de una ecuación no homogénea

Estudiaremos dos métodos diferentes para el cálculo de una solución particular de las ecuaciones no homogéneas lineales de orden 2:

4.5.1 Método de Coeficientes Indeterminados

Diremos que una función es **de tipo CI** si es de alguno de los siguientes tipos:

1. x^n, **con** $n \in \mathbb{N}$.
2. e^{ax}, con a una constante arbitraria.
3. $sen(bx + c)$, con b, c constantes.
4. $cos(bx + c)$, con b, c constantes.

o bien un **producto finito** de dos o más funciones de los tipos anteriores.

Sea f una función de **tipo CI**. Al **conjunto** formado por f y todas las **funciones de tipo CI linealmente independientes** tales que f y **todas sus derivadas** son **combinaciones lineales** de ellas se llama **conjunto CI de** f.

Ejemplo 24

1. Sea $f(x) = x^3$. Su conjunto CI es $S = \{x^3, x^2, x, 1\}$.
2. Sea $f(x) = e^{2x}$. Su conjunto CI es $S = \{e^{2x}\}$.
3. Sea $f(x) = x^2\, sen(x)$. Su conjunto CI es
   $S = \{x^2\, sen(x), x^2\, cos(x), x\, sen(x), x\, cos(x), sen(x), cos(x)\}$.

Observación 8 **RESTRICCIONES** del **método de Coeficientes Indeterminados**:

- Sólo es utilizable para **coeficientes constantes**.
- Sólo es utilizable cuando el **segundo miembro es de tipo CI**.

Consideraremos una ecuación no homogénea lineal de orden 2 con coeficientes constantes:

$$a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2\, y = F(x),$$

donde F es una combinación lineal finita de funciones de tipo CI de la forma:

$$F(x) = b_1\, u_1(x) + b_2\, u_2(x) + \cdots + b_m\, u_m(x).$$

Entonces, para construir una **solución particular** de la ecuación se procede del modo siguiente:

1. Para cada u_i se calcula su **conjunto CI** correspondiente, que denotaremos por S_i.
2. Se **eliminan** los conjuntos S_i que son **idénticos** o están **contenidos en otros**.
3. Si alguno de los conjuntos restantes **incluye soluciones** de la correspondiente **ecuación homogénea**, se **multiplican** todas las funciones del conjunto **por la potencia más baja de** x tal que el **conjunto resultante no contenga** ya **soluciones** de la ecuación homogénea.
4. Se forma una **combinación lineal** de todos los elementos de todos los conjuntos resultantes.
5. Se **determinan los coeficientes** de dicha combinación lineal, **sustituyéndola en la ecuación**.

Ejemplo 25 Resolver la ecuación:

$$y'' - 2y' - 3y = 2\,e^x - 10\,sen(x).$$

(H) La ecuación **homogénea** asociada es $y'' - 2y' - 3y = 0$,
cuya ecuación característica es $m^2 - 2m - 3 = 0$, con raíces $m_1 = 3$, $m_2 = -1$.
Entonces, la función complementaria es $y_c(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$.

(N H 1) El término **no homogéneo** consta de dos **funciones** de **tipo CI**:

$$u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = sen(x),$$

cuyos conjuntos CI son $S_1 = \{e^x\}, \quad S_2 = \{sen(x), cos(x)\}$.

(N H 2, 3) No son reducibles ni contienen soluciones de la homogénea.

(N H 4) Por tanto, la solución particular será:

$$y_p(x) = A_1 e^x + A_2 sen(x) + A_3 cos(x).$$

(N H 5) Derivando, sustituyendo en la ecuación e igualando coeficientes se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} A_1 & -2A_1 & -3A_1 & = 2 \\ -A_2 & +2A_3 & -3A_2 & = -10 \\ -A_3 & -2A_2 & -3A_3 & = 0 \end{array} \right.$$

cuya solución es $A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = -1$, de donde

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} e^x + 2sen(x) - cos(x).$$

Entonces, la **solución general** de la ecuación es

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x + 2sen(x) - cos(x).}$$

Ejemplo 26 Resolver la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$.

