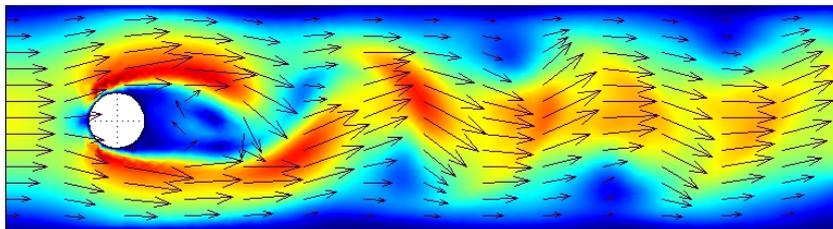




UNIVERSIDADE
DE VIGO

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS:
ANÁLISIS, SOFTWARE Y
APLICACIONES EN INGENIERÍA**

NOTAS TEÓRICAS



Cursos de Extensión Universitaria

VIGO, Julio de 2001

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS:
ANÁLISIS, SOFTWARE Y
APLICACIONES EN INGENIERÍA**

NOTAS TEÓRICAS

AUTORES:

Lino José Álvarez Vázquez

José Durany Castrillo

Generosa Fernández Manín

Guillermo García Lomba

Aurea María Martínez Varela

Fernando Varas Mérida

VIGO, Julio de 2001

Índice General

Introducción	3
1. Modelos matemáticos en problemas de transmisión de calor, mecánica de sólidos y dinámica de fluidos	5
1.1. Problemas de Transmisión de Calor	5
1.2. Problemas en Mecánica de Sólidos	10
1.3. Problemas de Dinámica de Fluidos	16
1.4. Otros problemas notables	23
1.5. Observaciones sobre problemas acoplados	26
1.6. Bibliografía	26
2. Introducción al método de elementos finitos	29
2.1. Formulación de un problema modelo unidimensional	29
2.2. Resolución mediante un método de diferencias finitas	30
2.3. Principio de los trabajos virtuales y métodos de Galerkin	32
2.4. Formulación elemental del método de elementos finitos	36
2.6. Implementación efectiva del método de elementos finitos	39
2.5. Análisis del error del método de elementos finitos	42
2.7. Bibliografía	46
3. Introducción al método de elementos finitos para un problema estacionario de transmisión de calor	47
3.1. Formulación de un problema modelo en dimensión superior	47
3.2. Formulación del método de elementos finitos	50
3.3. Elementos finitos de Lagrange	52
3.4. Los espacios de elementos finitos	59
3.5. Estimación del error	61
3.6. Implementación efectiva del MEF	66
3.7. Bibliografía	70
4. Problemas evolutivos y problemas no lineales	73
4.1. Introducción	73
4.2. Problema evolutivo parabólico	74
4.3. Semidiscretización espacial	75

4.4. Discretización temporal	76
4.5. Introducción a los problemas no lineales	79
4.6. Bibliografía	82
5. El método de elementos finitos en mecánica de sólidos	83
5.1. Elasticidad linealizada clásica: Caso estacionario	83
5.2. Elastodinámica	91
5.3. Problemas de cuarto orden: Estudio de una placa empotrada	96
5.4. Elementos finitos de Hermite	98
5.5. Bibliografía	101
6. El método de elementos finitos en dinámica de fluidos	103
6.1. Problemas de convección-difusión	103
6.2. Resolución numérica de las ecuaciones de Stokes	115
6.3. Las ecuaciones de Navier-Stokes	122
6.4. Bibliografía	125

Introducción

En estas notas teóricas se presenta una introducción al Método de Elementos Finitos (MEF) e intentan servir de puente entre los contenidos que se desarrollarán durante este curso de Extensión Universitaria y la bibliografía que se ha añadido a cada capítulo. Para su lectura sólo se requieren conocimientos básicos de matemáticas, si bien la comprensión de algunos de los contenidos aquí expuestos requieren conocimientos más avanzados de análisis funcional y de análisis numérico. Se intenta ofrecer la posibilidad de conocer a grandes rasgos el método a través de las clases y de una lectura rápida de esta notas, así como mantener el rigor necesario para aquellos que deseen profundizar en este tema.

El método de elementos finitos permite llevar a cabo la simulación numérica de fenómenos físicos que aparecen en el ámbito de la ingeniería y de las ciencias aplicadas. Con este curso, de cuya documentación forman parte estas notas, se pretende acercar al lector a la formulación matemática de esos problemas mediante ecuaciones en derivadas parciales, al mismo tiempo que se presentan las propiedades básicas que se deben conocer de este método numérico a la hora de su utilización, en general a través de un paquete de software, en la resolución efectiva de un problema concreto.

La estructura que presentan estas notas, que se complementarán con las fotocopias de las transparencias de clase, los guiones de prácticas e información sobre otros códigos, es la siguiente: el primer capítulo contiene la obtención de los modelos matemáticos para los tres tipos de problemas tratados en el curso: problema en transmisión de calor, problema en mecánica de sólidos y problema en dinámica de fluidos. En el capítulo 2 se fundamenta y describe el MEF empezando con un problema sencillo monodimensional, en el que resulta fácil ver propiedades y obtener estimaciones de error. Los capítulos 3 y 4 tratan los problemas de transmisión de calor en dimensión superior, incluyendo problemas estacionarios, evolutivos y no lineales. El capítulo 5 se dedica íntegramente a problemas en mecánica de sólidos y el último capítulo introduce el MEF para dinámica de fluidos.

1. Modelos matemáticos en problemas de transmisión de calor, mecánica de sólidos y dinámica de fluidos

En este tema se presenta la formulación matemática de problemas tipo en los tres campos de aplicación del método de elementos finitos que serán abordados en el curso. La finalidad de esta presentación es, por un lado, recordar el modo de describir estos problemas para poder abordar su resolución numérica y, por otro, observar las grandes semejanzas entre las correspondientes formulaciones. Precisamente estas semejanzas permitirán afrontar la resolución numérica de dichos problemas mediante una formulación común del método de elementos finitos (aun cuando los esquemas eficientes de resolución sí contengan algunas particularidades, especialmente en el caso de la resolución de problemas en dinámica de fluidos).

En cada caso, se verá cómo llevar la formulación de los correspondientes problemas a una ecuación en derivadas parciales -o un sistema de ecuaciones en derivadas parciales en el caso de las ecuaciones de la mecánica de sólidos o de fluidos- que represente el comportamiento interno del sistema) y una serie de condiciones de contorno que describan la interacción del sistema con su entorno. En los problemas evolutivos será preciso añadir además unas condiciones iniciales que describan el estado del sistema en el momento en que se comienza a analizar su comportamiento.

1.1 Problemas de Transmisión de Calor

La formulación matemática de los problemas de transmisión de calor sobre un cierto recinto (ocupado por un sólido o por un fluido) pasará por la deducción de una ecuación en derivadas parciales que refleje el principio de conservación de la energía sobre el correspondiente medio continuo a la que se deberán añadir unas condiciones de contornos que tengan en cuenta el intercambio de calor con el exterior a través de las fronteras del recinto en cuestión.

Adicionalmente, en el caso de los problemas evolutivos será preciso incluir unas condiciones

iniciales que describan el estado térmico inicial del recinto.

Principio de conservación de la energía

La deducción de la ecuación en derivadas parciales que describe el reparto de temperaturas en un cierto recinto (y su evolución en el caso transitorio) pasa por formular sobre cada dominio ω incluido en el recinto un balance de energía, de acuerdo con el primer principio de la termodinámica.

En primer lugar, la energía térmica contenida en el recinto ω viene dada por:

$$\int_{\omega} \rho c_p T d\omega \quad (1)$$

donde $\rho(\bar{x})$ representa la densidad del medio en el punto de coordenadas \bar{x} , $c_p(\bar{x})$ el calor específico (a presión constante) en el punto de coordenadas \bar{x} y $T(\bar{x}, t)$ la temperatura en el instante t en el punto de coordenadas \bar{x} .

Por otro lado, si el flujo de calor en el instante t en el punto de coordenadas \bar{x} viene dado por $\vec{q}(\bar{x}, t)$, la energía térmica por unidad de tiempo que sale del recinto ω será

$$\int_{\partial\omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

donde $\partial\omega$ representa la frontera del recinto ω y \vec{n} el vector unitario, con orientación saliente, sobre dicha frontera.

Finalmente, si se representa por $f(\bar{x}, t)$ la tasa neta de energía liberada por unidad de volumen en el instante t en el punto de coordenadas \bar{x} (por ejemplo, si en el medio se produce una reacción exotérmica), la energía liberada por unidad de tiempo en todo el dominio ω será

$$\int_{\omega} f d\omega \quad (3)$$

El principio de conservación de energía asegura entonces que la variación en el tiempo de la entalpía contenida en el recinto ω , dada por la ecuación (1), ha de ser igual a la diferencia entre la potencia neta liberada en el interior del dominio, dada por (3), y la potencia saliente por la frontera de este dominio, obtenida mediante (2):

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho c_p T d\omega = \int_{\omega} f d\omega - \int_{\partial\omega} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (4)$$

La ecuación anterior, que habrá de verificarse sobre cada dominio ω ocupado por un medio continuo y contenido en el recinto donde se desea resolver el problema de transmisión de

calor, puede llevarse a una forma más manejable mediante la aplicación del *Teorema de la divergencia* o *Teorema de Gauss*. Este teorema asegura que para un campo vectorial \vec{F} regular se tiene la siguiente igualdad

$$\int_{\partial\omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\omega} \operatorname{div} \vec{F} d\omega \quad (5)$$

donde:

$$\operatorname{div} \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Así, la aplicación de este teorema al último término de la ecuación (4) lleva a una ecuación:

$$\int_{\omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} d\omega = \int_{\omega} f d\omega - \int_{\omega} \operatorname{div} \vec{q} d\omega \quad (6)$$

Ahora bien, si este balance ha de cumplirse para cualquier dominio ω , entonces habrá de tenerse

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = f \quad (7)$$

para cada valor de \bar{x} y t .

La ecuación en derivadas parciales (7), donde aparecen derivadas con respecto a la variable temporal y a las tres coordenadas espaciales, se denomina *Ecuación del calor* y constituirá el ingrediente esencial en la formulación matemática de los problemas de transmisión de calor de cara a su resolución numérica.

De este modo, la resolución de un determinado problema de transmisión de calor consistirá en la búsqueda del campo de temperaturas, $T(\bar{x}, t)$, y el campo de flujos de calor, $\vec{q}(\bar{x}, t)$, sobre el recinto considerado. No obstante, estos dos campos no son independientes entre sí: el flujo de calor viene determinado, en cada punto, por el campo de temperaturas y las propiedades del medio en ese punto.

El flujo de calor en el interior de un cierto medio se descompondrá en las contribuciones de distintos mecanismos de propagación

$$\vec{q} = \vec{q}_c + \vec{q}_a + \vec{q}_r \quad (8)$$

donde

\vec{q}_c representa el flujo de calor por conducción

\vec{q}_a representa el flujo de calor por arrastre material

\vec{q}_r representa el flujo de calor por radiación

Sin embargo, en un cierto problema no todos los mecanismos serán importantes. Así, el flujo por arrastre material sólo aparecerá en los fluidos y el flujo por radiación (que tampoco será importante en el interior de los cuerpos sólidos) sólo será apreciable a temperaturas elevadas.

El flujo de calor por conducción está ligado al campo de temperaturas y a las propiedades del material a través de la ley de Fourier que, para un medio isótropo, se escribe de la forma

$$\vec{q}_c = -k\vec{\nabla}T \quad (9)$$

donde $k(\bar{x}, T)$ representa la conductividad térmica del medio.

Por otro lado, el flujo de calor debido al arrastre material vendrá dado por

$$\vec{q}_a = \rho c_p \vec{v}T \quad (10)$$

donde \vec{v} representa la velocidad del fluido.

El flujo de calor por radiación tiene una expresión notablemente más complicada pues requiere establecer un balance entre potencia radiada y absorbida en cada punto, lo que incluye una integración en todas las posibles direcciones espaciales. El tratamiento numérico de estos flujos es también más complicado y no será tratado en el marco de este curso.

Así, las ecuaciones que rigen los problemas de transmisión de calor en sólidos se escriben

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k\vec{\nabla}T) = f \quad (11)$$

en tanto que para un fluido con temperaturas moderadas (donde la radiación no será importante) se tendrá

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k\vec{\nabla}T) + \text{div}(\rho c_p T \vec{v}) = f \quad (12)$$

En cada caso, dichas ecuaciones habrán de verificarse sobre todo el recinto donde se desea resolver el problema de transmisión de calor.

Condiciones de contorno

Las ecuaciones anteriores (ya sea (11) en el caso de sólidos o (12) en el caso de fluidos con radiación despreciable) no sirven, por sí solas, para representar por completo el problema de

transmisión de calor. Es necesario describir el intercambio de calor que tiene lugar a través de las paredes (reales o ficticias) del recinto.

En los problemas de transmisión de calor en un fluido será preciso además describir la velocidad de este fluido (que podría además estar influida por la propia temperatura a través de las fuerzas de flotación), lo que constituye el objeto de una próxima sección.

En primer lugar, en el caso de sólidos, la condición de contorno general en un punto de la frontera con vector normal unitario exterior \vec{n} se escribirá de la forma

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_a) \quad (13)$$

donde

- el término $-k \frac{\partial T}{\partial n}$, con $\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}$, representa el calor que llega, desde el interior, hasta la frontera del recinto
- el término $h(T - T_a)$ representa el calor cedido al ambiente, siendo h el coeficiente de convección (o de película) al ambiente y T_a la temperatura ambiente

Como casos particulares se tendrán condiciones de la forma

$$T = T_a \quad (14)$$

cuando el valor del coeficiente de convección sea muy elevado, y condiciones

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (15)$$

si el coeficiente es muy reducido (esto es, en aquellas fronteras aisladas térmicamente).

Cuando se trata de problemas de transmisión de calor en fluidos aparecen habitualmente tres tipos de condiciones de contorno

- en aquellas partes de la frontera donde se tenga $\vec{v} \cdot \vec{n} < 0$ (esto es, el fluido entra en el recinto) siempre que la conducción sea despreciable con respecto a la convección se tendrán condiciones de la forma

$$T = T_e \quad (16)$$

donde T_e representa la temperatura del fluido entrante.

- para aquellos puntos donde $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (esto es el fluido tiene velocidad nula o se mueve por la frontera del recinto sin abandonarlo) el intercambio de calor a través de la frontera se deberá exclusivamente a la conducción y se tendrá una condición de la forma

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_a) \quad (17)$$

donde T_a representa la temperatura ambiente en el medio circundante.

- cuando se verifique $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$, la condición de contorno ha de ser impuesta con precaución. Si la conducción no es apreciable con respecto a la convección en la región donde se sitúa la frontera, el régimen de intercambio de calor en esta frontera será independiente de lo que ocurra en el exterior y la imposición de una condición de contorno inadecuada llevará a la aparición de una capa límite ficticia cerca de la frontera. Como norma general, se debe en estos casos elegir el recinto de modo que en la frontera saliente se haya llegado a un equilibrio térmico y se pueda imponer una condición de contorno

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (18)$$

sin originar una capa límite ficticia.

A las condiciones de contorno como (14) o (16) donde se impone el valor de la temperatura se les denomina condiciones (de contorno) de tipo *Dirichlet*, en tanto que a las condiciones de contorno como (15) o (18) donde se impone el valor del flujo de calor (no necesariamente nulo) se les denomina condiciones (de contorno) de tipo *Neumann*. Finalmente, a las condiciones como (13) o (17) donde se impone una relación lineal entre el flujo de calor y la temperatura se les denomina condiciones (de contorno) de tipo mixto o de *Robin*. Como se verá posteriormente, estos tres tipos principales de condiciones de contorno aparecerán también en los problemas de mecánica de sólidos y dinámica de fluidos.

Condiciones iniciales

En el caso de problemas evolutivos, será preciso describir además el campo de temperaturas del medio, sólido o fluido, en el instante inicial. En la práctica, la necesidad de imponer estas condiciones llevará a tomar como intervalo temporal en el que se resuelva el cálculo del régimen transitorio aquel que comience con un régimen de temperaturas fácilmente identificable (que, en una buena parte de los casos, corresponderá a una distribución uniforme de temperaturas en un medio carente de fuentes externas de calor).

1.2 Problemas en Mecánica de Sólidos

Así como en los problemas de Transmisión de Calor la formulación de aquellos problemas arrancaba de la aplicación del principio de conservación de la energía, en los problemas

de la Mecánica de Sólidos este papel es desempeñado por el principio de conservación de la cantidad de movimiento (esto es, la segunda ley de Newton). De este principio habrá de deducirse, como se hizo para los problemas de Transmisión de Calor, una ecuación en derivadas parciales para el campo de desplazamientos.

A la ecuación en derivadas resultante del principio de conservación de cantidad de movimiento se deberán añadir unas condiciones de contorno que representen el acoplamiento mecánico del medio con el exterior. En los problemas de evolución será necesario además especificar el campo de desplazamientos y velocidades que tiene lugar en el instante inicial.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Sobre cada dominio ω ocupado por el sólido se planteará un balance para la variación de la cantidad de movimiento contenida en dicho dominio como resultado de la aplicación de fuerzas externas e internas.

En la deducción que sigue se supondrá que los desplazamientos son infinitesimales de modo que las coordenadas espaciales que se empleen representarán, indistintamente, coordenadas eulerianas o lagrangianas. Al final de la sección se incluyen algunos comentarios acerca de la formulación de problemas con grandes desplazamientos.

En primer lugar, la cantidad de movimiento contenida en ω vendrá dada por

$$\int_{\omega} \rho \vec{v} d\omega \quad (19)$$

donde $\rho(\vec{x})$ representa la densidad del material en el punto de coordenadas \vec{x} y $\vec{v}(\vec{x}, t)$ la velocidad con la que se desplaza el punto de coordenadas \vec{x} en el instante t . Notando mediante $\vec{u}(\vec{x}, t)$ el desplazamiento del punto de coordenadas \vec{x} en el instante t , se tendrá la relación

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) \quad (20)$$

Denominando \vec{f} la densidad volumétrica de fuerzas externas distribuidas que actúan sobre el dominio ω (por ejemplo, la gravedad) y por \vec{t} la densidad superficial de fuerzas (internas) que actúan sobre la frontera $\partial\omega$ de este dominio, la escritura del principio de conservación de la cantidad de movimiento quedará

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \vec{v} d\omega = \int_{\omega} \vec{f} d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{t} dS \quad (21)$$

Por otro lado, la representación de las fuerzas internas se hará a través del tensor de tensiones, σ , de modo que sobre un punto de la frontera con vector normal exterior unitario \vec{n} la fuerza \vec{t} que el entorno ejerce sobre el medio resulte

$$\vec{t} = \sigma \vec{n} \quad (22)$$

esto es

$$t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

La aplicación del teorema de Gauss a cada una de las ecuaciones escalares (escritura del principio de conservación de la cantidad de movimiento sobre cada eje)

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} d\omega = \int_{\omega} f_i d\omega + \int_{\partial\omega} t_i dS \quad i = 1, 2, 3 \quad (24)$$

lleva a

$$\int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} d\omega = \int_{\omega} f_i d\omega + \int_{\omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\omega \quad i = 1, 2, 3 \quad (25)$$

donde, por lo tanto

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

Como ocurría con la ecuación (7) en los problemas de Transmisión de Calor, la resolución de un problema de Mecánica de Sólidos consistirá en la determinación del campo de desplazamientos $\{u_i(\bar{x}, t)\}_{i=1}^3$ y el tensor de tensiones $\{\sigma_{ij}(\bar{x}, t)\}_{i,j=1}^3$ sobre el recinto considerado. Al igual que se tenía en aquel caso, ambos campos no son independientes sino que el tensor de tensiones viene dado a partir del campo de desplazamientos y las propiedades del material. A dicha relación se le denominará *ley constitutiva* (o *ecuación constitutiva*).

Existe una amplia gama de comportamientos mecánicos distintos entre los sólidos, entre los que destacan

- comportamiento elástico: existe una relación entre las tensiones y las deformaciones que sufre el material, sin que existan deformaciones permanentes
- comportamiento elastoplástico: existe una relación entre las tensiones y las deformaciones que sufre el material, que pueden contener una parte permanente
- comportamiento viscoplástico: existe una relación entre las tensiones, las deformaciones (que pueden contener una parte permanente) y las velocidades de deformación

Estas notas se centrarán en un tipo particular de comportamiento elástico: la elasticidad lineal isótropa. En este caso, definiendo el tensor (lineal) de deformaciones mediante

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (27)$$

se tiene una relación de la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (28)$$

que generaliza la ley de Hooke y donde

- λ y μ son las denominadas constantes de Lamé
- el índice δ_{ij} toma el valor 1 si $i = j$ y el valor 0 en caso contrario

Existen otras parejas de parámetros de elasticidad, relacionadas con las anteriores, que permiten identificar un medio elástico isótropo. Entre éstas se encuentra la formada por el módulo de Young, E , y el coeficiente de Poisson, ν , cuya relación con las constantes de Lamé viene dada por

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (29)$$

y

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (30)$$

De este modo, el problema se plantea como la búsqueda del campo de desplazamientos $\vec{u}(\vec{x}, t)$ solución de (26) con (28).

La sustitución de (28) en las ecuaciones (26) da lugar, en el caso de que estos coeficientes se mantengan constantes, a las denominadas *ecuaciones de Lamé*:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}(\text{div } \vec{u}) + \mu \text{rot rot } \vec{u} = \vec{f} \quad (31)$$

donde

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (32)$$

Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno más habituales en el marco de la mecánica de sólidos corresponden a generalizaciones de las condiciones encontradas en los problemas de transmisión de calor. Obsérvese que habrá de tratarse de versiones vectoriales puesto que ahora las incógnitas son vectores y será necesario imponer una condición de contorno por cada una de las ecuaciones en derivadas parciales que han de resolverse. Visto de otro modo, a la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento sobre cada eje coordenado se ha de añadir una condición de contorno relativa a las fuerzas o desplazamientos según ese eje sobre la frontera del cuerpo.

Así, las condiciones de contorno más habituales resultan

- condiciones de contorno de (tipo) Dirichlet, donde se impone el valor de los desplazamientos. Éste sería el caso, por ejemplo, de la parte empotrada de la frontera de un cuerpo donde, no siendo posible el desplazamiento del cuerpo si la rigidez del sólido donde se empotra es mucho mayor que la del propio cuerpo, el campo de desplazamiento habrá de anularse sobre la frontera que representa la interfase entre el cuerpo y el sólido donde se empotra éste. Este tipo de condición de contorno se escribe de la forma

$$\vec{u} = \vec{g} \quad (33)$$

donde \vec{g} representa el campo de desplazamientos impuesto en la frontera.

- condiciones de contorno de (tipo) Neumann, donde se impone el valor de la tensión exterior aplicada. Este tipo de condición de contorno aparece en aquella parte de la frontera donde se impone una fuerza exterior (que podría eventualmente ser nula, como ocurre en las caras libres de un sólido) y se escribe

$$\sigma \vec{n} = \vec{g} \quad (34)$$

donde \vec{n} representa el vector normal unitario, orientado exteriormente con respecto al cuerpo, sobre la frontera y \vec{g} la densidad superficial de fuerzas ejercidas sobre el cuerpo.

