Integrales impropias

En todo el estudio hecho hasta ahora se han utilizado dos propiedades fundamentales: la función tenía que ser acotada y el intervalo de integración tenía que ser cerrado y acotado.

En esta última sección extenderemos el cálculo de la integral de Riemann a:

1. Funciones definidas en intervalos no acotados: integrales impropias de primera espécie.
2. Funciones no acotadas: integrales impropias de segunda especie.

Integrales impropias de primera especie:

Las integrales de este tipo son de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,, \qquad \int_{a}^{+\infty} f\,, \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{b} f\,,$$

siendo f acotada en el intervalo correspondiente.

Observación 1 Es evidente que las propiedades de la integral permiten reducir su estudio al caso

$$\int_{a}^{+\infty} f\,,$$

siendo f acotada en $[a, +\infty)$.

Supongamos que se conoce una primitiva F de la función f. Entonces,

$$I_1 = \int_{a}^{+\infty} f \; = \lim_{t\to+\infty} \int_{a}^{t} f = \lim_{t\to+\infty} \left(F(t) - F(a)\right).$$

Definición 1 Sea $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función acotada.

1. Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es **convergente** si, y sólo si, f es Riemann integrable para todo intervalo $[a, t]$, existe el límite
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f$$
y es un número real.

   En este caso diremos que la función f es Riemann integrable en el intervalo $[a, +\infty)$.

2. Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es **divergente** si, y sólo si, f es Riemann integrable para todo intervalo $[a, t]$, existe el límite
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f$$
y no es finito.

3. Se dice que $\int_a^{+\infty} f$ es **oscilante** en el caso en que f no sea Riemann integrable en un intervalo $[a, t]$ o no exista el límite
$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f.$$

Observación 2 La idea que subyace tras las integrales impropias de primera especie es integrar hasta un punto t arbitrario y, después, hacer tender t al infinito.

Ejemplo 1 Dado $a > 0$, estudiaremos el carácter de la integral impropia de primera especie

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x\,,$$

según los valores del parámetro $s \in \mathbb{R}$.

Como

$$I_1 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \left[\dfrac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_a^t, & s \neq 1\,, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \ln\left(\dfrac{t}{a}\right), & s = 1\,, \end{cases}$$

tenemos que,

1. Si $s > 1$, entonces es convergente y $I_1 = \dfrac{1}{s-1}a^{1-s}$.
2. Si $s \leq 1$, I_1 es divergente.

Si $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ es tal que $f \geq 0$ y es Riemann integrable en todo intervalo $[a, x]$, entonces f es Riemann integrable en $[a, +\infty)$ si y sólo si, existe un $M \geq 0$ tal que para todo $x \geq a$ se tiene que

$$\int_a^x f \leq M.$$

Los principales criterios que tenemos para averiguar si una integral impropia de primera especie es convergente se resumen en los siguientes resultados.

Teorema 1 *(Criterio de comparación) Sea $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que f es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[a, x]$. Si existe $g : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que para todo x perteneciente a $[a, +\infty)$ se tiene que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y además g es Riemann integrable en $[a, +\infty)$, entonces f es Riemann integrable en $[a, +\infty)$.*

Si utilizamos las funciones del ejemplo 1, como corolario tenemos lo siguiente:

Corolario 1 *Sea $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que f es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[a, x]$. Entonces:*

1. *Si para todo x perteneciente a $[a, +\infty)$ se tiene que*

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^s}$$

   con $s > 1$ entonces f es Riemann integrable en $[a, +\infty)$.

2. *Si para todo x perteneciente a $[a, +\infty)$ se tiene que*

$$f(x) \geq \frac{1}{x^s}$$

   con $s \leq 1$, entonces f es divergente en $[a, +\infty)$.