(H) La ecuación **homogénea** asociada tiene ecuación característica $m^2 - 3m + 2 = 0$, cuyas raíces son: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Entonces, la función complementaria es $y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

(N H 1) El término **no homogéneo** consta de las **funciones** de **tipo CI**:

$$u_1(x) = x^2 \, , \quad u_2(x) = e^x \, , \quad u_3(x) = xe^x \, , \quad u_4(x) = e^{3x} \, ,$$

cuyos conjuntos CI son: $S_1 = \{x^2, x, 1\}$, $S_2 = \{e^x\}$, $S_3 = \{xe^x, e^x\}$, $S_4 = \{e^{3x}\}$.

(N H 2) Como $S_2 \subset S_3$ se puede **ELIMINAR** el conjunto S_2.

(N H 3) Además, **en** S_3 la función e^x es **solución de la homogénea**, por tanto se tiene el **nuevo** conjunto $S_3' = \{x^2 e^x, xe^x\}$.

(N H 4) Finalmente, tenemos $S_1 = \{x^2, x, 1\}$, $S_4 = \{e^{3x}\}$, $S_3' = \{x^2 e^x, xe^x\}$.

La solución particular será de la forma: $y_p(x) = A_1 x^2 + A_2 x + A_3 + A_4 e^{3x} + A_5 x^2 e^x + A_6 x e^x$.

(N H 5) Derivando y sustituyendo en la ecuación se llega a:

$$A_1 = 1, \; A_2 = 3, \; A_3 = \frac{7}{2}, \; A_4 = 2, \; A_5 = -1, \; A_6 = -3.$$

Entonces, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2 e^x - 3xe^x.}$$

4.5.2 Método de Variación de Constantes

Como se ha mencionado anteriormente, el **método de coeficientes indeterminados** presenta varias **restricciones**. Vamos a ver ahora un método que puede ser utilizado **en el caso general**: el método de **variación de constantes** (o variación de parámetros). Por **simplicidad** se describirá el método para una ecuación de **orden 2**, aunque es aplicable para ecuaciones de **cualquier orden**.

Consideremos, entonces, la ecuación lineal de orden 2:

$$a_0(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_2(x)\,y = F(x)\ ,$$

donde suponemos conocidas dos soluciones linealmente independientes y_1 , y_2 de la ecuación **homogénea** correspondiente. Entonces la solución general de la homogénea será:

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Sustituyendo los **parámetros** por **funciones**, vamos a buscar funciones v_1 , v_2 , que se determinarán a partir de la ecuación, de forma que la solución de la ecuación **no homogénea** sea:

$$\boxed{y(x) = v_1(x)\cdot y_1(x) + v_2(x)\cdot y_2(x).}$$

Derivando la expresión de $y(x)$ se tiene:

$$y'(x) = v_1'(x) \cdot y_1(x) + v_1(x) \cdot y_1'(x) + v_2'(x) \cdot y_2(x) + v_2(x) \cdot y_2'(x).$$

De las infinitas **soluciones** de la E.D.O. **buscamos la que**, además, **verifica**:

$$v_1'(x) \cdot y_1(x) + v_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \ ,$$

De esta forma la expresión anterior se reduce a:

$$y'(x) = v_1(x) \cdot y_1'(x) + v_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Derivando de nuevo:

$$y''(x) = v_1'(x) \cdot y_1'(x) + v_1(x) \cdot y_1''(x) + v_2'(x) \cdot y_2'(x) + v_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Sustituyendo en la ecuación y **reordenando** se tiene:

$$v_1(x) \cdot [a_0(x) \cdot y_1''(x) + a_1(x) \cdot y_1'(x) + a_2(x) \cdot y_1(x)]+$$

$$v_2(x) \cdot [a_0(x) \cdot y_2''(x) + a_1(x) \cdot y_2'(x) + a_2(x) \cdot y_2(x)]+$$

$$a_0(x) \cdot [v_1'(x) \cdot y_1'(x) + v_2'(x) \cdot y_2'(x)] = F(x).$$

Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación **homogénea** esto se reduce a:

$$v_1'(x) \cdot y_1'(x) + v_2'(x) \cdot y_2'(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)} \ .$$

En resumen, se tiene que v_1', v_2' deben ser **solución del** siguiente **S. E. L.**:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{F(x)}{a_0(x)} \end{pmatrix},}$$

cuyo determinante es el **wronskiano** $W(y_1, y_2)$, que es **no nulo**.