- condiciones de contorno de (tipo) Robin, donde se establece una relación lineal entre el campo de desplazamientos y la tensión aplicada. Este tipo de condición de contorno, menos habitual, aparece en el acoplamiento del sólido con un medio de comportamiento bien conocido donde se puede establecer una relación lineal, con coeficientes conocidos, entre las tensiones aplicadas en la frontera y los desplazamientos de los puntos situados sobre esta frontera. Dicha condición se escribirá de la forma

$$\sigma \vec{n} = k \vec{u} \quad (35)$$

Adicionalmente, existen condiciones de contorno que podríamos denominar mixtas en el sentido en que sobre unas componentes se imponen los valores de los desplazamientos en tanto que sobre otras se imponen valores de las fuerzas externas ejercidas. Éste es el caso, por ejemplo, de la existencia de planos de simetría: los desplazamientos de los puntos situados sobre el plano deben estar contenidos en el propio plano (lo que permite asegurar que la componente normal del desplazamiento será nula) en tanto que la derivada normal de cualquier variable sobre el plano deberá ser nula, lo que implica que no podrán aparecer esfuerzos cortantes sobre dicho plano (y por lo tanto las componentes sobre el plano de las fuerzas externas ejercidas serán nulas).

Condiciones iniciales

En la resolución de problemas de evolución, será preciso añadir las correspondientes condiciones iniciales. Así, es necesario especificar tanto el valor del campo de desplazamientos como el del campo de velocidades en el instante inicial.

Del mismo modo que en la resolución de problemas evolutivos en Transmisión de Calor, la resolución del problema transitorio comenzará en un instante donde el campo de desplazamientos y velocidades sea fácilmente identificable. Habitualmente, se hará a partir de una posición de equilibrio en ausencia de cargas (cuya posición se tomará justamente como referencia para medir los desplazamientos), donde las velocidades iniciales serán nulas. En algunos casos, la posición inicial puede corresponder a un equilibrio en presencia de cargas y en otros el campo de velocidades iniciales puede ser no nulo (como ocurre en el caso de las percusiones).

Observación sobre problemas no lineales

En la práctica, los sólidos se comportan de modo elástico y lineal solamente si las tensiones a las que se les somete no son muy elevadas. En caso contrario, pueden responder de una forma no lineal sin deformaciones permanentes (comportamiento elástico no lineal) o bien pueden aparecer deformaciones permanentes, de modo que la escritura de la ley de comportamiento habrá de hacerse de un modo más general que el descrito previamente (comportamiento plástico). En cualquier caso, los correspondientes problemas resultarán no lineales, calificando dicha no linealidad como *no linealidad material* ya que proviene de una dependencia no lineal entre tensiones y deformaciones.

Existe otra fuente de no linealidad en las ecuaciones de la mecánica de sólidos: es la que proviene de la existencia de desplazamientos finitos (esto es, no infinitesimales, aunque a veces se emplea también el término de *grandes desplazamientos* como sinónimo de desplazamientos finitos) en el sólido. En la exposición anterior, se ha supuesto que los desplazamientos sufridos por los puntos materiales son lo suficientemente pequeños como para poder identificar las coordenadas eulerianas y lagrangianas (esto es, cada punto del espacio está ocupado

siempre por el mismo punto material). En algunos casos, esta suposición no será cierta y se hará necesario distinguir entre los dos tipos de coordenadas (las ecuaciones de conservación habrán de escribirse sobre el dominio ocupado por el cuerpo en cada instante pero deberán ser llevadas a un dominio de referencia para ser resueltas sobre un dominio fijo en el tiempo; al mismo tiempo la ley constitutiva ha de escribirse en unas coordenadas ligadas al material). La formulación del problema lleva entonces a unas ecuaciones no lineales incluso en el caso en que el comportamiento del material siga siendo lineal (aunque, al producirse desplazamientos finitos, es habitual que aparezcan grandes deformaciones y el comportamiento del material no sea lineal). A este tipo de no linealidad se le denomina *no linealidad geométrica*.

La formulación de comportamientos no lineales (ya sea *materiales* o *geométricos*) es complicada y escapa al alcance de estas notas, por lo que apenas será tratada.

Observación sobre la reducción a problemas bidimensionales y unidimensionales

Las ecuaciones descritas anteriormente corresponden a la resolución de un problema tridimensional en mecánica de sólidos. En el marco de la elasticidad lineal, dichas ecuaciones describen la situación más general. Sin embargo, en muchos casos ciertas propiedades geométricas o de simetrías del problema pueden permitir simplificar las correspondientes ecuaciones y resolver problemas más sencillos. Éste es el caso de la reducción a problemas bidimensionales o unidimensionales.

Así, la simetría del problema (esto es, la simetría de la geometría y de las cargas) puede permitir las siguientes simplificaciones bidimensionales

- problemas de deformaciones planas
- problemas en tensiones planas
- problemas axisimétricos

al tiempo que la presencia de una dimensión transversal muy reducida permite considerar algunos problemas bajo las formulaciones de la teoría de placas y láminas.

Asimismo, las propiedades de simetría de las soluciones pueden llevar también a problemas unidimensionales en el caso de problemas de deformaciones uniaxiales, en tanto que aquellos sólidos con una sección transversal muy reducida pueden ser abordados desde la teoría de vigas.

1.3 Problemas de Dinámica de Fluidos

En los problemas en dinámica de fluidos, la descripción de los problemas pasa por la escritura de dos principios de conservación

- principio de conservación de la cantidad de movimiento (o segunda ley de Newton)

- principio de conservación de la masa

de los que habrán de deducirse las ecuaciones en derivadas parciales que describan los campos de velocidades, a las que será preciso añadir las correspondientes condiciones de contorno y condiciones iniciales (en el caso de los problemas de evolución).

Principio de conservación de la materia

Dado un dominio cualquiera ω ocupado por el fluido, habrá de verificarse sobre él un balance de materia donde la tasa de variación de masa contenida en el recinto sea igual al flujo neto a través de sus fronteras. Así, se deberá verificar

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho d\omega = - \int_{\partial\omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (36)$$

donde $\rho(\vec{x}, t)$ representa la densidad del fluido en el punto de coordenadas \vec{x} en el instante t y $\vec{v}(\vec{x}, t)$ representa la velocidad con la que se mueve el fluido en el punto de coordenadas \vec{x} en el instante t .

Mediante la aplicación del *Teorema de la divergencia* (5) con $\vec{F} = \rho \vec{v}$ se obtiene una escritura bajo forma diferencial del principio de conservación de la materia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0 \quad (37)$$

Principio de conservación de la cantidad de movimiento

El balance de cantidad de movimiento sobre un recinto genérico ω ocupado por el fluido se escribe en el caso de un fluido que se mueve con velocidad \vec{v}

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \vec{v} d\omega = \int_{\omega} \vec{f} d\omega + \int_{\partial\omega} \vec{t} dS - \int_{\partial\omega} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (38)$$

donde \vec{t} representa (al igual que en el principio de conservación de la cantidad de movimiento en sólidos) la densidad superficial de fuerzas ejercidas sobre la frontera por el resto del fluido. Obsérvese que el último término de la ecuación, ausente en la escritura de este principio de conservación en sólidos, corresponde a la cantidad de movimiento perdida (respectivamente ganada) por la salida (respectivamente entrada) de fluido a través de la frontera del recinto.

De nuevo, representando las tensiones internas \vec{t} a través del tensor de tensiones

$$\vec{t} = \sigma \vec{n} \quad (39)$$

la aplicación del *Teorema de la divergencia* a cada una de las componentes de las dos últimas integrales conduce a una escritura diferencial del principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (40)$$

Sustituyendo, en la ecuación anterior, la relación diferencial dada por la ecuación de conservación de la materia (37) se obtiene

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (41)$$

De igual modo que en el caso de sólidos, el campo de tensiones internas σ y el campo de velocidades \vec{v} no son independientes sino que están relacionados a través de una cierta *ley constitutiva*. En relación con dichas leyes constitutivas, los fluidos pueden clasificarse en

- fluidos newtonianos
- fluidos no newtonianos

Los primeros (donde se incluyen la mayor parte de los fluidos) se definen como aquellos fluidos en los que se establece una relación afín entre el tensor de tensiones, σ_{ij} , y el tensor de velocidades de deformación, $\dot{\epsilon}_{ij}$, que se define mediante

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (42)$$

El caso más habitual entre éstos, lo representan los fluidos newtonianos viscosos donde se tiene una relación entre tensiones y velocidades de deformación de la forma

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad (43)$$

con p la presión del fluido y μ el coeficiente de viscosidad (o viscosidad dinámica).

Como ejemplo de fluidos no newtonianos se encuentran las suspensiones que contienen moléculas de gran tamaño (como los polímeros o el flujo sanguíneo). En estos casos, las leyes constitutivas resultan más complicadas.

Ecuaciones de Navier-Stokes

En suma, los principios de conservación de la materia y la cantidad de movimiento se escriben, para un fluido newtoniano viscoso de la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (44)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} p - \mu \Delta \vec{v} = \vec{f} \quad (45)$$

donde se ha notado

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(\sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_2}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_3}{\partial x_j} \right) \quad (46)$$

Las ecuaciones (44)-(45) representan un modelo relativamente general en el marco de la dinámica de fluidos (aunque excluye tanto los comportamientos no newtonianos como los flujos turbulentos). En estas ecuaciones aparecen como incógnitas las tres componentes del campo de velocidades, el campo de presiones y la densidad del fluido. Se tienen así cuatro ecuaciones (una ecuación asociada al principio la conservación de la masa y una ecuación por cada eje asociada al principio de conservación de la cantidad de movimiento) para resolver cinco incógnitas, de modo que ha de existir alguna relación adicional entre ellas. A esta ecuación adicional, que relaciona generalmente las variables internas del fluido (densidad, presión y temperatura), se le denomina *ecuación de estado*. Así por ejemplo en el caso de los gases perfectos (o ideales) se tiene una relación de la forma

$$p = \rho RT \quad (47)$$

Obsérvese que gracias a la ecuación de estado se ha establecido una relación (algebraica) entre las incógnitas pero, al mismo tiempo, se ha hecho aparecer la temperatura por lo que la resolución de las ecuaciones del movimiento del fluido obliga también a resolver la ecuación de conservación de la energía descrita previamente.

En la práctica, es común encontrar problemas donde las ecuaciones anteriores pueden simplificarse significativamente. Las principales simplificaciones posibles sobre las ecuaciones son

- si el fluido está en equilibrio térmico, la temperatura será un dato y no será preciso resolver la ecuación de conservación de la energía
- si se trata de un líquido o de un gas que se mueve a velocidades reducidas (en comparación con la velocidad del sonido en dicho gas; esto es, el número de Mach es bajo) el fluido resultará prácticamente incompresible y la densidad será constante (una vez fijada la temperatura). En tal caso, la ecuación de conservación de la masa toma la forma

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (48)$$

- si las velocidades del fluido son relativamente reducidas el término no lineal debido a la convección puede resultar despreciable en comparación con el término de viscosidad

$$\|\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\| \ll \|\mu \Delta \vec{v}\| \quad (49)$$

esto ocurrirá cuando el número de Reynolds asociado al flujo (que se define justamente como el cociente entre los valores característicos de ambos términos) sea reducido. En tal caso, se podrán resolver las ecuaciones de forma simplificada prescindiendo del primer término.

De este modo, para un régimen de velocidades reducidas (valores pequeños de los números de Mach y Reynolds) de un fluido en equilibrio térmico se puede resolver un sistema simplificado

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (50)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p - \mu \Delta \vec{v} = \vec{f} \quad (51)$$

Condiciones de contorno

En las ecuaciones de la dinámica de fluidos, la imposición de condiciones de contorno es algo más delicada que en los problemas previamente descritos, debido fundamentalmente a dos razones

- en los dominios de simulación numérica habitualmente aparecen fronteras *artificiales* (esto es, fronteras originadas por la limitación del dominio sobre el cual se llevará a cabo la resolución, que no se corresponden con la frontera del recinto donde se encuentra el fluido)
- en los flujos con viscosidad no muy elevada (números de Reynolds no muy reducidos) aparecerán capas límite asociadas al carácter convectivo de las ecuaciones

Asimismo cabe observar que el orden de los operadores de derivación espacial de las dos variables del problema (velocidad y presión) son diferentes. La existencia de derivadas de orden dos en la velocidad hace esperar que las condiciones de contorno sobre dicha variable se extiendan a toda la frontera en tanto que la presencia de derivadas exclusivamente de primer orden en la presión sugieren que solamente se deberán imponer condiciones sobre ésta en una parte de la frontera.

En todo caso conviene distinguir tres tipos principales de fronteras

- superficie de contacto del fluido con una pared sólida
- frontera de entrada del fluido (en el dominio de simulación)

- frontera de salida del fluido (del dominio de simulación)

En las superficies de contacto del fluido con una pared sólida podrán aparecerán condiciones de contorno sobre la velocidad (como en el caso de una pared fija o en movimiento, con velocidad conocida)

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (52)$$

o condiciones sobre la tensión que pared sólida ejerce sobre el fluido (como en el caso de una pared móvil donde se controla la fuerza ejercida sobre el fluido)

$$\sigma \vec{n} = \vec{g}_1 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (53)$$

involucrando estas últimas tanto al campo de velocidades como al de presiones, dada la ley constitutiva (43).

La condición sobre las velocidades descrita en primer lugar implica que la solución numérica habrá de resolver las capas límite que se originen cerca de la pared sólida (donde la velocidad del fluido pasará del valor impuesto para las partículas pegadas a dicha pared a la velocidad del fluido cerca de esta pared). Ello obligará (salvo que la viscosidad sea muy elevada) a resolver zonas de pequeño espesor, por lo que a veces se prefiere imponer condiciones de contorno que incorporen ya esta capa límite. Así, si la velocidad sobre la frontera representa la velocidad del fluido fuera de la capa límite se pueden integrar las ecuaciones sobre la capa para obtener una descripción de la fricción generada mediante una condición de contorno (que habitualmente se denomina *de deslizamiento*)

$$\vec{\tau} = h(\vec{v}_1 - \vec{v}_\tau) \quad \text{y} \quad \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (54)$$

donde \vec{v}_t representa la componente tangencial de la velocidad, \vec{v}_n la componente normal de ésta, $\vec{\tau}$ el esfuerzo cortante generado por la pared sólida y \vec{v}_1 la velocidad a la que se desplaza la pared sólida (que se supone, en este caso, tangente a la propia pared).

Para las fronteras de entrada del fluido, habitualmente se tienen condiciones de tipo Dirichlet tanto para la velocidad como para la presión

$$\vec{v} = \vec{v}_2 \quad \text{y} \quad p = p_2 \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (55)$$

Finalmente, para las fronteras de salida del fluido (que serán en la mayor parte de los casos artificiales) es posible encontrar condiciones de tipo Dirichlet sobre la velocidad aunque esto no resulta habitual (puesto que la velocidad de salida es *a priori* desconocida). Por el contrario, el dominio de simulación se extiende hasta aquella zona (también *a priori* desconocida) donde se estabiliza el flujo y desaparecen los gradientes de velocidad; así la condición sobre esta frontera sería aquella que hace nulas todas las derivadas normales del campo de velocidades. En la práctica esto significa que las tensiones en el interior del fluido en esta región son puramente hidrostáticas por lo que si se conociese la presión en estos, p_Γ , puntos se tendría una condición de la forma

$$\sigma \vec{n} = p_3 \vec{n} \quad \text{en } \Gamma_3 \quad (56)$$

Ahora bien, generalmente la presión en la zona de salida suele ser desconocida por lo que no podría formularse la condición de contorno de este modo. De cualquier forma, puesto que las presiones solamente tienen interés como medidas relativas habitualmente se opta por eliminar la presión en las condiciones de contorno en la frontera de entrada de fluido e imponerla en la zonas de salida (lo que, en la práctica, no supone sino establecer como referencia para el cálculo de las presiones la frontera de salida del fluido).

Condiciones iniciales

En la resolución de problemas evolutivos será preciso describir, para el caso incompresible, el campo de velocidades en el instante inicial

$$\vec{v}(\vec{x}, 0) = \vec{v}_0(\vec{x}) \quad (57)$$

Por otro lado, en los problemas compresibles, es necesario añadir además una condición inicial sobre la densidad

$$\rho(\vec{x}, 0) = \rho_0(\vec{x}) \quad (58)$$

Descripción de flujos turbulentos

Las ecuaciones descritas hasta este momento se refieren a un flujo viscoso en régimen laminar. No obstante, para elevados valores del número de Reynolds, las hipótesis de regularidad precisas sobre los campos de velocidades (y de presiones) no se mantienen haciéndose preciso considerar campos de velocidades con fluctuaciones locales.

La descripción del flujo, en ese caso, se hará a través de un campo de velocidades promediadas. Las ecuaciones correspondientes se obtendrán asimismo mediante promediado de las ecuaciones para el régimen laminar a las que se añadirán unas ciertas hipótesis sobre la naturaleza de las fluctuaciones locales. Así, el campo de velocidades medias \vec{V} y el campo de presiones medias P son solución (en ausencia de fuerzas exteriores) de la ecuación

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \vec{\nabla} P - \nu \Delta \vec{V} - \text{div} R = 0 \quad (59)$$

donde R representa el tensor de Reynolds (cuya componente R_{ij} corresponde a un cierto promedio local del término $-v_i v_j$, donde \vec{v} representa el campo de velocidades puntuales) y ν representa la viscosidad cinemática.

Entre los modelos turbulentos (entendidos como los modos de representar el tensor de Reynolds), uno de los más populares es el denominado *modelo $k - \epsilon$* de Launder y Spalding. En este modelo, el tensor se describe mediante

$$R_{ij} = -2k\delta_{ij} + (\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}) (\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}) \quad (60)$$

donde

- k representa la energía cinética asociada a la turbulencia
- ϵ representa la velocidad de disipación de la energía turbulenta

Estas dos variables son, a su vez, solución de dos ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} k - \frac{c_\mu k^2}{2\epsilon} |\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T|^2 - \operatorname{div}(c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \vec{\nabla} k) + \epsilon = 0 \quad (61)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \epsilon - \frac{c_1 k}{2} |\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T|^2 - \operatorname{div}(c_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \vec{\nabla} \epsilon) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (62)$$

Existen, por otro lado, diversas modificaciones del modelo $k - \epsilon$ donde los coeficientes del modelo se determinan a partir de ciertas variables o se añaden algún término fuente para la segunda ecuación.

Otros modelos en la mecánica de fluidos

Junto a los modelos anteriores, que describen los flujos viscosos en regímenes laminar y turbulento, existen otros modelos que llevan a cabo simplificaciones adicionales. Entre estos últimos cabe destacar:

- Flujo potencial, que describe los flujos irrotacionales en ausencia de viscosidad. La condición de irrotacionalidad permite describir las velocidades a partir de un potencial que será solución de una ecuación de Poisson.
- Ecuaciones de Euler, que describen los flujos no viscosos. Estas ecuaciones corresponden formalmente a una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes donde desaparecen los términos viscosos; no obstante, su tratamiento requiere una atención especial ya que sus soluciones pueden presentar singularidades (como ondas de choque).
- Ecuaciones de la acústica, que corresponden al estudio de pequeñas perturbaciones de las ecuaciones anteriores y conducen a ecuaciones de ondas que representan la propagación del sonido en el fluido.

Finalmente existen otro tipo de simplificaciones que podríamos denominar *dimensionales*. Es el caso, por ejemplo, de los flujos poco profundos (como el flujo en un canal) donde se representa el movimiento del fluido mediante un modelo bidimensional a través de las adecuadas hipótesis sobre el comportamiento del campo de velocidades y de presiones en la variable transversal (altura).

1.4 Otros problemas notables

Junto a los tres problemas descritos anteriormente (transmisión de calor, mecánica de sólidos y mecánica de fluidos) existen otros problemas cuya simulación numérica presenta un notable

interés en la técnica. Entre éstos están los problemas en electromagnetismo.

Problemas electrostáticos

En primer lugar, el campo eléctrico \vec{E} en los problemas electrostáticos (donde tanto el campo eléctrico como el magnético no dependen del tiempo y no existen corrientes eléctricas) en un medio homogéneo viene descrito por

$$\epsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad (63)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (64)$$

donde ρ representa la densidad de cargas eléctricas en cada punto y ϵ la constante dieléctrica del medio.

La segunda ecuación permite asegurar la existencia de un potencial ϕ de modo que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (65)$$

que sustituida en la primera ecuación conduce a

$$-\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (66)$$

de modo que la resolución de los problemas electrostáticos conduce a una ecuación de Poisson, a la que se añadirán condiciones de contorno de tipo Dirichlet (en aquella parte de la frontera donde el potencial eléctrico sea conocido), Neumann (donde se conozca la componente normal del campo eléctrico) o Robin (donde exista una relación afín entre la componente normal del campo eléctrico y el potencial).

Como se ve, la formulación de este problema es idéntica a la del cálculo de la distribución estacionaria de temperaturas en un sólido con conductividad constante.

Problemas magnéticos

En ausencia de campos eléctricos variables con el tiempo, el campo magnético \vec{B} en un medio homogéneo es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (67)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (68)$$

donde μ representa la permeabilidad magnética y \vec{J} la densidad de corriente eléctrica (que será función, a su vez, del campo eléctrico).

En este caso, la condición de divergencia nula también permite deducir la existencia de un potencial (en este caso vectorial) y reescribir el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

(aunque no es posible reducirlo a una ecuación escalar como en el caso del campo eléctrico).

Problemas electromagnéticos

Cuando se trata de problemas acoplados (como ocurre cuando los campos son variables en el tiempo) es preciso resolver simultáneamente ambos campos a partir de las ecuaciones de Maxwell. En el caso de un medio no necesariamente homogéneo, éstas se escriben

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (69)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (70)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{J} \quad (72)$$

donde \vec{D} representa la inducción eléctrica y \vec{H} la inducción magnética. A estas ecuaciones se les deben añadir unas leyes de comportamiento que describan la relación entre \vec{D} y \vec{E} , por un lado, y \vec{B} y \vec{H} por otro. En el caso de un medio lineal, éstas serán de la forma

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \quad (73)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{M} \quad (74)$$

donde \vec{E} y \vec{M} representan la polarización y la magnetización del medio, respectivamente. Asimismo, en un medio lineal \vec{J} y \vec{E} estarán relacionados a través de la conductividad eléctrica, σ mediante

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (75)$$

Propagación de ondas electromagnéticas

En ausencia tanto de cargas ($\rho = 0$) como de corrientes eléctricas ($\vec{J} = \vec{0}$), las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo permiten deducir un sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \Delta \vec{B} = 0 \quad (76)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\epsilon} \Delta \vec{E} = 0 \quad (77)$$

que representa los fenómenos de propagación de ondas electromagnéticas en el medio, con

una velocidad $c = (\mu\epsilon)^{-1/2}$.