Teorema 2 *(Criterio de comparación por paso al límite) Sean $f, g : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tales que son Riemann integrables en todo intervalo de la forma $[a, x]$ y, además, $f \geq 0$, $g > 0$. Sea*

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

entonces:

1. *Si $\alpha = 0$ y g es Riemann integrable en $[a, +\infty)$, tenemos que f es Riemann integrable en $[a, +\infty)$.*

2. *Si $\alpha = +\infty$, tenemos que, si f es Riemann integrable en $[a, +\infty)$, se verifica que g es Riemann integrable en $[a, +\infty)$.*

3. *Si α es un número real no nulo, tenemos que f es Riemann integrable en $[a, +\infty)$ si y sólo si, g es Riemann integrable en $[a, +\infty)$.*

Observación 3 Nótese que en las condiciones del teorema anterior también se tiene que

1. Si $\alpha = 0$ y la integral de f es divergente en $[a, +\infty)$, tenemos que la integral de g es divergente en $[a, +\infty)$.

2. Si $\alpha = +\infty$, tenemos que, si la integral de g es divergente en $[a, +\infty)$, se verifica que la integral de f es divergente en $[a, +\infty)$.

3. Si α es un número real no nulo, tenemos que la integral de f es divergente en $[a, +\infty)$ si y sólo si, la integral de g es divergente en $[a, +\infty)$.

También en este caso, si utilizamos las funciones del ejemplo 1, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2 *Sea $f : [a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que f es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[a, x]$ y, además, $f \geq 0$. Sea*

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{x^s}},$$

entonces:

1. *Si α es finito y $s > 1$, entonces f es Riemann integrable en $[a, +\infty)$.*

2. *Si α es no nulo y $s < 1$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ es divergente.*

Ejemplo 2 Para la integral

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(2+x^2)^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2}{(2+x^2)^2}}{\dfrac{1}{x^s}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2+s}}{4+4x^2+x^4}\,,$$

y este último límite es $1 \in \mathbb{R}$, si $s = 2$. Entonces la integral es convergente y

$$f(x) = \frac{x^2}{(2+x^2)^2}$$

es Riemann integrable en $[1, +\infty)$.

Integrales impropias de segunda especie:

En este caso, nos encontraremos con funciones definidas en intervalos tales que tienen un comportamiento asintótico en alguno de sus extremos. En el caso de que la función presentase un comportamiento similar en otros puntos del dominio (por ejemplo, un intevalo de extremos a, b), y estos fuesen $x_1, \cdots, x_n$, aplicando las propiedades de la integral, tenemos que

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f + \cdots + \int_{x_n}^b f$$

con lo que podemos reducir el estudio al caso dondesólo tengamos asíntotas en los extremos del intervalo. Es más, podemos pensar que la asíntotasólo está en un extremo del intervalo ya que para todo $c \in (a, b)$, se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b .$$

Para este caso, si existiese una primitiva F de f, entonces,

1. Si $f(x)$ no está acotada en b:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} [F(t) - F(a)] .$$

2. Si $f(x)$ no está acotada en a:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} [F(b) - F(t)] .$$

Por lo tanto, podemos afirmar que la idea básica que inspira el cálculo de las integrales impropias de segunda especie es integrar hasta un punto t arbitrario en el interior de $[a, b)$ y, después, hacer tender t al extremo de integración donde la función sea no acotada.

Definición 2 Sea $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ y que no presenta más asíntotas verticales en $[a, b)$. Entonces:

1. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **convergente**, si f es Riemann integrable en $[a, t]$ para todo $t \in [a, b)$, existe el límite
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$
y es un número real.

   En este caso se dirá que la función f es Riemann integrable en $[a, b)$.

2. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **divergente**, si f es Riemann integrable en $[a, t]$ para todo $t \in [a, b)$, existe el límite
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$
y no es finito.

3. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **oscilante** en el caso en que f no sea Riemann integrable en un intervalo $[a, t]$, con $t \in [a, b)$, o no exista el límite
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De la misma forma podríamos definir la integrabilidad cuando la asíntota está en el extremo a del intervalo de definición de la función (en este caso, $f : (a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ y no presenta más asíntotas verticales en $(a, b]$).

1. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **convergente**, si f es Riemann integrable en $[t, b]$ para todo $t \in (a, b]$, existe el límite
$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
y es un número real.

   En este caso se dirá que la función f es Riemann integrable en $(a, b]$.

2. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **divergente**, si f es Riemann integrable en $[t, b]$ para todo $t \in (a, b]$, existe el límite
$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
y no es finito.

3. Se dirá que la integral $\int_a^b f$ es **oscilante** en el caso en que f no sea Riemann integrable en un intervalo $[t, b]$, con $t \in (a, b]$, o no exista el límite
$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 3 Veamos un ejemplo en el cual aparecen unas funciones que posteriormente servirán como funciones de referencia para estudiar la convergencia, o no, de numerosas integrales impropias de segunda especie. Estas funciones son de la forma

$$f(x) = \frac{1}{(c-x)^s}, \quad f(x) = \frac{1}{(x-c)^s}.$$

1. En el caso de no acotación en el extremo superior de integración,

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{1}{(b-x)^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_a^t \frac{1}{(b-x)^s}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to b^-} \begin{cases} \dfrac{(b-t)^{1-s}}{s-1} - \dfrac{(b-a)^{1-s}}{s-1}, & s \neq 1\,, \\ \ln\left(\dfrac{b-a}{b-t}\right), & s = 1\,, \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-s}}{1-s}, & s < 1, \text{ por tanto integral convergente,} \\ \infty\,, & s \geq 1, \text{ como consecuencia integral divergente.} \end{cases}$$

2. En el caso de no acotación en el extremo inferior de integración,

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,\mathrm{d}x$$

se puede probar que, al igual que en el caso anterior, la integral es convergente si y sólo si, $s < 1$.

Al igual que para las integrales de primera especie, para las de segunda tenemos una serie de resultados que nos permiten saber cuando una integral de este tipo es convergente.

Teorema 3 *Sea $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$ y que no presenta más asíntotas verticales en $[a, b)$. Supongamos que, para todo $x \in [a, b)$, f es Riemann integrable en $[a, x]$ y que $f \geq 0$. Entonces, f es Riemann integrable en $[a, b)$ si y sólo si, existe un $M \geq 0$ tal que $\int_a^x f \leq M$ para todo $x \in [a, b)$.*

Análogamente, sea $f : (a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ y que no presenta más asíntotas verticales en $(a, b]$. Supongamos que, para todo $x \in (a, b]$, f es Riemann integrable en $[x, b]$ y que $f \geq 0$. Entonces, f es Riemann integrable en $(a, b]$ si y sólo si, existe un $M \geq 0$ tal que $\int_x^b f \leq M$ para todo $x \in (a, b]$.

Obviamente, en cualquiera de los dos casos, cuando existe, $\int_a^b f \leq M$.

Teorema 4 *(Criterio de comparación) Sea $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ tal que es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[a, x]$ con $x \in [a, b)$. Si existe $g : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ tal que para todo x perteneciente a $[a, b)$, se tiene que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y, además, g es Riemann integrable en $[a, b)$, entonces f es Riemann integrable en $[a, b)$.*

Sea $f : (a, b] \mapsto \mathbb{R}$ tal que es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[x, b]$ con $x \in (a, b]$. Si existe $g : (a, b] \mapsto \mathbb{R}$ tal que para todo x perteneciente a $(a, b]$, se tiene que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y, además, g es Riemann integrable en $(a, b]$, entonces f es Riemann integrable en $(a, b]$.

Por ejemplo, aplicando el anterior criterio con las funciones del ejemplo 3, tenemos que si $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[a, x]$ con $x \in [a, b)$ y

$$f(x) \leq \frac{1}{(b - x)^s}, \quad s < 1,$$

entonces f es Riemann integrable en $[a, b)$. Si, por otro lado,

$$f(x) \geq \frac{1}{(b-x)^s}, \quad s \geq 1,$$

entonces $\int_a^b f$ es divergente.