Por tanto, el sistema tiene **solución única** (v_1', v_2') que, mediante **integración**, nos proporciona v_1 y v_2, **salvo constantes** de integración.

Ejemplo 27 Resolver la ecuación $y'' + y = tg(x)$.

Claramente, la función $tg(x)$ no es de tipo CI, por tanto aplicaremos el método de variación de constantes:

La función complementaria es $y_c(x) = c_1 sen(x) + c_2 cos(x)$.

Buscamos una solución de la forma $y(x) = v_1(x) sen(x) + v_2(x) cos(x)$.

El sistema a resolver queda $\begin{pmatrix} sen(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sen(x) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ tg(x) \end{pmatrix}$,

cuya solución es $v_1'(x) = sen(x), \quad v_2'(x) = -\dfrac{sen^2(x)}{cos(x)}$,

Mediante **integración**, $v_1(x) = -cos(x) + c_1$, $v_2(x) = sen(x) - log \mid sec(x) + tg(x) \mid + c_2$.

Entonces, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = -cos(x) \cdot log \mid sec(x) + tg(x) \mid + c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x)\ .}$$

4.6 La ecuación de Cauchy-Euler

La **dificultad** principal en el **método de variación de parámetros** es **obtener la función complementaria** en el caso en que los **coeficientes no son constantes**. Sabemos cómo obtenerla en el caso de coeficientes constantes por medio de la ecuación característica, pero el caso de coeficientes variables no puede ser tratado de la misma forma. **Solamente en algunos casos puede ser obtenida la solución de manera explícita**.

En este apartado veremos un **caso particular** en que, mediante un **cambio de variable**, se pueden **transformar** determinadas ecuaciones de **coeficientes no constantes** en otras de **coeficientes constantes** y, por tanto, se pueden resolver.

Estudiemos la **ecuación de Cauchy-Euler** (o ecuación equidimensional), que es una ecuación de coeficientes variables de la forma:

$$\boxed{a_0\, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1\, x \frac{dy}{dx} + a_2\, y = F(x),\ x \neq 0.}$$

Para los valores de la variable independiente $x > 0$, la **transformación** $x = e^t,\ t \in \mathbb{R}$ **reduce** la ecuación de **Cauchy-Euler** a una ecuación lineal con **coeficientes constantes**. (Para $x < 0$, el cambio adecuado es $x = -e^t$). Por simplicidad lo veremos en el caso de orden 2, pero es válido para ecuaciones de cualquier orden.

Sea entonces la ecuación de segundo orden

$$a_0\, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1\, x \frac{dy}{dx} + a_2\, y = F(x), \quad x > 0.$$

Teniendo en cuenta que $\qquad x = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t = log(x)$

se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2} \cdot (\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}).$$

Con lo que, sustituyendo en la ecuación, se obtiene la ecuación lineal de orden 2 y coeficientes constantes:

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{dy}{dt} + a_2 \, y = F(e^t) \ ,$$

que puede ser resuelta por los métodos ya vistos.

Observación 9 A partir de aquí hay **dos opciones**:

1. Aplicar el **método CI** para obtener la **solución particular** y, posteriormente, **deshacer** el **cambio de variable** (si $F(e^t)$ es de tipo CI).

2. **Deshacer** el **cambio de variable** y aplicar el **método de variación de constantes** a la ecuación de Cauchy-Euler.

Ejemplo 28 Encontrar la única solución del problema con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3, \quad x > 0 \\ y(1) = 1, \quad \dfrac{dy}{dx}(1) = 2. \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $x = e^t$ se tiene la ecuación de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}.$$

Como su ecuación característica es $m^2 - 3m + 2 = 0$, con raíces $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, la función complementaria de esta ecuación es:

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Como el segundo miembro es la función de tipo CI e^{3t}, cuyo conjunto CI es $S = \{e^{3t}\}$, la solución particular la buscamos de la forma:

$$y_p(t) = Ae^{3t}.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación se obtiene que $A = \frac{1}{2}$, por tanto, la solución será:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}.$$

Deshaciendo el cambio de variable se tiene entonces:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x^3.$$

Al imponer las condiciones iniciales, se tiene que $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$. Así pues,

$$y(x) = \frac{x + x^3}{2}$$