Otros problemas

Existen otros modelos interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones, cuya descripción pasa por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Entre estos están, por ejemplo

- problemas en física de plasmas (descritos a través de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica)
- problemas de dinámica de poblaciones, como la evolución de ecosistemas (descritos a través de sistemas de reacción-difusión)
- problemas en biomecánica (descritos a través de las ecuaciones de la mecánica de sólidos)

1.5 Observaciones sobre problemas acoplados

En la práctica, es habitual encontrar sistemas donde los fenómenos descritos anteriormente ocurren simultáneamente y, por lo tanto han de ser resueltos al mismo tiempo. Éste es el caso, por ejemplo, de la termoelasticidad, donde ocurren simultáneamente procesos de transmisión de calor y de deformación mecánica, o de la dinámica de flujos no isoterms, donde junto al problema hidrodinámico aparece un problema de transmisión de calor.

En algunos casos, la resolución de problemas acoplados permite resolver los procesos separadamente. Así, por ejemplo, en el caso de la termoelasticidad es posible, bajo ciertas hipótesis, resolver en primer lugar el problema de transmisión de calor para, posteriormente, resolver el problema elástico, incorporando en este cálculo las tensiones térmicas adicionales (y, si así fuese, la dependencia térmica de las propiedades elásticas).

En otros casos, sin embargo, no se podrá proceder del modo anterior. Así ocurre, por ejemplo, en la dinámica de flujos no isoterms debido a las fuerzas de flotación: la resolución del problema de transmisión de calor en el fluido requiere conocer el campo de velocidades, pero éste a su vez está influido por las fuerzas de flotación. Para este tipo de problemas es preciso resolver simultáneamente ambos problemas (salvo que las fuerzas de flotación sean despreciables y las propiedades del fluido no dependan de la temperatura pues, en tal caso, se puede resolver primero el problema hidrodinámico y después el de transmisión de calor).

1.6 Bibliografía

1. Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

2. Carslaw, H.S.; Jaeger, J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1959.
3. Fowler, A.C. *Mathematical Models in the Applied Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
4. Hirsch, C, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, Chichester, 1988.
5. Marsden, J.E.; Hughes, T.J.R. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
6. Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1970.

2. Introducción al método de elementos finitos

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales del método de elementos finitos sobre un problema modelo sencillo. El objetivo de este capítulo es presentar tanto una formulación elemental del método como su implementación efectiva y un análisis sencillo del error cometido por el método.

2.1 Formulación de un problema modelo unidimensional

Se considera el cálculo mecánico de una columna de una estructura en una hipótesis de carga simétrica estacionaria. En tales condiciones, el cálculo puede reducirse a la resolución de un problema unidimensional para las deformaciones axiales de esta columna. Así, por ejemplo, el cálculo de la columna central en la figura de la izquierda puede reducirse (cuando la carga es simétrica) al cálculo de las deformaciones axiales del elemento representado a la derecha.

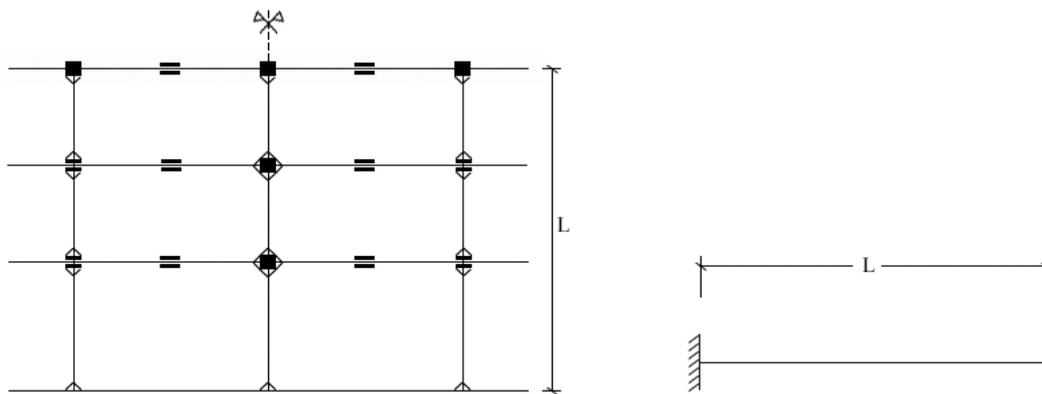


figura 2.1. Estructura con carga simétrica y reducción a modelo unidimensional

Suponiendo que las propiedades mecánicas de los materiales sobre cada sección transversal al eje son constantes (aunque puedan variar a lo largo del eje), se pueden describir los desplazamientos axiales $u(x, t)$ mediante la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento según la dirección axial:

$$-\frac{d\sigma}{dx} = f \quad (78)$$

donde $\sigma(x)$ representa la tensión sobre la sección y $f(x)$ la densidad lineal de cargas de axiales (suma del peso de la columna y las cargas de la estructura), para la sección situada a una altura x (tomando $x = 0$ para el empotramiento de la columna en la cimentación).

Si, por otro lado, suponemos un comportamiento elástico lineal de los materiales se tendrá:

$$\sigma(x) = SE \frac{du}{dx} \quad (79)$$

donde $SE(x)$ representa el producto del área de la sección por el módulo de Young, para la sección situada a una altura x .

De este modo, la ecuación del equilibrio de fuerzas (esto es, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el caso estacionario) se escribe

$$-\frac{d}{dx} \left(SE \frac{du}{dx} \right) = f \quad x \in (0, L) \quad (80)$$

A esta ecuación se sumarán las condiciones de contorno asociadas al empotramiento del extremo inferior

$$u(0) = 0 \quad (81)$$

y a la existencia de una carga concentrada F (positiva en el caso de esfuerzos de tracción) en el extremo superior

$$SE(L) \frac{du}{dx}(L) = F \quad (82)$$

2.2 Resolución mediante un método de diferencias finitas

Antes de formular la resolución de este problema mediante el método de elementos finitos, se va a recordar su resolución mediante métodos de diferencias finitas a fin de resaltar tanto las semejanzas como las diferencias entre ambos métodos.

La resolución del problema anterior mediante el método de diferencias finitas comienza por la división del intervalo $(0, L)$ en subintervalos mediante la introducción de unos puntos $\{x_i\}_{i=0}^N$ que suponemos ordenados de la forma

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = L \quad (83)$$

Sobre cada uno de estos puntos, el método buscará una aproximación del desplazamiento axial de la sección. Estas aproximaciones se denotarán por $\{u_i\}_{i=1}^N$.

A continuación se escribirá una aproximación de la ecuación de equilibrio sobre cada una de las secciones. Para ello será preciso obtener, en primer lugar, aproximaciones de las tensiones. Estas aproximaciones se pueden obtener, de modo sencillo, sobre los puntos medios de los subintervalos (x_i, x_{i+1})

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (84)$$

a partir de las aproximaciones, $\{u_i\}_{i=1}^N$, de los desplazamientos en los extremos del subintervalo mediante

$$\sigma(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \sigma_{i+\frac{1}{2}} = SE(x_{i+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (85)$$

De este modo, la ecuación del equilibrio sobre cada punto $\{x_i\}_{i=1}^N$ se escribe

$$-\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}} - \sigma_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = f(x_i) \quad (86)$$

y sustituyendo en ella las aproximaciones de las tensiones se tendrá

$$-\frac{2 SE(x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}(u_{i+1} - u_i) + \frac{2 SE(x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}(u_i - u_{i-1}) = f(x_i) \quad (87)$$

Finalmente, reordenando los términos de estas ecuaciones se habrá obtenido un sistema de ecuaciones lineales para las aproximaciones de los desplazamientos $\{u_i\}_{i=1}^N$ de la forma

$$\begin{aligned} & -\frac{2 SE(x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} u_{i-1} \\ & + \left(\frac{2 SE(x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} + \frac{2 SE(x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \right) u_i \\ & - \frac{2 SE(x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} u_{i+1} = f(x_i) \end{aligned} \quad (88)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ con $u_0 = 0$ debido a la condición de empotramiento.

Una vez resuelto el sistema (tridiagonal) de ecuaciones, se recuperará una aproximación de las tensiones sobre los puntos $\{x_{i+\frac{1}{2}}\}_{i=0}^{N-1}$ mediante la expresión (85).

La calidad de la aproximación así obtenida, para un número fijo de puntos de aproximación, depende fundamentalmente de la regularidad de los coeficientes (tanto de las propiedades materiales, $SE(x)$, como de las cargas, $f(x)$) y de la distribución de estos puntos (que deberán acumularse allí donde se produzcan las mayores variaciones de los desplazamientos y las tensiones). En aquellas secciones donde se produzca una discontinuidad de las propiedades materiales, $SE(x)$, será preciso introducir en todo caso un punto de aproximación de los desplazamientos a fin de retener una aproximación correcta de las tensiones.

Por otro lado, la extensión de estas técnicas a problemas bidimensionales o tridimensionales puede llegar a ser muy complicada si el dominio no tiene una geometría muy sencilla.

2.3 Principio de los trabajos virtuales y métodos de Galerkin

Como se ha visto, los métodos de diferencias finitas abordan la resolución aproximadas de las ecuaciones de equilibrio sobre un cierto número de secciones (aquellas que corresponden a las alturas $\{x_i\}_{i=1}^N$). Existe un enfoque alternativo de la resolución numérica del problema, que pasa por la resolución aproximada del principio de los trabajos virtuales. La idea ya no será entonces buscar el equilibrio aproximado de las secciones sino que los trabajos virtuales globales de fuerzas externas e internas sean nulos.

Comenzaremos por recordar la deducción del principio de los trabajos virtuales a partir de la ecuación de equilibrio (80). Así, definimos un espacio de desplazamientos admisibles (o virtuales) como aquellos que verifican la condición de empotramiento y dan lugar a energías elásticas finitas (excluyendo, por ejemplo, la posibilidad de discontinuidades en el campo de desplazamientos que originaría una energía elástica no acotada). Sea entonces

$$V_{ad} = \{v : [0, L] \rightarrow \mathbf{R} / v(0) = 0, \int_0^L SE\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx < +\infty\} \quad (89)$$

Recuérdese que la energía elástica asociada a las fuerzas internas para un campo de desplazamientos v , que notaremos por $\mathcal{E}_{elas}^{int}(v)$ viene dada por

$$\mathcal{E}_{elas}^{int}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma(v)\epsilon(v) dx \quad (90)$$

donde $\sigma(v)$ y $\epsilon(v)$ representan, respectivamente, el campo de tensiones y el campo de deformaciones asociados al campo de desplazamientos v . Empleando ahora la ley constitutiva se tendrá

$$\mathcal{E}_{clas}^{int}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L SE \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (91)$$

Si se multiplica cada término de la ecuación (80) por un campo v de desplazamientos admisible y se integra sobre el intervalo $(0, L)$ para calcular el trabajo total de las fuerzas internas y externas se tiene:

$$- \int_0^L \frac{d}{dx} \left(SE \frac{du}{dx} \right) v dx = \int_0^L f v dx \quad \forall v \in V_{ad} \quad (92)$$

Si integramos por partes el término de la izquierda se tiene

$$- \int_0^L \frac{d}{dx} \left(SE \frac{du}{dx} \right) v dx = -SE(L) \frac{du}{dx}(L) v(L) + SE(0) \frac{du}{dx}(0) v(0) + \int_0^L SE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (93)$$

donde, para v perteneciente a V_{ad} y empleando la condición de contorno sobre u en $x = L$, se tiene

$$- \int_0^L \frac{d}{dx} \left(SE \frac{du}{dx} \right) v dx = -F v(L) + \int_0^L SE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (94)$$

En suma, para u solución de la ecuación de equilibrio (80) se ha obtenido la relación

$$\int_0^L SE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L f v dx + F v(L) \quad \forall v \in V_{ad} \quad (95)$$

que no es sino el *principio de los trabajos virtuales*, donde el término de la izquierda representa el trabajo global realizado por las tensiones internas, $SE \frac{du}{dx}$, para un campo de desplazamientos virtuales v y el término de la derecha representa el trabajo global realizado por las fuerzas externas distribuidas, f , y concentradas, F , para ese mismo campo de desplazamientos virtuales.

Una formulación alternativa del cálculo del campo de desplazamientos, basada en el principio de los trabajos virtuales, será entonces:

Encontrar $u \in V_{ad}$ tal que se verifique (95)

Desde luego, cualquier solución de la formulación original del problema (esto es, una solución de la ecuación de equilibrio sobre las secciones (80) que verifique además las condiciones de contorno (81) y (82)) será solución de la nueva formulación, ya que precisamente ésta se ha deducido de aquella. La implicación inversa también es cierta en algunos casos: una solución de la nueva formulación será también solución de la formulación original siempre y cuando sea lo suficientemente regular como para deshacer los pasos dados.

Detengámonos un momento en la observación anterior. La formulación del principio de los trabajos virtuales sólo requiere que el campo de desplazamientos lleve asociada una energía

elástica acotada y para ello bastará con que tensiones y deformaciones sean continuas a trozos. Esta hipótesis contrasta con la requerida en la formulación basada en las ecuaciones de equilibrio donde era necesaria la derivabilidad de las tensiones. Obsérvese que esta última condición servirá para deshacer la deducción del principio de los trabajos virtuales a partir de las ecuaciones de equilibrio; así, toda solución del principio de los trabajos virtuales que corresponda a una distribución de tensiones derivable será al mismo tiempo solución de la ecuación de equilibrio (80) y verificará las condiciones de contorno (81) y (82).

Las diferentes hipótesis de regularidad sobre las distribuciones de tensiones en ambas formulaciones justifican que se empleen además los nombres de *formulación fuerte* para la formulación del problema basada en la ecuación de equilibrio y *formulación débil* para aquella basada en el principio de los trabajos virtuales.

Surge ahora la cuestión de considerar si una formulación es más *natural* que la otra (habida cuenta de que ambas formulaciones coinciden para las soluciones regulares). Así, recordando la deducción de las ecuaciones de la mecánica de sólidos que se hizo en el primer capítulo, se observa que la escritura de los balances de conservación de la cantidad de movimiento (a partir de los cuales se llegó a las ecuaciones de equilibrio) sólo hacían intervenir los trabajos realizados por las fuerzas internas sobre la frontera de cada recinto; fue preciso, en aquella deducción, suponer una regularidad adicional de las soluciones para obtener la ecuación de equilibrio en forma diferencial. De este modo, la derivabilidad del campo de tensiones (que aparece en la formulación de las ecuaciones de equilibrio) es una hipótesis adicional que quizás no se verifique en todos los casos, en tanto que la regularidad que precisa el principio de los trabajos virtuales coincide con la que aparece en la escritura de las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento. En este sentido, la formulación del principio de los trabajos virtuales es más *natural* que la correspondiente a las ecuaciones de equilibrio.

Existe una alternativa para la deducción del principio de los trabajos virtuales, que no parte de la formulación de las ecuaciones de equilibrio (que, como se ha visto, podrían no tener sentido en algunos casos con hipótesis de cargas poco regulares). Esta deducción pasa por razonar directamente sobre la energía elástica asociada a las soluciones.

La energía elástica total estará constituida por una parte debida a las fuerzas internas y otra asociada a las fuerzas externas. Como se ha visto anteriormente, la energía elástica asociada a las fuerzas internas para un campo de desplazamientos v viene dada por

$$\mathcal{E}_{elas}^{int}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L SE \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (96)$$

en tanto que la energía asociada a las fuerzas externas, $\mathcal{E}_{elas}^{ext}(v)$, vendrá dada (en el ejemplo propuesto) por

$$\mathcal{E}_{elas}^{ext}(v) = - \int_0^L f v dx - Fv(L) \quad (97)$$

definiéndose, en consecuencia, la energía elástica total, $\mathcal{E}_{elas}(v)$, mediante

$$\mathcal{E}_{elas}(v) = \frac{1}{2} \int_0^L SE \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L f v dx - Fv(L) \quad (98)$$

Así, se puede formular, alternativamente, la búsqueda del campo de desplazamientos solución del problema planteado del modo siguiente

Encontrar $u \in V_{ad}$ tal que se verifique: $\mathcal{E}_{elas}(u) \leq \mathcal{E}_{elas}(v) \quad \forall v \in V_{ad}$

Obsérvese que si u es solución de esta nueva formulación (esto es, el campo de desplazamientos u hace mínima la energía elástica) entonces habrá de tenerse

$$\mathcal{E}_{elas}(u + \delta u) \geq \mathcal{E}_{elas}(u) \quad \forall \delta u \in V_{ad} \quad (99)$$

En particular, tomando $\delta u = tv$ con $t \in \mathbf{R}$ y $v \in V_{ad}$, la función $F(t) = \mathcal{E}_{elas}(u + tv)$ deberá presentar un mínimo en $t = 0$ por lo que se tendrá

$$F'(0) = \int_0^L SE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \int_0^L f v dx - Fv(L) = 0 \quad (100)$$

válido para cualquier $v \in V_{ad}$, que coincide con la formulación del principio de los trabajos virtuales obtenida a partir de las ecuaciones de equilibrio.

La resolución directa del problema elástico bajo la formulación del principio de los trabajos virtuales (o bien bajo la forma de un problema de minimización de la energía elástica) presenta como principal inconveniente el hecho de hacer intervenir un espacio vectorial V_{ad} de dimensión infinita. Una de las ideas para su resolución numérica pasa por sustituir este espacio por otro de dimensión finita; los métodos basados en esta idea reciben el nombre general de *métodos de Galerkin*.

Así, la formulación de los métodos de Galerkin pasa por elegir un subespacio vectorial $V_h \subset V_{ad}$ de dimensión finita y resolver entonces el principio de los trabajos virtuales sustituyendo el espacio original V_{ad} por V_h :

Encontrar $u_h \in V_h$ tal que se verifique

$$\int_0^L SE \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx = \int_0^L f v_h dx + Fv_h(L) \quad \forall v_h \in V_h \quad (101)$$

que resultará, de hecho, equivalente a encontrar aquel campo de desplazamientos en V_h que haga mínima la energía elástica.

Entre las diversas familias de métodos de Galerkin se encuentran los métodos de elementos finitos. Estos métodos corresponden a una elección particular de los espacios V_h como espacios de funciones polinómicas a trozos. A continuación se describirá un método sencillo de elementos finitos para la discretización del problema modelo.

2.4 Formulación elemental del método de elementos finitos

El problema de encontrar $u \in V_{ad}$ tal que se verifique (95) lo reescribimos usando los funcionales a y l como sigue: encontrar $u \in V_{ad}$ tal que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V_{ad} \quad (102)$$

siendo

$$a(u, v) = \int_0^L SE \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (103)$$

$$l(v) = \int_0^L f v dx + F v(L) \quad (104)$$

La idea básica consiste en sustituir la búsqueda de la solución u del problema (102) en el espacio V_{ad} de dimensión infinita, por buscar una aproximación u_h en el espacio V_h , de dimensión finita N , que aproxima V_{ad} , esto es, hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) ; \forall v_h \in V_h \quad (105)$$

Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ es una base de V_h se tiene que

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x) \quad (106)$$

de este modo, calcular la solución del problema equivale a calcular $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$.

Una vez elegido el espacio V_h y la base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, utilizando las propiedades de linealidad de a y l podemos escribir la condición(105) como:

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\varphi_j, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (107)$$

condición que será suficiente imponer sobre los elementos de una base, esto es:

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = l(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (108)$$

lo que reduce el cálculo de los coeficientes a resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$K \bar{u} = \bar{b} \quad (109)$$

siendo $\bar{u} = (u_1, \dots, u_N)$ el vector solución y

$$\begin{aligned} (K)_{ij} &= a(\varphi_j, \varphi_i) \\ \bar{b}_i &= l(\varphi_i) \end{aligned} \quad (110)$$

Ejemplo:

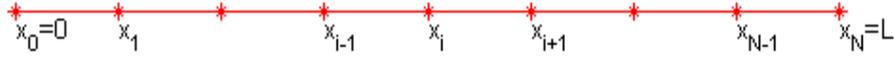
en el problema concreto que estamos utilizando como modelo estos coeficientes vendrían dados por

$$(K)_{ij} = \int_0^L SE(x) \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \quad (111)$$

$$\bar{b}_i = \int_0^L f\varphi_i dx + F\varphi_i(L) \quad (112)$$

Esquema sencillo de elementos finitos: elementos P_1

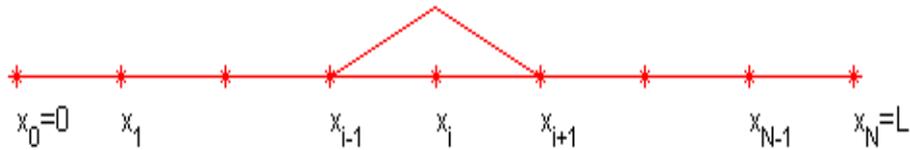
Se considera la discretización del dominio, que en este caso consiste en dividir el intervalo en subintervalos con extremos $\{x_i\}_{i=1}^N$



Se considera el espacio discreto

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}([0, L]) / v_h(0) = 0, v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} \quad (113)$$

es decir funciones continuas en todo el intervalo que son polinomios de grado menor o igual que 1 en cada subintervalo y verifican la condición de contorno en 0. La dimensión del espacio de aproximación V_h depende del número de elementos N y una base de este espacio viene dada por las funciones siguientes:



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

cuya derivada viene dada por

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Esta elección de la base, con soporte pequeño, da lugar a que muchos elementos de la matriz K , teniendo en cuenta (111), sean nulos. En concreto $K_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i-1, i, i+1$.

Se verifica además que, con esta elección de la base, los coeficientes u_j vienen dados por

$$u_h(x_k) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x_k) = u_k \quad (114)$$

es decir, que los coeficientes de la solución coinciden con los valores de la solución aproximada en los nodos.

Ejemplo

En el caso del problema monodimensional que estamos tratando, si suponemos $SE(x) = SE$ y $f(x) = c$ (sección y carga constantes), obtenemos:

$$K_{ij} = SE \int_0^L \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \begin{cases} SE \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx & j = i - 1 \\ SE \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i \varphi'_i dx + SE \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_{i+1} dx & j = i \\ SE \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i \varphi'_{i+1} dx & j = i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (115)$$

$$\bar{b}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i \quad (116)$$

de donde se obtienen los coeficientes del sistema lineal

$$K_{ij} = \begin{cases} -\frac{SE}{h} & j = i - 1, i + 1 \\ 2\frac{SE}{h} & j = i \\ 0 & j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= ch & i = 1, \dots, N - 1 \\ \bar{b}_n &= ch + F \end{aligned} \quad (118)$$

En el caso general en el que la sección y la distribución de carga no sean constantes, las integrales a calcular no son inmediatas y en la mayoría de los casos hay que usar integración numérica. Como ejemplo mencionamos aquí que, usando como fórmula de cuadratura la del rectángulo con nodo el punto medio del intervalo (Poncelet) recuperaríamos el esquema al que daba lugar el método de diferencias finitas visto en la sección 2.2.

Por último se debe resolver el sistema lineal $K\bar{u} = \bar{b}$.

La matriz del sistema es conocida como matriz de rigidez y el segundo miembro se llama vector de carga. De este modo, el sistema lineal a resolver se interpreta como una ecuación de equilibrio entre los desplazamientos de la barra en los nodos de la discretización y las cargas, distribuidas y puntuales, a las que está sometida la barra.