De la misma forma, tenemos que si $f : (a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es Riemann integrable en todo intervalo de la forma $[x, b]$ con $x \in (a, b]$ y

$$f(x) \leq \frac{1}{(x-a)^s}, \quad s < 1,$$

entonces f es Riemann integrable en $(a, b]$. Si por otro lado,

$$f(x) \geq \frac{1}{(x-a)^s}, \quad s \geq 1,$$

entonces $\int_a^b f$ es divergente.

Teorema 5 *(Criterio de comparación por paso al límite) Sean $f, g : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ tales que son Riemann integrables en todo intervalo de la forma $[a, x]$, con $x \in [a, b)$ y, además, $f \geq 0$, $g > 0$. Sea*

$$\alpha = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

entonces:

1. *Si $\alpha = 0$ y g es Riemann integrable en $[a, b)$ tenemos que f es Riemann integrable en $[a, b)$.*

2. *Si $\alpha = +\infty$ tenemos que si f es Riemann integrable en $[a, b)$, se verifica que g es Riemann integrable en $[a, b)$.*

3. *Si α es un número real no nulo tenemos que f es Riemann integrable en $[a, b)$ si y sólo si, g es Riemann integrable en $[a, b)$.*

Aplicando este resultado a las funciones del ejemplo 3 se tiene que, para una función no acotada en el extremo superior b del intervalo de integración, dado el límite

$$\alpha = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{(b-x)^s}},$$

entonces:

1. Si α es finito y $s < 1$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

2. Si α es no nulo y $s \geq 1$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

De la misma forma tenemos resultados análogos para el otro extremo del intervalo.

Teorema 6 *(Criterio de comparación por paso al límite) Sean $f, g : (a, b] \mapsto \mathbb{R}$ tales que son Riemann integrables en todo intervalo de la forma $[x, b]$ y, además, $f \geq 0$, $g > 0$. Sea*

$$\alpha = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)},$$

entonces:

1. *Si $\alpha = 0$ y g es Riemann integrable en $(a, b]$ tenemos que f es Riemann integrable en $(a, b]$.*

2. *Si $\alpha = +\infty$, tenemos que, si f es Riemann integrable en $(a, b]$, se verifica que g es Riemann integrable en $(a, b]$.*

3. *Si α es un número real no nulo, tenemos que f es Riemann integrable en $(a, b]$ si y sólo si, g es Riemann integrable en $(a, b]$.*

Aplicando este resultado a las funciones del ejemplo 3 se tiene que, para una función no acotada en el extremo inferior a del intervalo de integración, dado el límite

$$\alpha = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{(x-a)^s}}\,,$$

entonces:

1. Si α es finito y $s < 1$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Si α es no nulo y $s \geq 1$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Ejemplo 4 En este ejemplo estudiaremos el carácter de

$$I = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}\,.$$

Como podemos observar la integral presenta problemas en los puntos $x = 1$ y $x = 3$. Por tanto, con objeto de tener problemas en unsólo extremo de integración se hace la decomposición

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}\,,$$

estudiando por separado cada una de las integrales.

1. La primera integral $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$ presenta problemas en el extremo inferior del intervalo de integración. Ya que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}}{\dfrac{1}{(x-1)^s}} = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{s-\frac{1}{2}}\,(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

para $s = \frac{1}{2}$, el valor del límite es un número real $(1/\sqrt{8})$ y, por lo tanto, I_1 es convergente.

2. La segunda integral $I_1 = \displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}$ es una integral de una función no acotada en el extremo superior $x = 3$. Ya que

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(9-x^2)}}}{\dfrac{1}{(3-x)^s}} = \lim_{x \to 3^-} (3-x)^{s-\frac{1}{2}} (3+x)^{-\frac{1}{2}} (x-1)^{-\frac{1}{2}},$$

tomando $s = \frac{1}{2}$, se tiene que el valor del límite es un número real $(1/(2\sqrt{3}))$. Así pues, I_2 también es convergente.

Finalmente, el hecho de ser convergentes I_1 e I_2, implica que la integral de partida es convergente.