Problema monodimensional genérico:

Para finalizar esta sección incluimos un comentario para el caso de un problema monodimensional con condiciones de contorno genéricas y un término adicional. En concreto consideramos el problema de hallar u tal que

$$-\frac{d}{dx}(SE(x)\frac{du}{dx}) + a_0(x)u(x) = f(x) \quad x \in (a, b) \quad (119)$$

$$u(a) = 0 \quad (120)$$

$$SE(b)\frac{du}{dx}(b) + \beta u(b) = F_b \quad (121)$$

siendo $SE(x)$, $a_0(x)$, $f(x)$ funciones y β , F_b constantes, que son los datos conocidos del sistema. La formulación débil se plantea como: encontrar $u \in V_{ad}$ tal que

$$\int_a^b SE(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \int_a^b a_0(x)u(x)v(x)dx + \beta u(b)v(b) = \int_a^b f(x)v(x)dx + F_b v(b) \quad \forall v \in V_{ad} \quad (122)$$

de forma que la forma bilineal a presenta dos nuevos sumandos con respecto a (103).

Si se utilizan las mismas ideas de aproximación observamos que ahora la matriz del sistema la podemos escribir como:

$$K = K^1 + K^2$$

donde K^1 es la matriz que hemos calculado antes y K^2 es una nueva matriz que contiene los otros términos. Estas matrices vienen dadas por:

$$K_{ij}^1 = \int_a^b SE(x)\frac{d\varphi_j}{dx}\frac{d\varphi_i}{dx}dx \quad (123)$$

$$K_{ij}^2 = \int_a^b a_0(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx + \beta\varphi_j(b)\varphi_i(b) \quad (124)$$

Concluimos que en el caso general tenemos una matriz, K^2 , donde intervienen productos de las funciones de base y, en algunos casos, términos frontera y otra, K^1 , en la que intervienen productos de sus derivadas.

En la práctica el cálculo de las matrices y del segundo miembro del sistema, a partir de la discretización del dominio y de las bases de elementos finitos, se lleva a cabo siguiendo una metodología estándar válida en dimensión superior. Esta metodología se basa en la construcción de las matrices elementales y su posterior ensamblado para obtener la matriz del sistema. Describimos a continuación este proceso para el problema monodimensional de cargas sobre una columna, que estamos usando.

2.5 Implementación efectiva del método de elementos finitos

Reescribimos la formulación débil del problema (107) teniendo en cuenta que basta imponer la igualdad para los elementos de una base de V_h , en concreto si consideramos las funciones base φ_i $i = 1, \dots, N$ tenemos:

$$\sum_{j=1}^N u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = l(\varphi_i) \quad (125)$$

siendo u_j las incógnitas de nuestro problema pues son los coeficientes de la solución discreta en función de la base (ver 106). Usando las expresiones de a y l dadas en (103 -104) tenemos:

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_0^L SE \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \right) u_j = \int_0^L f \varphi_i dx + F \varphi_i(L) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (126)$$

es decir

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} u_j = b_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (127)$$

sistema de N ecuaciones lineales con datos

$$K_{ij} = \int_0^L SE \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \quad (128)$$

$$b_i = \int_0^L f \varphi_i dx + F \varphi_i(L) \quad (129)$$

que, utilizando la descomposición del dominio siguiente

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \dots < x_{N-1} < x_N = b$ se reescribe

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} SE \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \right) \quad (130)$$

$$b_i = \sum_{k=1}^N \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f \varphi_i dx \right) + F \varphi_i(L) \quad (131)$$

y usando las expresiones de las funciones de base en el caso de elementos finitos P_1 , o cualquiera que tenga el mismo soporte, observamos que

$$K_{ij} = \begin{cases} \int_{x_{i-1}}^{x_i} SE \varphi_i' \varphi_{i-1}' dx & j = i - 1 \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} SE \varphi_i' \varphi_i' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} SE \varphi_i' \varphi_i' dx & j = i \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} SE \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx & j = i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (132)$$

$$\bar{b}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx + F \varphi_i(L) \quad (133)$$

Tenemos pues que los coeficientes K_{ij} se anulan para $j \neq i - 1, i, i + 1$ de modo que las ecuaciones $i, i + 1$ del sistema vienen dadas por

$$\begin{aligned} K_{i \ i-1} u_{i-1} + K_{i \ i} u_i + K_{i \ i+1} u_{i+1} &= b_i \\ K_{i+1 \ i} u_i + K_{i+1 \ i+1} u_{i+1} + K_{i+1 \ i+2} u_{i+2} &= b_{i+1} \end{aligned}$$

Las integrales que hay que calcular en cada elemento $[x_i, x_{i+1}]$ son

$$\bar{K}_{ii} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} SE \varphi'_i \varphi'_i dx \quad (134)$$

$$\tilde{K}_{i+1 \ i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} SE \varphi'_{i+1} \varphi'_{i+1} dx \quad (135)$$

$$K_{i \ i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} SE \varphi'_i \varphi'_{i+1} dx \quad (136)$$

$$K_{i+1 \ i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} SE \varphi'_i \varphi'_{i+1} dx \quad (137)$$

$$\tilde{b}_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx \quad (138)$$

$$\bar{b}_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \varphi_{i+1} dx \quad (139)$$

verificándose que

$$K_{ii} = \bar{K}_{ii} + \tilde{K}_{ii}$$

Se construyen las matrices elementales para el elemento $[x_i, x_{i+1}]$ como

$$K^i = \begin{pmatrix} \bar{K}_{ii} & K_{ii+1} \\ K_{i+1i} & \tilde{K}_{i+1i+1} \end{pmatrix}$$

y el vector de segundo miembro elemental para el mismo elemento

$$b^i = \begin{pmatrix} \bar{b}_i \\ \tilde{b}_{i+1} \end{pmatrix}$$

Y el ensamblado de estas matrices y vectores da lugar a la matriz del método y al segundo miembro global

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \bar{K}_{ii} & K_{ii+1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & K_{i+1i} & \tilde{K}_{i+1i+1} + \bar{K}_{i+1i+1} & K_{i+1i+2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{i+2i+1} & \tilde{K}_{i+2i+2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots + \bar{b}_i \\ \tilde{b}_{i+1} + \bar{b}_{i+1} \\ \tilde{b}_{i+2} + \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

De donde se puede dar la idea de la metodología general para implementar el método, que viene dada por:

1. Bucle en elementos de la malla calculando
 - la matriz elemental $[K^i]$ 2×2 y del segundo miembro elemental $[b^i]$ 2×1 .
 - Incorporación de las contribuciones de cada elemento a la matriz general de rigidez K y al segundo miembro global b .
2. Finalizado el bucle, imposición (bloqueo) de las condiciones de contorno.
3. El proceso termina con la resolución del sistema lineal.

En los cálculos anteriores nos hemos olvidado, a propósito, de la condición en el punto $x_0 = 0$ pues, por ser de tipo Dirichlet, el valor de la solución en ese punto no es una incógnita sino conocida. Sin embargo en la práctica los puntos con condiciones Dirichlet se tratan de modo análogo al resto por dos razones fundamentales: para tener códigos generales y porque en dimensión superior no está claro a priori, y dependerá de la ordenación de los nodos, a qué ecuación corresponden estos puntos. La eliminación de esas ecuaciones obligaría a reordenar la matriz y el segundo miembro y, en consecuencia, la reorganización de índices que en general es un proceso costoso. Por ello existe un procedimiento más sencillo que modifica el sistema final bloqueando estas condiciones, esto es, multiplicando por un número muy grande el coeficiente de la diagonal de esa ecuación y el segundo miembro. De este modo, teniendo en cuenta los ordenes de magnitud, se fuerza a que el valor de la solución en ese punto sea uno o cualquier otro multiplicando también el segundo miembro por el valor impuesto. Este método tiene el inconveniente de que empeora el condicionamiento de la matriz y podría ser necesario el uso de preconditionadores.

Una alternativa al bloqueo consiste en no ensamblar durante el bucle en elementos de la malla aquellas ecuaciones correspondientes a nodos de frontera con condición de contorno Dirichlet.

2.6 Análisis del error del método de elementos finitos

Comentamos aquí algunos resultados que dan lugar a estimaciones de error para el método de elementos finitos. Recordamos la formulación del problema continuo dada por (102) y la correspondiente formulación de la solución discreta dada en (105). Esta formulación se escribe en un marco abstracto que permite obtener propiedades de existencia y unicidad de solución así como estimaciones de error. Puesto que la notación abstracta general es la misma enunciaremos aquí algunos resultados que serán utilizados también en los capítulos

siguientes.

Teorema (conocido como lema de Lax-Milgram):

1. Sea V un espacio de Hilbert sobre R , dado por un producto interior que denotamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$, cuya norma inducida denotamos por $\| \cdot \|$.
2. Sea $a : V \times V \rightarrow R$ una forma bilineal continua, esto es, lineal en las dos variables y tal que $\exists M > 0 /$

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V \quad (140)$$

3. Sea $l : V \rightarrow R$ una forma lineal continua, esto es, que $\exists M' > 0 /$

$$|l(v)| \leq M' \|v\| \quad \forall v \in V \quad (141)$$

4. La forma bilineal a es coerciva (V-elíptica) que significa que $\exists c > 0 /$

$$|a(v, v)| \geq c \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (142)$$

Entonces, existe un única función $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (143)$$

además se verifica que

$$\|u\| \leq \frac{M'}{c} \quad (144)$$

Observación

En nuestro problema monodimensional se puede considerar, en el espacio V_{ad} , la norma que viene dada por la energía, es decir

$$\|v\| = \left(\int_0^L SE(x) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2} = (a(v, v))^{1/2} \quad (145)$$

de modo que se podría comprobar que con las definiciones dadas en (103-104) se cumplen todas las hipótesis del teorema de Lax-Milgram y tendríamos garantizada la existencia y unicidad de solución.

El resultado básico a la hora de obtener estimaciones de error es el Lema de Cea que enunciamos a continuación. Supongamos que utilizamos la misma notación que antes y

consideramos u_h aproximación obtenida con el método de elementos finitos, esto es, $u_h \in V_h$ verificando (105). En las condiciones del teorema de Lax-Milgram se verifica también que existe solución única del problema discreto.

Lema de Cea: con las notaciones y en las condiciones anteriores se verifica que

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{c} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (146)$$

Observaciones

1. Lax-Milgram nos garantiza en nuestro caso la existencia de solución del problema continuo y del discreto.
2. Del Lema de Cea concluimos que u_h es del orden de la mejor aproximación en el espacio aproximado, entendiendo la mejor aproximación en el sentido de que, con la norma elegida, es el elemento de V_h que menos dista de la solución exacta u .
3. A partir de los problemas que verifican u , u_h y del hecho de que $V_h \in V$ es obvio que se verifica que

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (147)$$

es decir que la función $u - u_h$ es ortogonal, con el producto interior que estamos considerando, al espacio V_h y por tanto la función u_h puede ser interpretada como la proyección ortogonal de u en el espacio V_h .

4. A la hora de obtener estimaciones de error (a priori) es habitual, en los casos posibles, utilizar una función concreta y conocida para v_h ; en concreto se utiliza la función interpolante de la solución exacta, esto es, el elemento de V_h que coincide con u en los nodos x_i , que denotaremos $\Pi_h(u)$. Buscaremos entonces espacios V_h en los que el error de la función interpolante sea pequeño, pues usaremos para acotar el error

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{c} \|u - \Pi_h(u)\|$$

5. Por último mencionar que las técnicas para obtener un error más pequeño son disminuir el paso, lo que da lugar a lo que se conoce como h-convergencia, aumentar el grado k de los polinomios, lo que se conoce como p-convergencia y requiere una mayor regularidad de la solución, o combinación de ambas.

En el ejemplo monodimensional que estamos considerando, con elementos finitos P_1 podemos concretar una estimación de error como sigue:

Proposición:

Si la solución u del problema continuo (102) es de clase $\mathcal{C}^2(a, b)$ entonces

$$\|u - u_h\| \leq Ch \quad (148)$$

siendo $h = \max\{|x_i - x_{i-1}| \ \forall i = 1, \dots, N\}$ y

$$C = \sqrt{L \max_{[0,L]} SE(x)} \max_{[0,L]} |u''(x)|$$

A partir de esta estimación observamos que el término en h puede ser controlado variándolo mientras que aparece un término que depende directamente de la regularidad de la solución, en este caso la derivada segunda de u . Asimismo quedaría garantizado que $\|u - u_h\| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ y la velocidad de convergencia es lineal, esto es orden h^1 . Además, si $u''(x) = 0$ la solución sería un polinomio de grado menor o igual que uno en todo el intervalo. Con elementos P_1 la recuperamos exactamente pues $\|u - u_h\| = 0$.

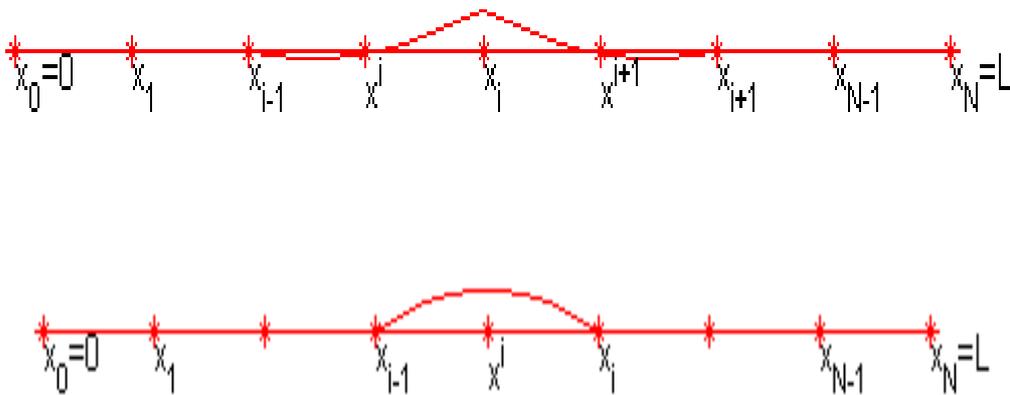
Por último señalar que si la solución exacta es poco regular y no se garantiza la existencia de la derivada segunda el análisis de convergencia puede llevarse a cabo en un marco funcional menos exigente.

Otros espacios de elementos finitos 1D

Tal como hemos indicado anteriormente, una técnica para mejorar la aproximación consiste en la elección de elementos con polinomios de grado mayor. Los elementos utilizados se obtienen con $k = 1$ de la definición genérica de elementos finitos P_k dados en el espacio

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}([a, b]) / v_h(a) = 0, v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_k \ \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}$$

polinomios a trozos de grado menor o igual a k . Por ejemplo para $k = 2$, caracterizar unívocamente un polinomio de grado menor o igual a 2 necesita 3 puntos. Se considera entonces, además de los extremos del intervalo x_{i-1}, x_i , los puntos medios $x^i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Se mejora la aproximación pero se complican los cálculos. En concreto los elementos de la base son distintos para los puntos de los extremos y para los puntos medios.



Estos espacios de elementos finitos, conocidos como de Lagrange P_k , tienen el inconveniente de que las derivadas de las funciones de la base son discontinuas y, en consecuencia, la derivada de la solución aproximada también es discontinua. Si en el problema a resolver

quisieramos obtener una mayor regularidad en la aproximación deberíamos utilizar otro tipo de elementos, de tipo Hermite, que plantean como grados de libertad los valores de la solución y de su derivada en los nodos.

2.7 Bibliografía

1. Reddy, J.N. *An introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, 1993.
2. Johnson, C. *Numerical solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
3. Szabo, B.-Babuska, I. *Finite Element Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1991.
4. Zienkiewicz, O.C.- Taylor, R.L. *The finite element method*. 5th ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

3. Introducción al método de elementos finitos para un problema estacionario de transmisión de calor

Este capítulo se dedica a la formulación matemática de problemas de tipo estacionario en el campo de la transmisión de calor, en concreto para dimensiones superiores $n = 2, 3$.

3.1 Formulación de un problema modelo en dimensión superior

Comenzaremos planteando el problema estacionario de transmisión de calor correspondiente a un dominio sencillo.

Formulación fuerte

Sea $\Omega \subset R^n$, $n = 2$ ó 3 , un abierto poliédrico de frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. El problema consiste en encontrar una función escalar $u(x)$ (representando la temperatura en cada punto del dominio $x = (x_1, \dots, x_n)$) que verifique la ecuación en derivadas parciales:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) = f \quad \text{en } \Omega \quad (149)$$

con condiciones de contorno:

$$\text{(Dirichlet)} \quad u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (150)$$

$$\text{(Robin)} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_a} + \beta u = g \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (151)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_a} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i$ (siendo $\vec{n} = (n_1, \dots, n_n)$ el vector normal unitario exterior a Γ_2),

donde a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, son funciones acotadas de Ω en R , y donde β , g son funciones definidas sobre Γ_2 .

Por simplicidad hemos supuesto la condición Dirichlet homogénea pero, como ya es conocido, esta hipótesis no implica pérdida de generalidad (con unas variaciones mínimas pueden tratarse las condiciones Dirichlet generales $u = q$ sobre Γ_1).

Un ejemplo que entra dentro de esta formulación es (ver capítulo 1) el problema estacionario de transmisión de calor en un cuerpo isótropo. En este caso u representa la temperatura T del cuerpo Ω en consideración. Utilizando esta última notación el problema se escribiría como:

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) = Q & \text{en } \Omega, \\ T = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} + \beta T = g & \text{sobre } \Gamma_2 \end{cases} \quad (152)$$

donde $k = k(x)$ es la conductividad térmica del medio y Q es una fuente de calor interno.

Formulación débil (o variacional)

A partir del espacio conocido de las funciones de cuadrado integrable:

$$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow R \mid \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx < +\infty\} \quad (153)$$

se definen los siguientes espacios funcionales (de Sobolev):

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega), \quad (154)$$

$$H^k(\Omega) = \{v \in H^{k-1}(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{k-1}(\Omega), 1 \leq i \leq n\} \quad (\text{para } k = 1, 2 \dots), \quad (155)$$

donde la norma asociada se denotará por $\|v\|_{k,\Omega}$ y la seminorma correspondiente por $|v|_{k,\Omega}$.

Se considera entonces el espacio funcional:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\} \quad (156)$$

Multiplicando la ecuación (149) por funciones test $v \in V$ e integrando sobre Ω se tiene:

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V. \quad (157)$$

Utilizando la fórmula de integración de Green se obtiene:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_a} v d\gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V. \quad (158)$$

Reemplazando ahora la derivada normal por su valor (condición de contorno Robin (151)) resulta:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_2} \beta uv d\gamma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\gamma, \quad \forall v \in V. \quad (159)$$

Si definimos para todo $u, v \in V$ la forma bilineal $a(u, v)$ y la aplicación lineal $l(v)$ en la siguiente forma:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_2} \beta uv d\gamma \quad (160)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\gamma \quad (161)$$

el problema (159) puede escribirse de manera abstracta como:

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \quad (162)$$

Finalmente debe notarse que, si los coeficientes a_{ij} son simétricos, esto es, si $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \dots, n$, entonces la solución del problema (162) puede caracterizarse como el único elemento de V que hace mínimo el valor del funcional de energía:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) \quad (163)$$

Método de Galerkin

Para resolver nuestro problema a partir de su formulación variacional (162) utilizaremos un método de Galerkin. En este tipo de métodos, la idea fundamental consiste en reemplazar el espacio de funciones V (de dimensión infinita) por un subespacio de dimensión finita V_h , donde h es un pequeño parámetro destinado a tender a cero, y aproximar la solución u por un elemento $u_h \in V_h$ solución del problema discretizado siguiente:

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (164)$$

Dado que V_h es un espacio de dimensión finita N_h y $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$ es una base de dicho espacio, el elemento $u_h \in V_h$ se puede escribir en función de la base en la forma:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i \quad (165)$$

donde $(u_1, u_2, \dots, u_{N_h})$ son las coordenadas de u con respecto a la base \mathcal{B} y, por tanto, determinan de manera única al elemento $u_h \in V_h$. Así, el problema (164) es equivalente a encontrar los números $\{u_i\}_{i=1}^{N_h}$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{N_h} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = l(\varphi_j), \quad \forall j = 1, \dots, N_h. \quad (166)$$

Si definimos la matriz $K_h = (k_{ml}^h)$ y el vector $b_h = (b_l^h)$ cuyas componentes vienen dadas, respectivamente, por:

$$k_{ml}^h = a(\varphi_l, \varphi_m) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_2} \beta \varphi_l \varphi_m d\gamma, \quad l, m = 1, \dots, N_h, \quad (167)$$

$$b_l^h = l(\varphi_l) = \int_{\Omega} f \varphi_l dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi_l d\gamma, \quad l = 1, \dots, N_h, \quad (168)$$

el problema (166) consiste en encontrar el vector solución, que seguimos denotando de la

misma forma, $u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_h} \end{pmatrix}$ del sistema de ecuaciones lineales:

$$K_h u_h = b_h. \quad (169)$$

3.2 Formulación del método de elementos finitos

El método de elementos finitos es, fundamentalmente, un proceso para construir espacios V_h en los cuales la determinación de las funciones de base sea sencilla, incluso en el caso de dominios Ω con formas no simples. Lo que hace este método especialmente atractivo desde el punto de vista numérico es que las funciones de base puedan tomarse polinomiales a trozos y que sean nulas en todo el dominio Ω salvo en una pequeña parte. La construcción de estos espacios está caracterizada por los siguientes aspectos:

- Se establece una *triangulación* τ_h sobre $\bar{\Omega}$, esto es, se subdivide $\bar{\Omega}$ en un número finito N_e de subconjuntos poliédricos (o elementos finitos) T que satisfacen las propiedades:
 - T es cerrado y $\overset{\circ}{T}$ es no vacío y conexo, $\forall T \in \tau_h$.
 - La frontera ∂T es lipschitziana, $\forall T \in \tau_h$.

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau_h} T$.
 - Si $T_1 \neq T_2 \in \tau_h$, entonces $T_1^\circ \cap T_2^\circ = \emptyset$.
 - Cada parte en la frontera de un elemento T debe ser, o bien una parte de la frontera $\partial\Omega$, o bien una parte de la frontera de otro elemento.
- A continuación se identifican ciertos puntos (llamados *nodos*) en el dominio subdividido. Estos puntos jugarán un papel fundamental en el método de elementos finitos. Entre los nodos se incluyen, en general, todos los vértices de los elementos, pero a fin de mejorar la aproximación se pueden incluir también otros puntos (por ejemplo, los puntos medios de las aristas). El conjunto total de nodos se denominará $\Sigma_h = \{b_i\}_{i=1}^{N_h}$. El par formado por los elementos y los nodos se denomina malla de elementos finitos.
 - Se procede finalmente a la construcción de las *funciones de base* $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$. Para ello debemos tener en cuenta que el espacio finito-dimensional V_h debe ser un subespacio de V (en nuestro caso deben ser funciones de $H^1(\Omega)$) y, además, debe verificar las condiciones de contorno esenciales (en nuestro caso, la condición Dirichlet homogénea (150)). Las funciones de base deben verificar las siguientes propiedades:
 - Las funciones de base φ_i son continuas y acotadas.
 - Hay un total de N_h funciones de base, esto es, una por cada nodo, y cada función de base φ_i es no nula únicamente en aquellos elementos que contienen al nodo b_i .
 - $\varphi_i(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
 - La restricción φ_i^e de φ_i a cada elemento $T_e \in \tau_h$ es un polinomio.

A estos polinomios φ_i^e , que trivialmente verifican $\varphi_i^e(b_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$, se les llama funciones de base locales. En consecuencia, cada función de base será polinómica a trozos y sólo tomará valores no nulos en una pequeña región de Ω . Es claro que se pueden construir las funciones de base globales φ_i a partir de la base local, simplemente pegando juntas todas las funciones locales correspondientes al nodo i -ésimo.

Teniendo en cuenta estas propiedades, debemos observar que si escribimos una función cualquiera v_h como:

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i \quad (170)$$

entonces se tiene:

$$v_h(b_j) = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i(b_j) = v_j \quad (171)$$

esto es, las coordenadas de v_h con respecto a la base son los valores de v_h en los nodos correspondientes.

- Se denota por X_h el espacio generado por los elementos de base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h}\}$. A fin de que las condiciones de contorno esenciales sean contempladas, basta tomar como V_h el espacio:

$$\begin{aligned} V_h &= \{v_h \in X_h \mid v_h \text{ verifica las c. c. esenciales} \} \\ &= \langle \{\varphi_i \mid \varphi_i \text{ verifica las c. c. esenciales} \} \rangle \end{aligned} \quad (172)$$

En nuestro caso, debido al carácter poliédrico del dominio Ω , el espacio V_h estará contenido en el espacio inicial V : es lo que se denomina un método de elementos finitos *conformes*. En otras ocasiones (por ejemplo, cuando el dominio es curvo) el espacio V_h puede no estar contenido en V . Esto da origen a lo que se denominan elementos finitos *no conformes*. En este capítulo, sin embargo, nos restringiremos a los elementos finitos conformes. Para ello, vamos a describir varios elementos finitos poliédricos en R^n , $n = 2, 3$, que reciben el nombre de *elementos finitos rectos*.

En este capítulo trataremos solamente de los llamados *elementos finitos de Lagrange*, que son aquellos donde únicamente aparecen los valores de las funciones en los nodos. Frente a estos elementos existen también (y serán estudiados en próximos capítulos) los llamados *elementos finitos de Hermite*, donde se utilizarán, además de los valores de las funciones en los nodos, los valores de algunas de sus derivadas.

3.3 Elementos finitos de Lagrange

Sea $T \subset R^n$ un conjunto compacto, conexo y de interior no vacío. Sea $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$ un conjunto de N puntos distintos de T . Sea P un espacio vectorial de dimensión finita compuesto por funciones de T en R . Se dice que Σ es *P-unisolvente* si y sólo si, dados $\alpha_j \in R$, $j = 1, \dots, N$, existe una única función $p \in P$ tal que $p(a_j) = \alpha_j$, $\forall j = 1, \dots, N$. Si Σ es *P-unisolvente*, a la terna (T, P, Σ) se le llama elemento finito de Lagrange.

En consecuencia, dado un elemento finito de Lagrange (T, P, Σ) , existe para cada $i = 1, \dots, N$, una única función p_i tal que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$, $\forall j = 1, \dots, N$. A este conjunto de funciones se le denomina funciones de base.

Por otra parte, si v es una función definida de T en R , existe una única función $p \in P$ tal que $p(a_j) = v(a_j)$, $\forall j = 1, \dots, N$. Esta función puede escribirse como $p = \sum_{i=1}^N v(a_i)p_i$.

El operador Π_T que lleva v en p se denomina *operador de P-interpolación*, y al elemento

$$p = \Pi_T(v) = \sum_{i=1}^N v(a_i)p_i \quad (173)$$

se le llama *P-interpolante de Lagrange* de v sobre Σ .

Ya estamos en condiciones de definir distintos tipos de elementos finitos de Lagrange para resolver nuestro problema. Estudiaremos esencialmente los *elementos finitos simpliciales* y los *rectangulares*, aunque se pueden construir de manera similar otros tipos de elementos finitos (por ejemplo, los *prismáticos*):

Elementos finitos simpliciales

Para cada entero $k \geq 0$ vamos a denotar por P_k el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a k con coeficientes reales en las variables x_1, \dots, x_n . El espacio vectorial P_k tiene dimensión $\binom{n+k}{k}$. Entonces, si $p \in P_k$, existen unos coeficientes reales $\gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ tales que:

$$p : x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \rightarrow p(x) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k} \gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in R \quad (174)$$

Dado un subconjunto $S \subset R^n$, se define el espacio $P_k(S)$ como el espacio formado por las restricciones a S de los elementos de P_k , esto es, son polinomios de grado menor o igual a k pero definidos sólo en el conjunto S .

Sean $n + 1$ puntos $a_j = (a_j^i)_{i=1}^n \in R^n$, $j = 1, \dots, n + 1$, tales que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n+1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n+1}^n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (175)$$

es inversible (esto equivale a decir en $n = 2$ que los puntos no son colineales, y en $n = 3$ que los puntos no son coplanarios). Se define un *n-simplex* T en R^n como la envolvente convexa de los $n + 1$ puntos, que se denominarán vértices. Así,

$$T = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_j \mid \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1, 0 \leq \lambda_j \leq 1, \forall j = 1, \dots, n + 1 \right\} \quad (176)$$

En nuestro caso particular, un simplex en R^2 se corresponde con un triángulo y un simplex en R^3 con un tetraedro.

Dado un punto cualquiera x perteneciente a un n -simplex, las *coordenadas baricéntricas* $\lambda_j = \lambda_j(x)$ (también llamadas coordenadas de área en R^2 o coordenadas de volumen en R^3) de x con respecto a los vértices a_j son las únicas soluciones del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \lambda_j = x_i, & i = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (177)$$

En consecuencia, y dado que la matriz A es inversible, las coordenadas baricéntricas son funciones afines de las coordenadas de x :

$$\lambda_i(x) = \sum_{j=1}^{n+1} d_{ij} x_j + d_{i,n+1}, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad (178)$$

donde la matriz $D = (d_{ij})$ es la inversa de A .

El *baricentro* o centro de gravedad de un n -simplex T es aquel punto cuyas coordenadas baricéntricas son todas iguales a $\frac{1}{n+1}$.

Si T es un n -simplex y k es un entero positivo, el subconjunto de puntos de T

$$\Sigma_k = \{x \in T \mid \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}, \forall j = 1, \dots, n+1\} \quad (179)$$

se llama *retículo de orden k* de T , y su número de elementos coincide con la dimensión de $P_k(T)$. De esta forma, puede demostrarse que Σ_k es $P_k(T)$ -unisolvante y, en consecuencia, a cada punto a_μ de Σ_k dado por la expresión:

$$a_\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j a_j, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = k, \quad (180)$$

se le asocia una función de base p_μ definida por:

$$p_\mu(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\mu_j!} \prod_{i=0}^{\mu_j-1} (k\lambda_j(x) - i) \quad (181)$$

que cumple que $p_\mu(a_\mu) = 1$ y que $p_\mu(a_\nu) = 0$ para todo $a_\nu \in \Sigma_k$ tal que $a_\nu \neq a_\mu$.

Esto nos permite definir los elementos finitos simpliciales de grado k . Los elementos más comunes en la práctica son los de grado bajo $k = 1, 2$ ó 3 .

Ejemplos más usuales

- El n -simplex lineal ($k = 1$):

Para un simplex T , se consideran $P_T = P_1(T)$, espacio de dimensión $n + 1$, y $\Sigma_T = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. (En el caso $n = 2$ se denomina *triángulo de Courant*. Para $n = 3$ se llama tetraedro lineal). En estas condiciones, y con las definiciones usuales, cualquier polinomio $p \in P_1(T)$ puede escribirse de la forma:

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} p(a_i) \lambda_i \quad (182)$$

donde los $n + 1$ coeficientes $p(a_i)$ se denominan grados de libertad y las funciones de base son las $n + 1$ coordenadas baricéntricas $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\}$.

- El n -simplex cuadrático ($k = 2$):

Si llamamos $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$, $i \neq j = 1, \dots, n + 1$, a los puntos medios de las aristas de n -simplex T , se tiene que cualquier polinomio $p \in P_2(T)$ puede escribirse como:

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} p(a_i) \lambda_i (2\lambda_i - 1) + \sum_{i < j} 4p(a_{ij}) \lambda_i \lambda_j \quad (183)$$

para ello basta tener en cuenta que $\lambda_k(a_{ij}) = \frac{1}{2}(\delta_{ki} + \delta_{kj})$. Esta identidad permite definir el n -simplex cuadrático, en el que se toman $P_T = P_2(T)$ y $\Sigma_T = \{a_i \mid 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{a_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n + 1\}$. La dimensión de P_T es $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$. (En el caso $n = 2$ la dimensión es 6, y en el caso $n = 3$ la dimensión es 10).

En estos elementos finitos, los grados de libertad son los coeficientes $p(a_i)$, $p(a_{ij})$ y las funciones de base son $\{\lambda_i(2\lambda_i - 1) \mid 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{4\lambda_i \lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq n + 1\}$.

- El n -simplex cúbico ($k = 3$):

Si definimos $a_{iij} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j)$, $i \neq j$, $a_{ijk} = \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k)$, $i < j < k$, se tiene que cualquier polinomio $p \in P_3(T)$ puede escribirse como:

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} p(a_i) \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) + \sum_{i \neq j} p(a_{iij}) \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) \quad (184)$$

$$+ \sum_{i < j < k} 27p(a_{ijk}) \lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

lo que permite definir el n -simplex cúbico. La dimensión de P_T viene dada por $\frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$. (En el caso $n = 2$ la dimensión es 10, y en el caso $n = 3$ la dimensión es 20).

- El n -simplex cúbico reducido:

Puede probarse que los grados de libertad relativos a los nodos a_{ijk} pueden ser eliminados en el n -simplex cúbico. Esta eliminación lleva a un nuevo elemento finito cuyo espacio de polinomios es $P_T = P'_3(T)$ determinado por los nodos a_i , $1 \leq i \leq n+1$ y los puntos a_{ij} , $1 \leq i \neq j \leq n+1$. En este caso, cualquier polinomio $p \in P'_3(T)$ puede escribirse como:

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} p(a_i) \left\{ \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) - \frac{27}{6} \sum_{j,k < i} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \right\} \quad (185)$$

$$+ \sum_{i \neq j} p(a_{ij}) \left\{ \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) + \frac{27}{4} \sum_{k \neq i,j} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \right\}$$

Este espacio es tal que $P_2(T) \subset P'_3(T) \subset P_3(T)$ y su dimensión en $(n+1)^2$. (En el caso $n=2$ la dimensión es 9, y en el caso $n=3$ la dimensión es 16).

Elementos finitos rectangulares

Para cada entero $k \geq 0$ denotamos por Q_k el espacio de todos los polinomios reales que tienen grado menor o igual a k con respecto a cada una de las variables x_1, \dots, x_n . Esto es, si $p \in Q_k$ entonces es de la forma:

$$p : x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \rightarrow p(x) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=0}^k \gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in R \quad (186)$$

El espacio vectorial Q_k tiene dimensión $(k+1)^n$ y se verifican de manera trivial las inclusiones $P_k \subset Q_k \subset P_{nk}$. De manera análoga al caso anterior, dado un subconjunto $S \subset R^n$ de interior no vacío, se define el espacio $Q_k(S)$ como el espacio formado por las restricciones a S de los elementos de Q_k .

Un polinomio $p \in Q_k$ está únivocamente determinado por los valores que toma en el conjunto de puntos:

$$M_k = \left\{ x = \left(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \dots, \frac{i_n}{k} \right) \in R^n \mid i_j \in \{0, 1, \dots, k\}, \forall j = 1, \dots, n \right\} \quad (187)$$

Sean dos puntos $c = (c_i), d = (d_i) \in R^n$ tales que $c_i < d_i, \forall i = 1, \dots, n$. Se define un n -rectángulo T en R^n como:

$$T = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i] = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid c_i \leq x_i \leq d_i, \forall i = 1, \dots, n \} \quad (188)$$

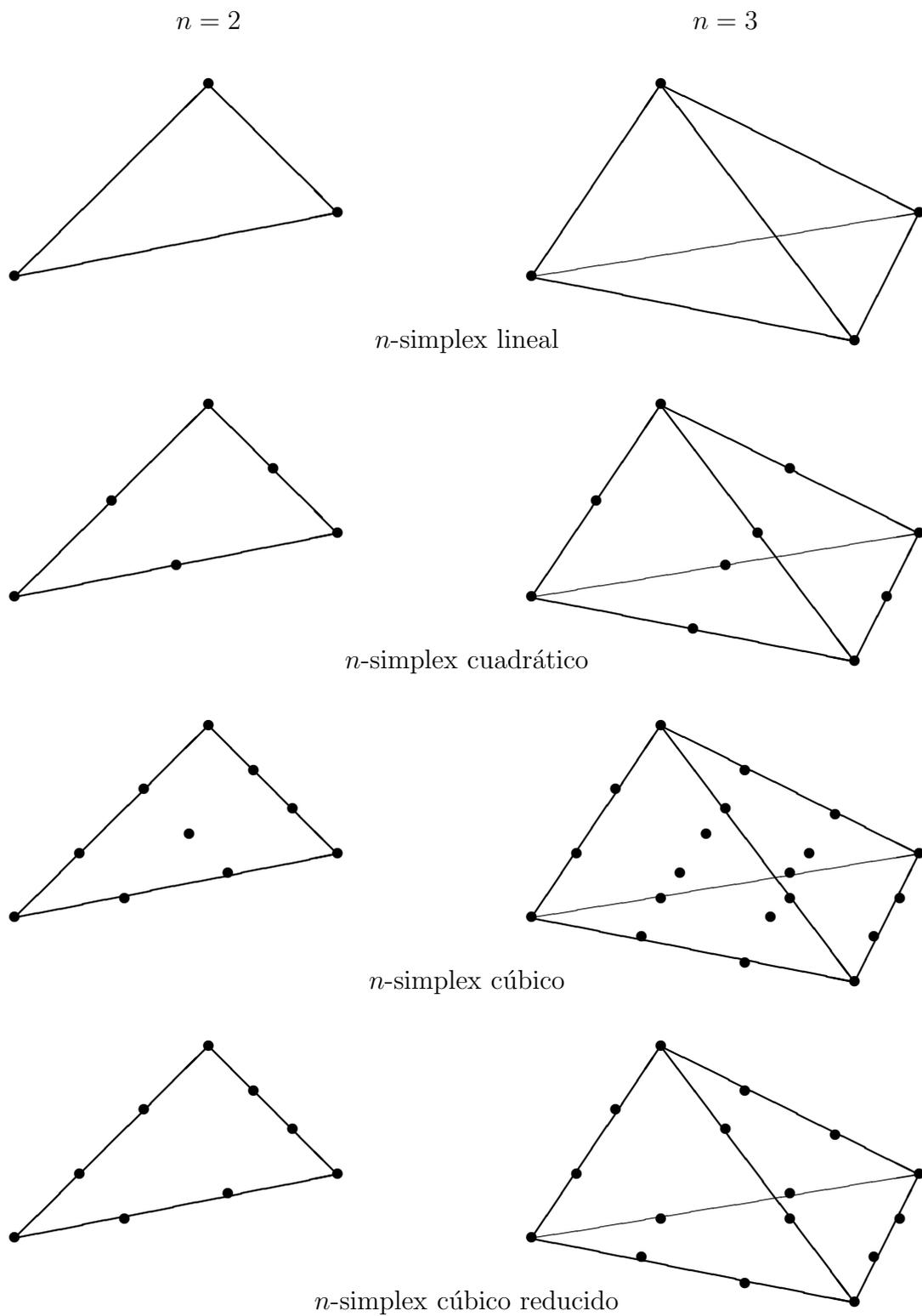


Figura 1: Elementos simpliciales

En particular, un rectángulo en R^2 se corresponde exactamente con nuestra idea intuitiva de rectángulo y un rectángulo en R^3 con un paralelepípedo recto.

Dado un n -rectángulo T , existe una única aplicación afín $F_T(x) = B_T x + b_T$, donde B_T es una matriz diagonal y b_T es un vector de R^n , tal que $T = F_T([0, 1]^n)$. Dado que M_k es un subconjunto de $[0, 1]^n$, es claro que cada polinomio $p \in Q_k(T)$ está unívocamente determinado por los valores que toma en el conjunto $M_k(T) = F_T(M_k)$, esto es, el conjunto $M_k(T)$ es $Q_k(T)$ -unisolvante. Este hecho nos permite definir los elementos finitos rectangulares de grado k . Como en el caso de los elementos simpliciales, los elementos más utilizados son los de grado bajo $k = 1, 2$ ó 3 .

Ejemplos más usuales

- El n -rectángulo bilineal ($k = 1$):

Para un rectángulo T , se consideran $P_T = Q_1(T)$, espacio de dimensión 2^n , y $\Sigma_T = M_1(T) = \{a_i \mid i = 1, \dots, 2^n\}$ (esto es, todos los vértices de rectángulo).

Por ejemplo, en el caso $n = 2$, en que el conjunto Σ_T está constituido por los cuatro vértices del rectángulo, las funciones de base para el rectángulo de referencia $T_{ref} = [0, 1]^2$ vienen dadas por:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (1 - x_1)(1 - x_2), \quad (189)$$

$$\varphi_2(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2), \quad (190)$$

$$\varphi_3(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad (191)$$

$$\varphi_4(x_1, x_2) = (1 - x_1)x_2. \quad (192)$$

En el caso general en que T es un rectángulo cualquiera, las funciones de base se obtienen componiendo las funciones relativas al rectángulo de referencia con la aplicación afín F_T . (En dimensión $n = 3$ el conjunto está formado por los 8 vértices del paralelepípedo.)

- El n -rectángulo bicuadrático ($k = 2$):

Se toman $P_T = Q_2(T)$, espacio de dimensión 3^n , y $\Sigma_T = M_2(T)$. (Por ejemplo, en el caso $n = 2$ el conjunto Σ_T tiene nueve elementos, que son los cuatro vértices, los cuatro puntos medios de cada arista y el centro de gravedad del rectángulo. En el caso $n = 3$ el cardinal del conjunto se eleva a 27).

Las funciones de base se construyen de forma análoga al caso anterior.

- El n -rectángulo bicuadrático reducido (Familia "serendipity"):

Al igual que en el caso de los elementos simpliciales, se puede reducir el número de grados de libertad, eliminando los nodos interiores, y se toma $P_T = Q'_2(T)$, el espacio correspondiente a los nodos restantes. Este espacio verifica que $P_2(T) \subset Q'_2(T)$. (Por

ejemplo, en el caso $n = 2$ el espacio tiene dimensión 8 - pues se ha eliminado el centro de gravedad - y en el caso $n = 3$ tiene dimensión 20).

3.4 Los espacios de elementos finitos

Vamos a dar a continuación una breve descripción de los espacios de elementos finitos generados por los elementos de Lagrange $\{(T, P_T, \Sigma_T)\}_{T \in \tau_h}$.

Si denotamos por $\Sigma_h = \bigcup_{T \in \tau_h} \Sigma_T$ el conjunto de los N_h nodos de la triangulación, se define el espacio de elementos finitos asociado:

$$X_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_{h|T} \in P_T, \forall T \in \tau_h\} \quad (193)$$

Para todos los elementos finitos que hemos estudiado en el apartado anterior (simpliciales, rectangulares y reducidos) se verifica que

$$X_h \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \quad (194)$$

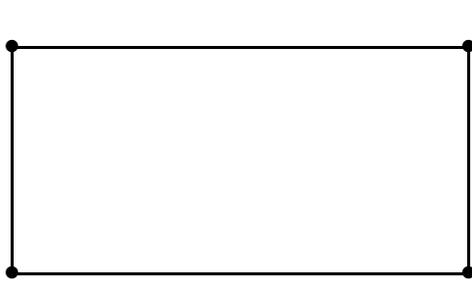
De esta manera, cualquier función de X_h está únicamente determinada por el conjunto de sus valores en todos los nodos de $\Sigma_h = \{b_i \mid i = 1, \dots, N_h\}$.

Recordemos que en apartados anteriores habíamos reducido nuestro problema a encontrar el vector u_h solución del sistema de ecuaciones lineales (169), esto es, $K_h u_h = b_h$, donde la matriz $K_h = (k_{ml}^h)$ y el vector $b_h = (b_l^h)$ se pueden calcular ahora como:

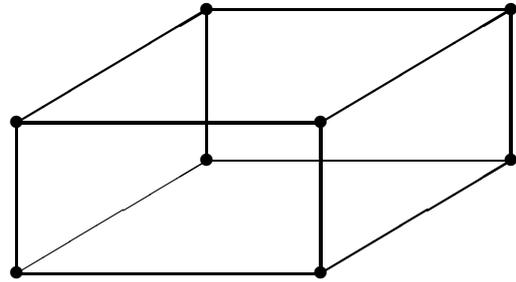
$$\begin{aligned} k_{ml}^h &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_2} \beta \varphi_l \varphi_m d\gamma \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \int_{T_e} a_{ij} \frac{\partial \varphi_l^e}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_m^e}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_2 \cap \partial T_e} \beta \varphi_l^e \varphi_m^e d\gamma \right\} \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} k_{ml}^e \end{aligned} \quad (195)$$

$$\begin{aligned} b_l^h &= \int_{\Omega} f \varphi_l dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi_l d\gamma, \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{T_e} a_{ij} f \varphi_l^e dx + \int_{\Gamma_2 \cap \partial T_e} g \varphi_l^e d\gamma \right\} \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} b_l^e \end{aligned} \quad (196)$$

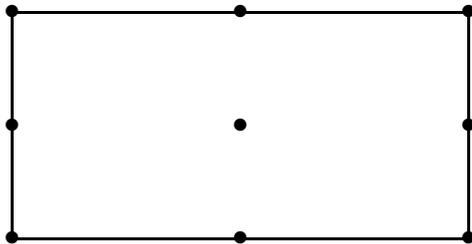
Por lo tanto, el cálculo efectivo de la matriz de rigidez K_h y del vector de carga b_h se reduce a evaluar las *matrices de rigidez elementales* $K_h^{T_e} = (k_{ml}^e)$ y los *vectores de carga elementales*



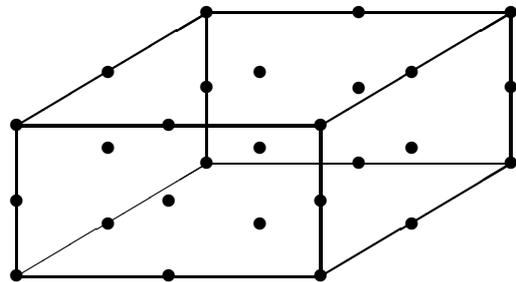
2-rectángulo bilineal



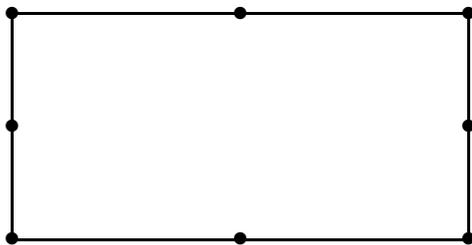
3-rectángulo bilineal



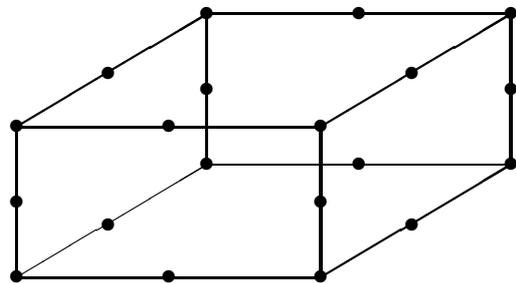
2-rectángulo bicuadrático



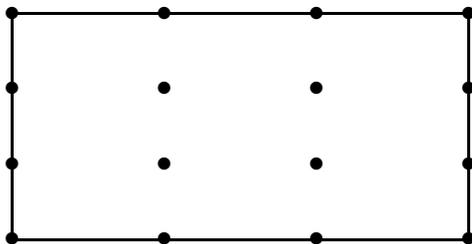
3-rectángulo bicuadrático



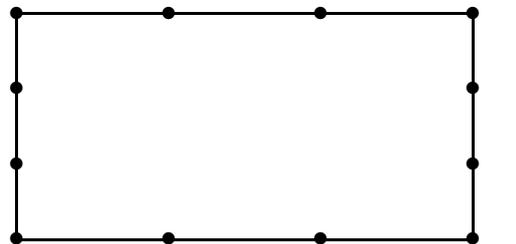
2-rectángulo bicuadrático reducido



3-rectángulo bicuadrático reducido



2-rectángulo bicúbico



2-rectángulo bicúbico reducido

Figura 2: Elementos rectangulares

$b_h^{T_e} = (b_i^e)$, y a sumar estas contribuciones para todos los elementos. Dado que φ_i^e son las funciones de base locales correspondientes al nodo i , es claro que los coeficientes k_{ml}^e y b_l^e serán nulos siempre que los nodos m y l no pertenezcan al elemento T_e , lo cual ocurre casi siempre. De aquí se deduce que, en particular, la matriz K_h tiene muchos coeficientes nulos (matriz hueca) y que, si se hace una reenumeración razonable de los nodos, la nueva matriz tendrá una estructura de banda en la que los elementos no nulos están agrupados alrededor de la diagonal principal, lo cual favorecerá grandemente la resolución numérica del sistema (169).

Por otra parte, la solución que buscamos también debe verificar las condiciones de contorno esenciales, en nuestro caso la condición Dirichlet homogénea (150), esto es debemos buscar la solución en V_h tal como lo definimos en (172). En nuestro caso la imposición de esta condición $u_h = 0$ sobre Γ_1 , se traduce en bloquear en aquellos nodos b_j tales que pertenecen a Γ_1 el valor de u_j con el valor exacto dado por la condición de contorno. Por tanto, bastará hacer los $u_j = 0$ en todos aquellos nodos $b_j \in \Gamma_1$.

3.5 Estimación del error

En esta sección se presenta un breve análisis del error que permita, por una parte, probar la convergencia del método y, por otra, dar estimaciones encaminadas a controlar el error. Se presentan por ello dos tipos de estimaciones del error: *a priori* y *a posteriori*.

En primer lugar se dan estimaciones del error a priori que prueban que el método de elementos finitos suministra la mejor aproximación posible de la solución en un cierto sentido. Estas estimaciones implican que el error de la aproximación de elementos finitos puede ser hecho arbitrariamente pequeño refinando la malla, suponiendo que la solución sea suficientemente regular para permitir que el error de interpolación tienda a cero cuando la malla se refine.

Después se presentan estimaciones del error a posteriori que acotan el error cometido en la aproximación de elementos finitos en términos de los errores residuales. Con este tipo de estimaciones es posible controlar adaptativamente el error y obtener la precisión deseada, mediante un refinamiento adecuado de la malla.

Estimaciones de error a priori

Sea Ω un dominio que suponemos dividido en N_e elementos finitos del mismo tipo geométrico y con el mismo grado de aproximación. Esta malla de elementos finitos puede generarse a partir de un único elemento de referencia \hat{T} y de una aplicación afín F_T que transforma \hat{T} en cada uno de los elementos T de la malla:

$$F_T : \hat{x} \in \hat{T} \rightarrow F_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b_T = x \in T \quad (197)$$

Cuando dos elementos T y \hat{T} están relacionados por una aplicación afín se dice que son

elementos afín equivalentes.

Vamos a adoptar en siguiente convenio de notación: toda función continua v definida sobre T está biunívocamente asociada a una función continua \hat{v} definida sobre \hat{T} dada por la composición de v y F_T , esto es:

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(F_T(\hat{x})) = v(x), \quad \forall \hat{x} \in \hat{T}. \quad (198)$$

El tamaño y la forma relativos de un elemento arbitrario T se cuantifican por medio de las dos constantes:

$$h_T = \text{diam}(T) = \inf\{\text{diámetros de esferas conteniendo a } T\} \quad (199)$$

$$\rho_T = \sup\{\text{diámetros de esferas contenidas en } T\} \quad (200)$$

Si denotamos $\hat{h} = h_{\hat{T}}$ y $\hat{\rho} = \rho_{\hat{T}}$, se pueden estimar las norma matriciales de B_T y su inversa en función de las características geométricas de T y \hat{T} :

$$\|B_T\|_2 \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}} \quad (201)$$

$$\|B_T^{-1}\|_2 \leq \frac{\hat{h}}{\rho_T} \quad (202)$$

Estimaciones locales de error de interpolación

Teniendo en cuenta la definición de elementos afín equivalentes y de operadores de interpolación es fácil probar que si \hat{T} y T son afín equivalentes entonces los operadores de interpolación respectivos $\hat{\Pi}$ y Π_T son tales que $\hat{\Pi}(\hat{v}) = \Pi_T(v)$.

Recordemos que para las aproximaciones de Galerkin, el error $\|u - u_h\|$ medido en una norma apropiada puede acotarse superiormente por el error de interpolación $\|u - \tilde{u}_h\|$, siendo \tilde{u}_h la interpolante de u en V_h . Vamos a dar a continuación una estimación general del error de interpolación local $\|v - \Pi_T(v)\|$ para funciones definidas sobre un único elemento T . Esta estimación se usará posteriormente para obtener una estimación global para funciones definidas en todo Ω .

Resultado 1: Sea (T, P_T, Σ_T) un elemento afín equivalente a $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Sean k y m enteros no negativos tales que $H^{k+1}(\hat{T}) \subset C(\hat{T})$, $H^{k+1}(\hat{T}) \subset H^m(\hat{T})$ y $P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^m(\hat{T})$. Sean Π_T y $\hat{\Pi}$ los operadores de interpolación asociados a Σ_T y $\hat{\Sigma}$, respectivamente. Entonces, para cualquier función $v \in H^{k+1}(T)$ se verifica que la seminorma:

$$|v - \Pi_T(v)|_{m,T} \leq \hat{C} \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T} \quad (203)$$

donde \hat{C} es una constante que sólo depende de \hat{T} y $\hat{\Pi}$.

Estimaciones de error para problemas de segundo orden

Dada una función $v \in C(\Omega)$ consideramos su interpolante \tilde{v}_h en el espacio de elementos finitos X_h en la forma:

$$\tilde{v}_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} v(b_i) \varphi_i(x) \quad (204)$$

donde φ_i eran las funciones de base globales que generaban el espacio X_h . Se define el operador de proyección Π_h mediante la expresión $\Pi_h(v) = \tilde{v}_h$. Por el modo en que se construyen las funciones de base φ_i a partir de las funciones de base locales φ_i^e es claro que la restricción de $\Pi_h(v)$ a un elemento T_e es $\Pi_{T_e}(v)$.

Estamos interesados en estimar el error para problemas de segundo orden, así que debemos obtener estimaciones de $\|u - v_h\|_{1,\Omega}$ para cualquier $v_h \in V_h$. A continuación, y de acuerdo con el Lema de Cea, basta elegir $v_h = \Pi_h(u)$ y deducir una cota del error de interpolación para $\|u - \Pi_h(u)\|_{1,\Omega}$.

Comenzaremos definiendo lo que se entiende por *familia regular de triangulaciones*: Se dice que $\{\tau_h\}$ es una familia regular de triangulaciones de Ω si se cumplen las condiciones siguientes:

- Todos los elementos finitos de todas las triangulaciones son afín equivalentes a un mismo elemento de referencia $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$.
- Para todo par (\hat{T}'_1, \hat{T}'_2) de caras de \hat{T} y para toda \hat{F} aplicación afín inversible de R^n tal que $\hat{T}'_2 = \hat{F}(\hat{T}'_1)$ se tiene que $\hat{\Sigma} \cap \hat{T}'_2 = \hat{F}(\hat{\Sigma} \cap \hat{T}'_1)$ y además se verifica $\{\hat{p}|_{\hat{T}'_2} \mid \hat{p} \in \hat{P}\} = \{(p \circ \hat{F})|_{\hat{T}'_1} \mid p \in \hat{P}\}$.
- $h = \max_{T \in \tau_h} h_T \rightarrow 0$.
- Existe una constante $\sigma \geq 1$ tal que:

$$\forall h, \quad \forall T \in \tau_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma. \quad (205)$$

En estas condiciones puede probarse el siguiente resultado:

Resultado 2: Sea Ω un abierto poliédrico de R^n , ($n \leq 3$). Sea $\{\tau_h\}$ una familia regular de triangulaciones de Ω asociada a un elemento finito de referencia $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Se supone que existe un entero $k \geq 1$ tal que $P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{T})$. Entonces el método de elementos finitos es convergente, es decir, la solución u_h del problema discretizado (164) converge a la solución del problema variacional (162) en la norma:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0 \quad (206)$$

Además, el método es, al menos, de orden k , esto es, existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que, si la solución u pertenece a $H^{k+1}(\Omega)$ entonces:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^k |u|_{k+1,\Omega} \quad (207)$$

Puede ocurrir en la práctica que la solución u sea poco regular y no pertenezca a $H^{k+1}(\Omega)$. Por ejemplo, en un problema en R^2 , el uso de elementos finitos simpliciales cuadráticos (triángulos) con seis nodos significará que $k = 2$ y por tanto que $k + 1 = 3$. Pero, con la regularidad supuesta, la seminorma $|u|_{3,\Omega}$ no tendría sentido. Estas dificultades se pueden solventar considerando el siguiente corolario:

Resultado 3: Si $\{\tau_h\}$ una familia regular de triangulaciones de Ω asociada a un elemento finito simplicial o rectangular de orden k , entonces el método de elementos finitos es convergente. Además, existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que, si la solución u pertenece a $H^{l+1}(\Omega)$, $1 \leq l \leq k$, se verifica:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^l |u|_{l+1,\Omega} \quad (208)$$

(Por ejemplo, para el triángulo lineal se obtiene $l = 1$, para el triángulo cuadrático $2 \leq l \leq 3$, para el rectángulo bilineal $l = 2$ y para el rectángulo bilineal “serendipity” $2 \leq l \leq 3$.)

Estimaciones de error a posteriori: Mallas adaptativas

En las aplicaciones es frecuente que, debido a la naturaleza de los datos, una solución de un problema de valor frontera sea poco regular. Una manera de solventar esto es lograr un refinamiento local en aquellos subdominios donde sea necesario. La idea es hacer los cálculos de elementos finitos en una malla provisional y deducir una estimación a posteriori del error, que indicará que parte de esa malla conlleva los mayores errores. Usando esta información se refina localmente la malla y se repite el cálculo de la aproximación de elementos finitos hasta que se obtenga la precisión deseada.

Vamos a considerar el caso de la ecuación del calor con condición Dirichlet homogénea en toda la frontera

$$\begin{cases} -\Delta u \equiv -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (209)$$

y una triangulación uniforme τ_h . Supongamos que u_h es una solución de elementos finitos y que \mathcal{E}_h es el conjunto de aristas de los triángulos $T \in \tau_h$ que están en el interior de Ω .

Si sustituimos u_h en la ecuación diferencial en su forma continua, se tiene un residuo ya que esta no se cumple de manera exacta. Además, u_h difiere de la solución continua en que $\vec{\nabla} u_h$ presenta saltos en las aristas. Los residuos:

$$R_T \equiv R_T(u_h) = \Delta u_h + f, \quad \text{para } T \in \tau_h, \quad (210)$$

$$R_E \equiv R_E(u_h) = [\vec{\nabla} u_h] \cdot \vec{n}, \quad \text{para } E \in \mathcal{E}_h, \quad (211)$$

van a intervenir en la mayoría de los estimadores del error. Hay distintas maneras de construir estos estimadores:

Estimadores residuales:

Si se define

$$\mathcal{R}_T = \{h_T^2 \|R_T\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T} h_E \|R_E\|_{0,E}^2\}^{1/2}, \quad \forall T \in \tau_h, \quad (212)$$

se tiene la estimación a posteriori siguiente:

Resultado 4: Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \sum_{T \in \tau_h} \mathcal{R}_T^2 \quad (213)$$

Estimadores basados en un problema local de Neumann:

Sobre cada elemento T se resuelve un problema variacional local correspondiente a:

$$\begin{cases} -\Delta z = R_T & \text{en } T, \\ \vec{\nabla} z \cdot \vec{n} = R_E & \text{sobre cada } E \in \partial T. \end{cases} \quad (214)$$

Si se amplía el espacio de aproximaciones usando polinomios de mayor grado, entonces la norma $\|z\|_{1,T}$ permite construir estimadores a posteriori.

Estimadores basados en un problema local de Dirichlet:

Sobre cada elemento T se resuelve un problema variacional sobre

$$\omega_T = \{T' \in \tau_h \mid T \text{ y } T' \text{ tienen una arista en común}\} \quad (215)$$

El problema variacional local corresponde a:

$$\begin{cases} -\Delta z = R_T & \text{en } \omega_T, \\ z = u_h & \text{sobre } \partial\omega_T. \end{cases} \quad (216)$$

Si se amplía de nuevo el espacio de aproximaciones con polinomios de mayor grado, entonces se puede probar que la norma $\|z - u_h\|_{1,\omega_T}$ suministra un estimador.

Estimadores basados en el promediado:

Se construye una aproximación continua $\vec{\sigma}_h$ de $\vec{\nabla}u$ en un proceso de dos pasos. En cada nodo de la triangulación $\vec{\sigma}_h$ es un promedio ponderado de los gradientes $\vec{\nabla}u_h$ sobre los elementos que lo contienen, donde el peso es proporcional a las medidas de los elementos. Después se extiende $\vec{\sigma}_h$ a todo el elemento por interpolación lineal. La norma de la diferencia $\vec{\sigma}_h - \vec{\nabla}u_h$ puede usarse como estimador.

En los cálculos con elementos finitos donde se usa refinamiento local de la malla, se comienza con una malla grosera y se refina sucesivamente hasta que el estimador es más pequeño que una cota prescrita para todos los elementos de la malla. En particular, aquellos elementos donde los estimadores dan los valores más grandes son los que deben ser refinados.

Elementos isoparamétricos

Para el tratamiento de problemas sobre dominios con frontera curva es necesario el uso de elementos con lados curvos si queremos obtener una buena aproximación. Por esta razón se introducen las así llamadas familias isoparamétricas de elementos finitos, que generalizan las familias de elementos finitos afines (con lados planos).

Para las triangulaciones generales, los elementos isoparamétricos juegan un papel fundamental en la frontera, pero a menudo también son usados en el interior ya que permiten trabajar con elementos finitos de forma arbitraria.

Los elementos finitos isoparamétricos se construyen a partir del elemento finito de referencia \hat{T} mediante una aplicación biyectiva F_T que transforma el elemento afín de referencia \hat{T} en el elemento isoparamétrico T . Si la función F_T es afín (polinómica de grado 1) entonces T también lo es, pero en el caso de funciones apropiadas F_T (polinómicas de grado superior) es cuando se obtienen los elementos con lados curvos.

Una teoría de error análoga a la del caso afín puede ser obtenida para las familias isoparamétricas de elementos finitos.

3.6 Implementación efectiva del método de elementos finitos

Por simplicidad, nos centraremos en el estudio del problema en dimensión $n = 2$. Vamos a ver como se organizan los cálculos para construir la matriz K_h y el segundo miembro b_h del

sistema lineal (169) si elegimos, por ejemplo, un espacio de elementos finitos triangulares de Lagrange de grado $k = 1$, es decir, si:

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) \mid v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h, v_h|_{\Gamma_1} = 0\} \quad (217)$$

Por el momento vamos a realizar los cálculos sin considerar la condición de contorno Dirichlet homogénea. El método que describimos reposa en dos conceptos fundamentales: las matrices elementales y el ensamblado.

Recordemos que el problema discretizado se escribía de la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_2} \beta u_h v_h d\gamma = \int_{\Omega} f v_h dx + \int_{\Gamma_2} g v_h d\gamma, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (218)$$

Comenzaremos considerando el primer sumando de esta igualdad. Vamos a descomponer las integrales sobre Ω en una suma de integrales sobre todos los elementos de la triangulación, en la forma:

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx = \sum_{T \in \tau_h} \int_T (\nabla v_h)^t E \nabla u_h dx \quad (219)$$

donde:

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \nabla v_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (220)$$

Si a_1^T, a_2^T, a_3^T son los vértices del triángulo T y m_{1T}, m_{2T}, m_{3T} son sus índices respectivos en la numeración de los nodos de τ_h , esto es, $a_i^T = b_{m_{iT}}$, $i = 1, 2, 3$, entonces para todo $v_h \in V_h$ se tiene:

$$v_h|_T = \sum_{i=1}^3 v_h(a_i^T) p_i^T = \begin{pmatrix} p_1^T & p_2^T & p_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_h(a_1^T) \\ v_h(a_2^T) \\ v_h(a_3^T) \end{pmatrix} = (P^T)^t v_T \quad (221)$$

donde recordamos que cada polinomio p_i^T es el único de grado menor o igual que 1 tal que $p_i^T(a_j^T) = \delta_{ij}$.

Por consiguiente, en cada elemento T :

$$\nabla v_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_h}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 v_h(a_i^T) \frac{\partial p_i^T}{\partial x_1} \\ \sum_{i=1}^3 v_h(a_i^T) \frac{\partial p_i^T}{\partial x_2} \end{pmatrix} = (DP^T)^t v_T \quad (222)$$

donde la matriz $DP^T = (d_{ij})$ viene dada por:

$$d_{ij} = \frac{\partial p_i^T}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2. \quad (223)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx &= \sum_{T \in \tau_h} \int_T (v_T)^t DP^T E (DP^T)^t u_T dx \\ &= \sum_{T \in \tau_h} (v_T)^t \left\{ \int_T DP^T E (DP^T)^t dx \right\} u_T \end{aligned} \quad (224)$$

Razonando de manera análoga para los otros términos de la igualdad (218), esta se transforma en:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \tau_h} (v_T)^t \left\{ \int_T DP^T E (DP^T)^t dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_2} \beta P^T (P^T)^t d\gamma \right\} u_T \\ = \sum_{T \in \tau_h} (v_T)^t \left\{ \int_T P^T f dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_2} P^T g d\gamma \right\}, \quad \forall v_T. \end{aligned} \quad (225)$$

La matriz 3×3

$$K_h^T = \int_T DP^T E (DP^T)^t dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_2} \beta P^T (P^T)^t d\gamma \quad (226)$$

se llama *matriz elemental* del elemento T , y el vector 3×1

$$b_h^T = \int_T P^T f dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_2} P^T g d\gamma \quad (227)$$

se llama *segundo miembro elemental* del elemento T .

El cálculo de las integrales que intervienen en K_h^T y en b_h^T se realiza, en general, mediante fórmulas de integración numérica. Se puede dar una teoría matemática que permite probar que el orden de error no aumenta siempre que se emplee una fórmula conveniente, que dependerá del tipo de elemento finito utilizado.

Por otra parte, si v es un vector de N_h componentes, entonces existe una matriz W^T tal que

$$W^T v = \begin{pmatrix} v_{m_{1T}} \\ v_{m_{2T}} \\ v_{m_{3T}} \end{pmatrix} = v_T \quad (228)$$

siendo W^T la matriz $3 \times N_h$ dada por:

$$W^T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (229)$$

donde los unos están situados en las columnas m_{1T}, m_{2T}, m_{3T} , respectivamente. Es decir, la matriz W^T extrae del conjunto total de N_h grados de libertad a los 3 que corresponden al elemento T .

De este modo, la ecuación (225) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} (v_h)^t \left[\sum_{T \in \tau_h} (W^T)^t \left\{ \int_T DP^T E (DP^T)^t dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_2} \beta P^T (P^T)^t d\gamma \right\} W^T \right] u_h \\ = (v_h)^t \left[\sum_{T \in \tau_h} (W^T)^t \left\{ \int_T P^T f dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_2} P^T g d\gamma \right\} \right], \quad \forall v_h \end{aligned} \quad (230)$$

que de manera condensada puede escribirse como $K_h u_h = b_h$, donde

$$K_h = \sum_{T \in \tau_h} (W^T)^t K_h^T W^T, \quad (231)$$

$$b_h = \sum_{T \in \tau_h} (W^T)^t b_h^T. \quad (232)$$

Estos cálculos finales se conocen con el nombre de *ensamblado* de la matriz y del segundo miembro.

Condición Dirichlet: Bloqueo de los grados de libertad

Los cálculos realizados hasta ahora corresponden a un problema discretizado que no ha tenido en cuenta la condición Dirichlet en la frontera Γ_1 . Sólo se ha tenido en cuenta dicha condición cuando se han eliminado los cálculos integrales en dicha frontera. Por tanto, se ha utilizado un espacio de aproximaciones más grande que el adecuado, puesto que no todas las funciones de base φ_i verifican la condición Dirichlet homogénea $u = 0$ sobre Γ_1 .

Eliminar estas funciones de base correspondientes a los nodos que están en Γ_1 es equivalente a eliminar las ecuaciones y las incógnitas correspondientes, pero esto resulta muy costoso numéricamente. Un procedimiento equivalente más sencillo consiste en sustituir la ecuación i -ésima (siendo b_i cada nodo de Γ_1) por la ecuación $u_i = 0$.

Lo que se hace en la práctica es algo numéricamente equivalente a esto, para no modificar los coeficientes de dichas ecuaciones, y que consiste en multiplicar el coeficiente diagonal k_{ii}^h por un número muy grande (por ejemplo, $\kappa = 10^{15}$) y sustituir la componente b_i^h por 0. (Esto sirve también para tratar el caso de condiciones Dirichlet no homogéneas $u = g$ sobre Γ_1 , en ese caso basta con sustituir la componente i -ésima b_i^h del segundo miembro por

el producto del valor exacto $q(b_i)$ que debe tomar la solución por el número κ por el cual hemos multiplicado k_{ii}^h .)

Integración numérica

Un punto clave en la implementación del método de los elementos finitos es la construcción de la matriz de rigidez y del vector de carga, y esto requiere que un número de términos sean integrados, generalmente, sobre el elemento de referencia.

Es necesario aproximar el valor de cada una de esas integrales. Para ello deben tenerse en cuenta dos criterios:

- el grado de aproximación ha de conocerse a priori
- debe ser fácilmente implementable

La base de la mayor parte de los esquemas de integración numérica es la identificación de ciertos puntos conocidos como *nodos de cuadratura* (donde el valor de la función es calculado) y la especificación de un conjunto de *pesos* (uno por cada nodo).

Supongamos que la integración se realiza sobre el elemento de referencia; entonces, si los nodos de cuadratura se denotan por ξ_l , $l = 1, \dots, r$, y los pesos respectivos por ω_l , $l = 1, \dots, r$, una fórmula de integración numérica de orden r es una expresión de la forma:

$$\int_{\hat{T}} h(x) dx \simeq \sum_{l=1}^r \omega_l h(\xi_l). \quad (233)$$

La principal cuestión que se debe resolver a la hora de elegir las fórmulas de cuadratura es la de encontrar condiciones suficientes que aseguren que el orden de convergencia en ausencia de integración numérica no se ve alterado por el efecto de su utilización.

Un resultado en ese sentido para el caso de problemas de orden 2 es el siguiente:

Resultado 5: En las condiciones usuales, se sigue teniendo convergencia de orden k , esto es,

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^k |u|_{k+1,\Omega} \quad (234)$$

siempre que la fórmula de cuadratura utilizada sea exacta para todos los polinomios de grado $2k - 2$.

3.7 Bibliografía

1. Ciarlet, P.G. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978.

2. Eriksson, K.; Estep, D.; Hansbo, P.; Johnson, C. *Computational differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
3. Fletcher, C.A.J. *Computational Galerkin methods*. Springer-Verlag, New York, 1984.
4. Raviart, P.A.; Thomas, J.M. *Introduction a l'analyse numerique des equations aux derivees partielles*. Masson, París, 1983.
5. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. *The finite element method. Vols. 1-3*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

4. Problemas evolutivos y no lineales en transmisión de calor

4.1 Introducción

Para describir cómo se utiliza el método de elementos finitos en problemas evolutivos utilizaremos un problema marco de transmisión de calor en régimen transitorio. Este problema se rige por una ecuación que es de tipo parabólico y que aparece también en otros contextos distintos al térmico, por ejemplo, en la evolución temporal de las concentraciones de reactivos en procesos químicos sin reacción.

Previamente al planteamiento del problema térmico evolutivo, y para resaltar las novedades que surgen en su resolución numérica con elementos finitos, retomamos el problema estacionario analizado en el capítulo 3.

Para simplificar suponemos que tenemos un medio isótropo. Esto es:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) = f \quad \text{en } \Omega \quad (235)$$

siendo

$$a_{ij} = \begin{cases} k & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (236)$$

de manera que se puede escribir la ecuación térmica en la forma

$$-\text{div}(k\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (237)$$

Retomamos también las condiciones de contorno expuestas en el capítulo 3

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (238)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \beta u = g \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (239)$$

La formulación variacional de (237-239) se escribe como sigue:
hallar $u \in V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$ tal que

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} \beta u v d\gamma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\gamma \quad \forall v \in V \quad (240)$$

La aplicación del método de elementos finitos para resolver el problema (240) conduce a la resolución de un sistema lineal (ver capítulo 3)

$$K_h u_h = b_h$$

siendo K_h, b_h la matriz de rigidez y el segundo miembro dados por

$$(K_h)_{ij} = \int_{\Omega} k \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx + \int_{\Gamma_2} \beta \varphi_j \varphi_i d\gamma \quad (241)$$

$$(b_h)_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi_i d\gamma \quad (242)$$

siendo $\{\varphi_i\}$ la base del espacio de elementos finitos V_h . El vector solución del sistema proporciona los coeficientes que determinan la solución del problema como combinación lineal de funciones de la base

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N (u_h)_i \varphi_i(x) \quad (243)$$

4.2 Problema evolutivo parabólico

Se considera ahora un problema transitorio de transmisión de calor en sólidos. En este caso la función incógnita, la temperatura, depende de la variable geométrica x y de la variable temporal t . Así el problema continuo se formula como sigue: hallar $u(x, t)$ definida en $\Omega \times [0, T]$, donde T representa el tiempo final, tal que

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(k \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (244)$$

siendo ρ la densidad y c el calor específico, con las condiciones de contorno

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times [0, T] \quad (245)$$

$$-k \frac{\partial}{\partial \bar{n}} + \beta u = g \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times [0, T] \quad (246)$$

y la condición inicial, solución en el primer tiempo, que aparece en los problemas evolutivos

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega \quad (247)$$

Para actuar de manera similar al caso estacionario, se construye una formulación débil de (244 -247) definiendo el espacio de funciones donde están las soluciones en cada instante de tiempo que será $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$. Debemos pues hallar

$$u : [0, T] \rightarrow V \quad (248)$$

tal que se cumple (247) y

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} \beta u v d\gamma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\gamma \quad \forall v \in V \quad (249)$$

Se puede observar que la diferencia con el problema estacionario radica en que aparece un nuevo término que contiene la derivada temporal y una condición inicial adicional.

4.3 Semidiscretización espacial

Siguiendo el mismo proceso que en el caso estacionario se aproxima el espacio V por un espacio V_h de dimensión finita de manera que, para cada $t \in [0, T]$ tratemos de encontrar una función $u_h(x, t) \in V_h$. Esta función, en términos de la base $\{\varphi_i\}$ se escribe como

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x) \quad (250)$$

donde la novedad radica en que los coeficientes de la combinación lineal (i.e. las incógnitas del problema)dependen de la variable temporal t .

Así, se puede formular el problema discretizado en espacio en la forma siguiente: hallar $\{u_j(t)\}_{j=1}^N$ tales que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho c \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j(t)}{\partial t} \varphi_j(x) \right) v_h(x) dx + \int_{\Omega} k \left(\sum_{j=1}^N u_j(t) \nabla \varphi_j(x) \right) \nabla v_h(x) dx + \\ & + \int_{\Gamma_2} \beta \left(\sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x) \right) v_h(x) d\gamma = \int_{\Omega} f v_h(x) dx + \int_{\Gamma_2} g v_h(x) d\gamma \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (251)$$

$$\sum_{j=1}^N u_j(0) \varphi_j(x) = u_{0h}(x) \quad x \in \Omega \quad (252)$$

donde denotamos por $u_{0h}(x)$ una aproximación en V_h de $u_0(x)$, que escribimos como

$$u_{0h}(x) = \sum_{j=1}^N u_j^0 \varphi_j(x) \quad (253)$$

De nuevo, teniendo en cuenta que basta imponer las condiciones para los elementos de una base de V_h se obtiene un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) para los

coeficientes $\{u_j(t)\}_{j=1}^N$

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \rho c \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \right) \frac{\partial u_j(t)}{\partial t} + \left(\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} k \nabla \varphi_j(x) \nabla \varphi_i(x) dx + \int_{\Gamma_2} \beta \varphi_j(x) \varphi_i(x) d\gamma \right) u_j(t) = \int_{\Omega} f \varphi_i(x) dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi_i(x) d\gamma \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (254)$$

$$u_j(0) = u_j^0(x) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (255)$$

Si retomamos la notación utilizada en los capítulos 2 y 3, observamos que el segundo sumando del primer miembro de (254) es la matriz de rigidez K_h descrita en (241) para el problema estacionario. Análogamente el segundo miembro es el vector b_h . Además si denotamos por

$$(M_h)_{ij} = \int_{\Omega} \rho c \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \quad (256)$$

que llamaremos matriz de masa en lo que sigue y, abusando de la notación para el vector solución, podemos reescribir el sistema de EDO (254) como sigue: hallar $u(t) \equiv \{u_j(t)\}_{j=1}^N$ tal que

$$M_h \frac{du}{dt} + K_h u = b_h \quad (257)$$

que es la escritura final del problema semidiscretizado en espacio.

El sistema (257) es lineal y podría resolverse teóricamente de manera exacta. En la práctica se utiliza un esquema numérico de integración por dos motivos. En primer lugar porque existen métodos numéricos que lo resuelven de manera fácil y en segundo lugar porque la solución que estamos buscando es una solución aproximada en espacio (i.e cometemos un error), por lo tanto de lo que se trata es de que el método numérico de integración no cometa un error de mayor orden que el que ya se tiene.

A esta fase de resolución numérica del sistema de EDO se la denomina discretización en tiempo y se describe en la sección siguiente.

4.4 Discretización temporal

El sistema (257) con la condición inicial (255) podemos identificarlo en la forma clásica de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \quad (258)$$

$$Y(0) = Y_0 \quad (259)$$

y utilizar un método numérico de tipo Runge-Kutta de bajo orden para su resolución. En concreto, si se discretiza el intervalo de tiempo $[0, T]$ en pequeños intervalos de tamaño Δt (paso de tiempo), podemos denotar $t^0 = 0$ y

$$t^n = n\Delta t \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (260)$$

y un método de Runge-Kutta de tipo θ -esquema y orden 1 para resolver (258) se escribe

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t} = \theta F(t^{n+1}, Y^{n+1}) + (1 - \theta)F(t^n, Y^n) \tag{261}$$

donde $Y^{n+1} \sim Y((n+1)\Delta t)$ es la solución en el tiempo $n+1$ que se calcula una vez conocida la solución en el tiempo anterior t^n y θ es un parámetro entre 0 y 1 cuya elección origina distintos tipos de métodos. En general se tiene que:

$\theta = 0$	- - - - -	Euler explícito
$\theta = 1$	- - - - -	Euler implícito
$0 < \theta < 1$	- - - - -	otros métodos implícitos

Tanto el método explícito como el implícito son de orden 1 (esto es, el error que se comete es de orden Δt), y uno de los más conocidos de los implícitos, el esquema de Crank-Nicolson para $\theta = 1/2$ es de orden 2 (esto es, el error que se comete es de orden $(\Delta t)^2$).

Para poner de manifiesto las ventajas e inconvenientes de las diferentes elecciones de θ , resolvemos el problema sencillo dado por la EDO

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y, \quad \lambda > 0 \tag{262}$$

$$y(0) = 1 \tag{263}$$

cuya solución exacta es $y(t) = e^{-\lambda t}$. Aplicando el θ -esquema (261) se tiene

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = -\theta \lambda y^{n+1} + (1 - \theta) \lambda y^n \tag{264}$$

$$y^0 = 1 \tag{265}$$

Caso explícito, $\theta = 0$, conocido como Euler explícito

$$y^{n+1} = (1 - \lambda \Delta t) y^n \tag{266}$$

Si (Δt) es grande, $\Delta t > \frac{2}{\lambda}$, entonces $1 - \lambda \Delta t < -1$ y en pocas etapas ya se ven oscilaciones que van creciendo en amplitud a medida que avanzamos en el tiempo. A este comportamiento se le llama inestabilidad numérica.

Si $\frac{1}{\lambda} < \Delta t < \frac{2}{\lambda}$ el esquema sigue oscilando pero no crece indefinidamente. Se trata de oscilación numérica.

Para tener una aproximación correcta se debe tomar $\Delta t < \frac{1}{\lambda}$. No aparecen oscilaciones ni crecimientos pero nos obliga a tomar pasos de tiempo muy pequeños.

Caso implícito, $\theta = 1$, conocido como Euler implícito

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{(1 + \lambda \Delta t)} \tag{267}$$

como λ y Δt son positivos este esquema no produce inestabilidades ni oscilaciones y nos permite tomar pasos de tiempo más grandes. Sin embargo, el error aumenta a medida que aumentamos Δt .

Aplicamos ahora un θ -esquema (261) a nuestro problema semidiscretizado en espacio por elementos finitos dado en (257). Se trata de

$$\left[\frac{1}{\Delta t}M_h + \theta K_h\right]u^{n+1} = \left[\frac{1}{\Delta t}M_h - (1 - \theta)K_h\right]u^n + \theta b_h^{n+1} + (1 - \theta)b_h^n \quad (268)$$

Lo primero que debemos observar es que ahora con $\theta = 0$ no tenemos un método explícito, ya que aparece $\frac{1}{\Delta t}M_h$, salvo que la matriz M_h sea diagonal. Una de las formas de conseguir que M_h sea diagonal es construirla mediante la técnica de condensación dinámica o de masa ("mass lumping"). Una posible técnica para obtener esto es acumular en la diagonal la suma de todos los elementos de cada fila (esta operación se puede interpretar como calcular la integral (256), que nos proporciona la matriz de masa, utilizando un fórmula de cuadratura numérica en cada elemento de orden bajo).

Por otra parte, recordemos grosso modo que el θ -esquema (261) es estable si se verifica

$$\|u^{n+1}\|_* \leq c_1 \max_{k \leq n} \|u^k\|_* + c_2 \max_{k \leq n} \|b_h^k\|_* \quad (269)$$

$$\text{siendo } \|v\|_* = \left(\Delta t \sum_{j=1}^N v_j^2 \right)^{1/2} \quad (270)$$

y es condicionalmente estable si se verifica (269) sólo cuando Δt tiende a cero. En este sentido, los resultados generales que se tienen son:

- $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ esquema incondicionalmente estable
- $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ esquema condicionalmente estable

Estudios sobre este tema revelan que el más estable es el esquema implícito, $\theta = 1$, y el más preciso es el esquema de Crank-Nicolson $\theta = 1/2$. Llegar a un equilibrio entre estabilidad y precisión ha llevado a algunos autores a sugerir $\theta = 2/3$ (Zienkiewicz) o $\theta = 0.878$ (Lambert). Para mostrar estos resultados consideramos el θ -esquema (261) en ausencia de fuentes y sumideros, esto es, $b_h^{n+1} = b_h^n = 0$. Se tiene

$$u^{n+1} = \left[\frac{1}{\Delta t}M_h + \theta K_h\right]^{-1} \left[\frac{1}{\Delta t}M_h - (1 - \theta)K_h\right]u^n \quad (271)$$

de manera que el esquema no presentará oscilaciones que crezcan indefinidamente si los autovalores de la matriz global que aparece en (271) tienen módulo menor que la unidad. Esto ocurre si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ que efectivamente origina autovalores de módulo menor que uno y en consecuencia estabilidad incondicional.

$$\|u^n\| \leq \|u^0\| \leq \|u_0\|$$

Sin embargo para $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ el esquema es estable si se impone alguna restricción al paso de tiempo Δt . Así, por ejemplo, para $\theta = 0$ tenemos en (271)

$$u^{n+1} = (I - \Delta t K_h)u^n \quad (272)$$

y, si denotamos por λ_j los autovalores de K_h , para que el radio espectral sea menor que uno en módulo basta imponer

$$\Delta t |\lambda_j| \leq 2$$

Teniendo en cuenta que los autovalores de K_h dependen del parámetro h de la discretización espacial (tamaño de la malla), y que es del orden de $O(h^{-2})$ (es decir, mallas más finas producen mayor radio espectral) se obtiene la condición

$$\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda_j|} = O(h^2)$$

esto es

$$\Delta t \leq ch^2 \quad (273)$$

de modo que el método explícito es condicionalmente estable bajo la condición (273), que en la práctica supone hacer muchas etapas temporales cuando las mallas son muy finas. La ventaja del método explícito radica en la facilidad de resolución de las etapas, (ver (272)) mientras que el método implícito necesita resolver en cada etapa un sistema de ecuaciones con matriz mal condicionada (ver (271)). Un factor positivo en este último caso es que, para problemas lineales como el que nos ocupa, la matriz del SEL es la misma en todos los pasos de tiempo y se puede factorizar una sola vez.

4.5 Introducción a los problemas no lineales

Para realizar una breve introducción a la resolución numérica de problemas no lineales, consideramos el problema estacionario de transmisión de calor descrito en la introducción de ese capítulo (237- 239). Recordamos que en este problema k representa la conductividad térmica, f es una fuente de calor distribuido en el dominio, β el coeficiente de convección desde la frontera al ambiente y g el producto de este coeficiente por la temperatura ambiente. Una no linealidad típica que surge en este tipo de problemas es la dependencia de la conductividad térmica de la temperatura, esto es, $k = k(u)$ y, como veremos en este problema sencillo, supone un aumento considerable de la dificultad para resolverlo numéricamente. La formulación en este caso vendría dada por

$$-div(k(u)\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (274)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (275)$$

$$-k(u)\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} + \beta u = g \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (276)$$

La formulación variacional de (274-275) se escribe como sigue: hallar $u \in V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}$ tal que

$$\int_{\Omega} k(u) \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} \beta u v d\gamma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v d\gamma \quad \forall v \in V \quad (277)$$

reescribimos la formulación con elementos finitos para aproximar el problema: hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$\int_{\Omega} k(u_h) \nabla u_h \nabla v_h dx + \int_{\Gamma_2} \beta u_h v_h d\gamma = \int_{\Omega} f v_h dx + \int_{\Gamma_2} g v_h d\gamma \quad \forall v_h \in V_h \quad (278)$$

Sustituyendo la aproximación u_h por la combinación lineal en función de la base

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j$$

y v_h por un elemento de la base obtenemos el problema de hallar $\{u_j\}_{j=1}^N$ tales que

$$\int_{\Omega} k\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)\right) \left(\sum_{j=1}^N u_j \nabla \varphi_j(x)\right) \nabla \varphi_i dx + \int_{\Gamma_2} \beta \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)\right) \varphi_i d\gamma = \int_{\Omega} f \varphi_i dx + \int_{\Gamma_2} g \varphi_i d\gamma \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (279)$$

que con la notación general que usa los funcionales a y l sería

$$a(u_h, \varphi_i) = l(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (280)$$

como la función k depende de u , se pierde la linealidad de a en la primera variable y, en consecuencia, el sistema discreto que aparece en (279) no es un sistema lineal. De hecho es un sistema de ecuaciones no lineales que podemos escribir como: hallar $\{u_j\}_{j=1}^N$ tales que

$$a\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \varphi_i\right) = b_i \quad i = 1, \dots, N \quad (281)$$

Definimos ahora la función

$$F(u_1, \dots, u_N) = (F_1(u_1, \dots, u_N), \dots, F_N(u_1, \dots, u_N)) \quad (282)$$

con

$$F_i(u_1, \dots, u_N) = a\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \varphi_i\right) - b_i \quad (283)$$

y el problema es hallar $\{u_j\}_{j=1}^N$ solución del sistema de ecuaciones no lineales

$$F(u_1, \dots, u_N) = (0, \dots, 0) \quad (284)$$

que se escribe también como

$$F(u) = \mathcal{O} \quad (285)$$

Uno de los métodos más conocidos para resolver (285) es el de Newton-Raphson. Este método consiste en construir una sucesión de vectores, a partir de un vector inicial lo más próximo posible a la solución buscada, de manera que la sucesión converja a la solución de la ecuación. En concreto, se trata del siguiente algoritmo:

$$\begin{cases} u^0 & \text{inicial} \\ u^{m+1} = u^m - [DF(u^m)]^{-1}F(u^m) \end{cases} \quad (286)$$

es decir, la construcción del iterante $m + 1$ pasa por la resolución del SEL

$$DF(u^m)u^{m+1} = DF(u^m)u^m - F(u^m) \quad (287)$$

Un test de parada habitual es que, cuando dos iterantes consecutivos u^{m+1} y u^m están muy próximos se para el proceso.

La dificultad computacional añadida, aparte de la propia resolución del SEL, es la construcción en cada iteración de la matriz del sistema $DF(u^m)$. Se tiene,

$$(DF(u^m))_{il} = \frac{\partial F_i}{\partial u_l}(u^m) \quad (288)$$

que en nuestro problema es (ver (283))

$$\begin{aligned} (DF(u^m))_{il} &= \frac{\partial}{\partial u_l} \left(a \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \varphi_i \right) \right) (u^m) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial u_l} \left[k \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) \right] \nabla \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) \nabla (\varphi_i) dx + \int_{\Omega} k \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) \nabla (\varphi_l) \nabla (\varphi_i) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_2} \beta \varphi_l \varphi_i d\gamma \end{aligned} \quad (289)$$

donde el primer sumando es novedoso respecto al problema lineal, precisamente porque en aquel $\frac{\partial k}{\partial u_l} = 0$ al no depender k de u .

Con este ejemplo se ha querido poner en evidencia algunos aspectos que apuntan a la mayor dificultad que existe cuando se resuelven problemas no lineales. Por un lado, se establece un proceso iterativo que resuelve la no linealidad (no existen métodos directos que lo realicen en un número finito de etapas), lo que conlleva un nuevo error de convergencia (error de truncamiento) entre el iterante que elijamos como solución y el vector límite en el infinito de la sucesión de iterantes, y por otro lado, es necesario reconstruir la matriz del SEL resultante en cada iteración del algoritmo que resuelve la no linealidad, lo que aumenta considerablemente el número de cálculos a realizar.

En el caso de problemas evolutivos no lineales el proceso es similar puesto que primeramente se efectúa la discretización temporal y posteriormente, en cada paso de tiempo (que es análogo al caso estacionario), se resuelve la no linealidad.

4.6 Bibliografía

1. Reddy, J.N. *An introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York, 1993.
2. Hughes, T.J.R. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
3. Johnson, C. *Numerical solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
4. Szabo, B.-Babuska, I. *Finite Element Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1991.
5. Zienkiewicz, O.C.- Taylor, R.L. *The finite element method*. 5th ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

5. El método de elementos finitos en mecánica de sólidos

Los métodos de elementos finitos son las herramientas más utilizadas para calcular las deformaciones y las tensiones de los cuerpos sólidos sometidos a un sistema de fuerzas aplicadas. Este tipo de problemas se describen a través de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con una característica especial: son invariantes a los *movimientos rígidos* (traslaciones y giros), ya que estos no modifican la energía elástica del cuerpo.

En este capítulo nos centraremos en la llamada *elasticidad linealizada*, esto es, nos limitaremos al estudio de pequeñas deformaciones, donde los fenómenos no lineales que aparecen son despreciables.

5.1 Elasticidad linealizada clásica: Caso estacionario

La resolución de un problema estacionario de mecánica de sólidos consiste en la determinación del *campo de desplazamientos* $\vec{u}(x) = (u_i(x))_{i=1}^3$ y del tensor de tensiones $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))_{i,j=1}^3$ relativos al cuerpo considerado $\Omega \subset R^3$, que por simplicidad supondremos con fronteras planas (véase la figura 3).

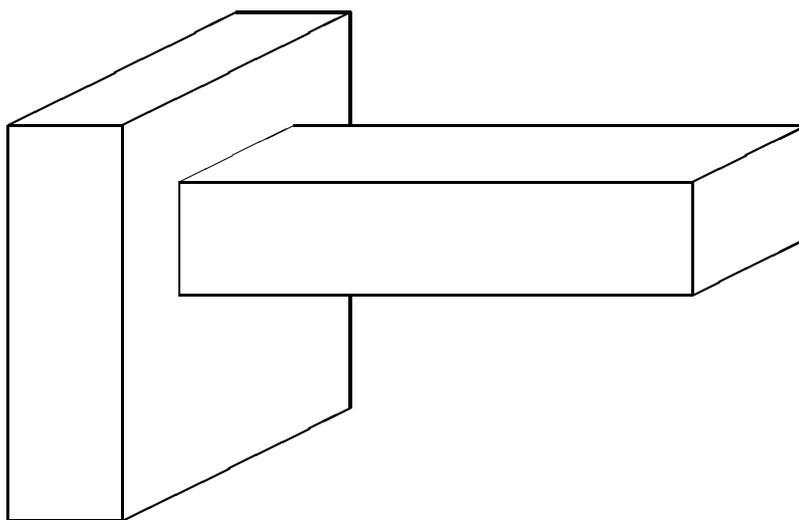


Figura 3: Ejemplo de cuerpo elástico.

En el caso de la elasticidad lineal isótropa se define el *tensor de deformaciones* como

$$\epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (290)$$

(donde, siguiendo la notación usualmente empleada en elasticidad, $\partial_j u_i$ representa la derivada parcial $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$) y, a partir de dicho tensor y mediante la ley de Hooke generalizada, se define el *tensor de tensiones*

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda \left\{ \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk}(\vec{u}) \right\} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(\vec{u}), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (291)$$

donde λ y μ son las *constantes de Lamé* del material constitutivo.

En la presente teoría la incógnita es un vector (el campo de desplazamientos \vec{u}) solución de un sistema de ecuaciones diferenciales y, por tanto, debemos hacer una generalización de las condiciones de contorno que aparecían, por ejemplo, en el problema estacionario de transmisión de calor (ya que en aquel caso sólo había una ecuación diferencial).

Las condiciones de contorno más habituales son:

- condiciones de contorno de tipo Dirichlet: donde se impone el valor del desplazamiento en una parte Γ_D de la frontera de Ω .

$$\vec{u} = \vec{g}_D \quad \text{sobre } \Gamma_D \quad (292)$$

(este tipo de condiciones se conoce como *empotramiento fuerte*).

- condiciones de contorno de tipo Neumann: donde se impone el valor de la tensión exterior aplicada sobre una parte Γ_N de la frontera de Ω .

$$\sigma(\vec{u})\vec{n} = \vec{g}_N \quad \text{sobre } \Gamma_N \quad (293)$$

donde \vec{n} es el vector exterior unitario normal a la frontera de Ω y donde \vec{g}_N es la densidad superficial de fuerzas ejercida sobre el cuerpo.

- condiciones de contorno de tipo Robin: donde se establece una relación lineal entre el campo de desplazamientos y la tensión aplicada sobre una parte Γ_R de la frontera de Ω .

$$\sigma(\vec{u})\vec{n} = \kappa \vec{u} \quad \text{sobre } \Gamma_R \quad (294)$$

(este tipo de condiciones de contorno son las menos frecuentes en la práctica).

Formulación fuerte

Sea $\Omega \subset R^3$ un abierto de frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Tenemos que encontrar la función vectorial $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ (el campo de desplazamientos) definida en cada punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ del dominio Ω que satisface el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$-\sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}(\vec{u}) = f_i \quad \text{en } \Omega, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (295)$$

que puede escribirse en forma vectorial como

$$-(\lambda + 2\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{f} \quad (296)$$

o equivalentemente como

$$-(\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \Delta \vec{u} = \vec{f} \quad (297)$$

(puesto que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}$ para todo campo vectorial \vec{v} suficientemente regular).

A este sistema de ecuaciones hay que añadir las condiciones de contorno adecuadas. Nosotros consideraremos por simplicidad:

$$\text{(Dirichlet)} \quad \vec{u} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (298)$$

$$\text{(Neumann)} \quad \sigma(\vec{u})\vec{n} = \vec{g} \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (299)$$

Formulación variacional

Se define el espacio funcional:

$$V = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, 1 \leq i \leq 3 \right\} \quad (300)$$

Multiplicando el sistema (295) por funciones test $\vec{v} \in V$, integrando sobre Ω y utilizando la fórmula de Green y la condición de contorno Neumann (299) se obtiene la formulación débil asociada al problema: Encontrar $\vec{u} \in V$ tal que

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dx + \int_{\Gamma_2} \vec{g} \cdot \vec{v} d\gamma, \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (301)$$

Podemos definir para $\vec{u}, \vec{v} \in V$ la forma bilineal simétrica:

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) \right\} dx \end{aligned} \quad (302)$$

y la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} l(\vec{v}) &= \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dx + \int_{\Gamma_2} \vec{g} \cdot \vec{v} d\gamma \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^3 f_i v_i \right\} dx + \int_{\Gamma_2} \left\{ \sum_{i=1}^3 g_i v_i \right\} d\gamma \end{aligned} \quad (303)$$

donde $\vec{f} \in [L^2(\Omega)]^3$ y $\vec{g} \in [L^2(\Gamma_2)]^3$. Entonces el problema (301) puede escribirse de manera abstracta como:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (304)$$

Por otra parte, podemos definir también la matriz

$$D = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (305)$$

entonces, si representamos (debido a su simetría) los tensores de deformaciones y tensiones en la forma:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (306)$$

la relacion (291) puede escribirse como

$$\sigma(\vec{u}) = D \epsilon(\vec{u}) \quad (307)$$

y de esta manera la forma bilineal a se reduce a

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} [\epsilon(\vec{v})]^t D \epsilon(\vec{u}) dx. \quad (308)$$

De la misma forma, el tensor de deformaciones (290) está relacionado con el campo de desplazamientos a través de un operador de diferenciación

$$\epsilon(\vec{u}) = B \vec{u} \quad (309)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \frac{1}{2}\partial_2 & \frac{1}{2}\partial_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\partial_3 & 0 & \frac{1}{2}\partial_1 \\ 0 & \frac{1}{2}\partial_3 & \frac{1}{2}\partial_2 \end{pmatrix} \quad (310)$$

Así, la forma bilineal a se puede expresar como

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} [B \vec{v}]^t D B \vec{u} dx = \int_{\Omega} [\vec{v}]^t B^t D B \vec{u} dx. \quad (311)$$

Aproximación de la solución mediante el método de los elementos finitos

Sea V_h una aproximación finito-dimensional de V a través de una discretización de Ω en elementos finitos.

El problema aproximado que vamos a resolver consiste en encontrar un elemento $\vec{u}_h \in V_h$ solución del problema discretizado siguiente:

$$a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = l(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in V_h. \quad (312)$$

Un elemento cualquiera $\vec{v}_h \in V_h$ admite la representación $\vec{v}_h = \sum_{i=1}^3 v_h^i \vec{e}_i$, donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es la base canónica de R^3 , esto es,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (313)$$

y donde $v_h^i = \sum_{l=1}^{N_h} v_h^{il} \varphi_l$ siendo φ_l la función escalar de base asociada al nodo l -ésimo. En consecuencia, podemos escribir:

$$\vec{v}_h = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^{N_h} v_h^{il} \varphi_l \vec{e}_i \quad (314)$$

Por tanto, podemos reducir el problema discretizado a encontrar un vector $u_h = \{u_h^q\}_{q=1}^{3N_h}$ (con $q = q(i, l)$ para $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq l \leq N_h$) solución del sistema de ecuaciones lineales

$$K_h u_h = b_h \quad (315)$$

donde la matriz $K_h = (k_{pq}^h)$ y el vector $b_h = (b_p^h)$ pueden calcularse, para $p = p(i, l)$ y $q = q(j, m)$, como:

$$k_{pq}^h = a(\varphi_m \vec{e}_j, \varphi_l \vec{e}_i) = [\vec{e}_i]^t \left\{ \int_{\Omega} [B_l]^t D B_m dx \right\} \vec{e}_j, \quad (316)$$

$$b_p^h = l(\varphi_l \vec{e}_i) = \int_{\Omega} \varphi_l f_i dx + \int_{\Gamma_2} \varphi_l g_i d\gamma, \quad (317)$$

donde

$$B_r = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_r & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 \varphi_r & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \varphi_r \\ \frac{1}{2} \partial_2 \varphi_r & \frac{1}{2} \partial_1 \varphi_r & 0 \\ \frac{1}{2} \partial_3 \varphi_r & 0 & \frac{1}{2} \partial_1 \varphi_r \\ 0 & \frac{1}{2} \partial_3 \varphi_r & \frac{1}{2} \partial_2 \varphi_r \end{pmatrix}, \quad 1 \leq r \leq N_h. \quad (318)$$

Como es usual, la matriz K_h y el vector b_h se pueden descomponer en la suma de las contribuciones elementales:

$$K_h = \sum_{e=1}^{N_e} K_h^{Te}, \quad (319)$$

$$b_h = \sum_{e=1}^{N_e} b_h^{Te}, \quad (320)$$

donde las *matrices de rigidez elementales* $K_h^{T_e} = (k_{pq}^e)$ y los *vectores de carga elementales* $b_h^{T_e} = (b_p^e)$ se calculan mediante las expresiones

$$k_{pq}^e = [\vec{e}_i]^t \left\{ \int_{T_e} [B_l]^t D B_m dx \right\} \vec{e}_j, \quad (321)$$

$$b_p^e = \int_{T_e} \varphi_l f_i dx + \int_{T_e \cap \Gamma_2} \varphi_l g_i d\gamma, \quad (322)$$

Observaciones sobre la convergencia

Para asegurar la convergencia del método al resultado correcto, varios requerimientos simples deben cumplirse. Obviamente la función desplazamiento discreta debe representar la distribución de los verdaderos desplazamientos de la forma más aproximada posible. Puede probarse que esto no es así, por ejemplo, si las funciones elegidas son tales que permiten deformaciones en el caso de movimientos rígidos. Por ello debemos imponer los siguientes criterios:

- **Criterio 1:** La función de desplazamiento elemental elegida debe ser tal que no permita la deformación de un elemento cuando los desplazamientos nodales sean causados por un movimiento rígido.
- **Criterio 2:** La función de desplazamiento debe ser elegida de tal forma que si los desplazamientos nodales son compatibles con una condición de deformación constante, tal deformación constante debe ser obtenida de hecho.

(Este criterio incluye el anterior como caso particular cuando los desplazamientos son nulos. Estrictamente, ambos criterios deberían verificarse cuando el tamaño de los elementos tiende a cero. Sin embargo, la imposición de estos criterios a elementos de tamaño finito conduce a una mejora en la aproximación).

- **Criterio 3:** La función de desplazamiento debe elegirse de forma que las deformaciones en la unión entre elementos sean finitas (aunque puedan ser indeterminadas).

Los elementos que se pueden utilizar son los elementos conformes ya estudiados en temas anteriores: elementos simpliciales, elementos rectangulares, elementos reducidos. . . Pero debe tenerse en cuenta que los elementos simpliciales más sencillos son en general insatisfactorios. Para los problemas prácticos, donde a menudo existen direcciones privilegiadas debido a las relaciones geométricas, los elementos simpliciales de orden superior y los rectangulares han demostrado ser más eficientes.

Elementos no conformes: el "patch test"

En algunos casos es difícil encontrar funciones de desplazamiento para un elemento que sean automáticamente continuas a lo largo de la unión de elementos adyacentes, lo cual lleva al uso de elementos finitos no conformes. Estas discontinuidades podrían causar deformaciones

infinitas en las uniones (un factor ignorado en la formulación presentada a causa de que la contribución de la energía se limita a los elementos).

A pesar de ello, si al hacer tender a cero el tamaño del elemento, la continuidad se restaura, la formulación obtenida con estos elementos no conformes puede acercarse a la respuesta correcta. Esta condición se cumple siempre que una condición de deformación constante asegure automáticamente la continuidad de los desplazamientos y se verifique el Criterio 2 anterior.

Para ver que tal continuidad se alcanza en cualquier malla cuando se usan elementos no conformes, es necesario imponer sobre una "parcela" (*patch*) arbitraria de elementos los desplazamientos nodales correspondientes a un estado de deformación constante. Si el equilibrio nodal se obtiene simultáneamente sin la imposición de fuerzas externas y si se alcanza un estado de tensiones constantes, entonces claramente no hay pérdidas de energía a través de las discontinuidades entre los elementos.

Para los elementos que pasan esta "prueba de la parcela" (*patch test*) habrá convergencia, e incluso en algunos casos estos elementos no conformes presentan mejores propiedades que los conformes.

Ejemplo de elemento no conforme

El elemento finito no conforme más sencillo en dimensión $n = 2$ es el *elemento de Crouzeix-Raviart* (también llamado elemento P_1 no conforme). Los elementos finitos son triángulos y los tres nodos son los puntos medios de los lados. El espacio de elementos finitos X_h viene dado por

$$X_h = \{v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \tau_h, v_h \text{ continua en los nodos.}\} \quad (323)$$

(Nótese que las funciones no son necesariamente continuas en los lados completos, solamente en los puntos medios. Por tanto, las funciones no serán, en general, continuas en todo el dominio, sino continuas a trozos con discontinuidades de salto en los lados de la triangulación).

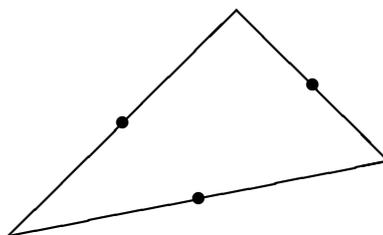


Figura 4: Triángulo de Crouzeix-Raviart

El efecto de "locking"

El concepto de *locking* es usado a menudo en Ingeniería para describir el caso en que un cálculo de elementos finitos produce desplazamientos significativamente más pequeños que los que deben ser.

Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de materiales que son casi incompresibles (como la goma). En este caso, es necesaria una gran cantidad de energía para producir un pequeño cambio en la densidad. Esto se traduce en una gran diferencia entre las constantes de Lamé $\lambda \gg \mu$.

La forma bilineal $a(\vec{u}, \vec{v})$ en la formulación variacional es continua y $H^1(\Omega)$ -elíptica, esto es,

$$\alpha \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2 \leq a(\vec{v}, \vec{v}) \leq c \|\vec{v}\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (324)$$

Pero como $\alpha \leq \mu \ll \lambda + \nu \leq c$, entonces el cociente $\frac{c}{\alpha}$ es muy grande.

Este cociente aparece como constante en el Lema de Cea, lo cual conlleva que los errores en la solución aproximada van a ser mucho más grandes que los errores de aproximación. Una forma de evitar este fenómeno es mediante la introducción de un término de penalización.

5.2 Elastodinámica

Vamos a estudiar a continuación el sistema que describe la evolución a lo largo del tiempo de los pequeños desplazamientos (a partir del estado natural) de un cuerpo sólido homogéneo sometido a un sistema de fuerzas volúmicas y superficiales, fijado de manera rígida en una parte de su frontera y del cual son conocidos los desplazamientos y las velocidades en el instante inicial.

Nos centraremos en un ejemplo de sistema de evolución de segundo orden en tiempo y fundamental en las aplicaciones.

Formulación fuerte

Sea como anteriormente $\Omega \subset R^3$ un abierto acotado poliédrico de frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Tenemos que encontrar la función vectorial $\vec{u}(x, t) = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^3$ (el campo de desplazamientos) definida en cada punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ del dominio Ω y en cada tiempo t del intervalo $[0, T]$ solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_{tt} \vec{u} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}(\vec{u}) = f_i \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad 1 \leq i \leq 3, \\ \vec{u} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \sigma(\vec{u}) \vec{n} = \vec{g} \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times (0, T), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \partial_t \vec{u}(0) = \vec{u}_1 \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (325)$$

donde las notaciones ∂_t , ∂_{tt} representan, respectivamente las derivadas parciales respecto del tiempo $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, y donde son conocidas las funciones $\vec{f} : \Omega \times (0, T) \rightarrow R^3$, $\vec{g} : \Gamma_2 \times (0, T) \rightarrow R^3$, $\vec{u}_0 : \Omega \rightarrow R^3$ y $\vec{u}_1 : \Omega \rightarrow R^3$. Suponemos por simplicidad que la densidad del cuerpo es una constante positiva, esto es, $\rho(x) = \rho_0 > 0$, $\forall x \in \Omega$. También suponemos, como en el caso estacionario, que el tensor de tensiones viene dado (a través de las constantes de Lamé) por la ley de comportamiento:

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda \left\{ \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk}(\vec{u}) \right\} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(\vec{u}), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (326)$$

Formulación débil

Se considera de nuevo el espacio funcional:

$$V = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, 1 \leq i \leq 3 \right\} \quad (327)$$

Dados $\vec{f} \in [L^2(\Omega \times (0, T))]^3$, $\vec{g} \in [L^2(\Gamma_2 \times (0, T))]^3$, $\vec{u}_0 \in V$, $\vec{u}_1 \in [L^2(\Omega)]^3$, se busca una función $\vec{u} \in C^0(0, T; V) \cap C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \partial_{tt} \vec{u}(t) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}(t)) \epsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx = \int_{\Omega} \vec{f}(t) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \vec{g}(t) \cdot \vec{v} \, d\gamma, \quad \forall \vec{v} \in V, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \\ \partial_t \vec{u}(0) = \vec{u}_1. \end{array} \right. \quad (328)$$

Si denotamos, para $\vec{u}, \vec{v} \in V$, la forma bilineal simétrica:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{ij}(\vec{v}) \, dx \quad (329)$$

la aplicación lineal:

$$l(t)(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{f}(t) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \vec{g}(t) \cdot \vec{v} \, d\gamma \quad (330)$$

y el producto escalar en $[L^2(\Omega)]^3$:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx \quad (331)$$

entonces el problema puede escribirse como

$$\begin{cases} \rho \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{u}(t), \vec{v} \rangle + a(\vec{u}(t), \vec{v}) = l(t)(\vec{v}), & \forall \vec{v} \in V \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \\ \frac{d}{dt} \vec{u}(0) = \vec{u}_1. \end{cases} \quad (332)$$

Formulación de Galerkin semidiscreta

Introducimos un subespacio V_h de V de dimensión finita N_h y consideramos el problema semidiscreto siguiente: Dados $\vec{u}_{0,h}$ y $\vec{u}_{1,h}$, aproximaciones finito-dimensionales de \vec{u}_0 y \vec{u}_1 , encontrar una función $\vec{u}_h : t \in [0, T] \rightarrow V_h$ solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \rho \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{u}_h(t), \vec{v}_h \rangle + a(\vec{u}_h(t), \vec{v}_h) = l(t)(\vec{v}_h), & \forall \vec{v}_h \in V_h \\ \vec{u}_h(0) = \vec{u}_{0,h}, \\ \frac{d}{dt} \vec{u}_h(0) = \vec{u}_{1,h}. \end{cases} \quad (333)$$

Introducimos, como en el apartado anterior, una base $\{\varphi_l \vec{e}_i\}_{1 \leq l \leq N_h, 1 \leq i \leq 3}$ del espacio V_h . Entonces buscamos la solución u_h de la forma:

$$\vec{u}_h(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^{N_h} u_h^{il}(t) \varphi_l \vec{e}_i \quad (334)$$

Con un abuso de notación, llamamos también u_h al vector de R^{3N_h} de componentes $(u_h^{il}(t))$ y así el problema variacional semidiscreto (333) se escribe de la forma

$$M_h \frac{d^2}{dt^2} u_h(t) + K_h u_h(t) = b_h(t) \quad (335)$$

donde la *matriz de masa* $M_h = (m_{pq}^h)$, la *matriz de rigidez* $K_h = (k_{pq}^h)$ y el *vector de carga* $b_h(t) = (b_p^h(t))$ vienen dados, para $p = p(i, l)$ y $q = q(j, m)$, por las expresiones:

$$m_{pq}^h = \rho \langle \varphi_m \vec{e}_j, \varphi_l \vec{e}_i \rangle = [\vec{e}_i]^t \left\{ \int_{\Omega} \rho \varphi_m \varphi_l dx \right\} \vec{e}_j, \quad (336)$$

$$k_{pq}^h = a(\varphi_m \vec{e}_j, \varphi_l \vec{e}_i) = [\vec{e}_i]^t \left\{ \int_{\Omega} [B_l]^t D B_m dx \right\} \vec{e}_j, \quad (337)$$

$$b_p^h(t) = l(t)(\varphi_l \vec{e}_i) = \int_{\Omega} \varphi_l f_i(t) dx + \int_{\Gamma_2} \varphi_l g_i(t) d\gamma, \quad (338)$$

A continuación habrá que resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Para ello consideraremos un método de discretización en tiempo del sistema diferencial.

Discretización total de problemas de orden 2 en tiempo: método de Newmark

Consideremos en primer lugar el problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\begin{cases} y''(t) = \Phi(t, y(t), y'(t)), & 0 \leq t \leq T, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = z_0, \end{cases} \quad (339)$$

donde $\Phi : [0, T] \times R \times R \rightarrow R$ es una función continua y donde y_0, z_0 son dos números reales dados.

Para resolver numéricamente este problema se introduce un paso de tiempo $\Delta t = \frac{T}{N}$ (donde N es un número natural) y una partición uniforme del intervalo $[0, T]$:

$$t_n = n \Delta t, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (340)$$

Se intentará entonces calcular para todo $n = 1, 2, \dots, N$ una aproximación (y_n, z_n) del par $(y(t_n), y'(t_n))$.

Un método muy utilizado para ello es el método de Newmark, que se basa en que toda solución suficientemente regular de la ecuación (339) admite el desarrollo:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + (\Delta t)^2 \left\{ \beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) y''(t_n) \right\} + O((\Delta t)^3) \quad (341)$$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \Delta t \left\{ \gamma y''(t_{n+1}) + (1 - \gamma) y''(t_n) \right\} + O((\Delta t)^2) \quad (342)$$

donde β y γ son parámetros reales.

El método de Newmark consiste entonces en reemplazar la ecuación diferencial (339) por el esquema en diferencias finitas de primer orden:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t z_n + (\Delta t)^2 \left\{ \beta \Phi_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Phi_n \right\}, \quad (343)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t \left\{ \gamma \Phi_{n+1} + (1 - \gamma) \Phi_n \right\}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (344)$$

siendo $\Phi_m = \Phi(t_m, y_m, z_m)$ para cada $m = 0, 1, \dots, N$.

En cada paso será, en general, necesario resolver un sistema no lineal para determinar (y_{n+1}, z_{n+1}) a partir del par (y_n, z_n) , salvo cuando $\beta = \gamma = 0$, en cuyo caso el esquema es explícito. Sin embargo, las exigencias de estabilidad del esquema impondrán que se debe tomar $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

Cuando Φ no depende de y' (lo que ocurrirá en nuestro ejemplo) se puede eliminar z_n de las ecuaciones y así el esquema en diferencias finitas se reduce a la ecuación de segundo orden:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = (\Delta t)^2 \left\{ \beta \Phi_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \Phi_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) \Phi_n \right\}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (345)$$

que es un esquema explícito para el caso $\beta = 0$.

El método de Newmark da una aproximación de orden 1 para $\gamma \neq \frac{1}{2}$ y de orden 2 para $\gamma = \frac{1}{2}$. Además, es incondicionalmente estable siempre que $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$.

Aplicaremos entonces el método de Newmark a la resolución de nuestro sistema diferencial de segundo orden

$$\begin{cases} M_h u_h''(t) + K_h u_h(t) = b_h(t), \\ u_h(0) = u_{0,h}, \\ u_h'(0) = u_{1,h}. \end{cases} \quad (346)$$

Designaremos por u_h^n los valores aproximados de $u_h(t_n)$. Entonces, teniendo en cuenta que no aparece la derivada primera en el sistema, el esquema quedará de la forma:

$$\begin{aligned} u_h^0 &= u_{0,h}, \\ \frac{1}{(\Delta t)^2} M_h (u_h^1 - u_h^0 - \Delta t u_{h,1}) + K_h \left\{ \beta u_h^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) u_h^0 \right\} &= \beta b_h(t_1) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) b_h(t_0), \\ \frac{1}{(\Delta t)^2} M_h (u_h^{n+2} - 2u_h^{n+1} + u_h^n) + K_h \left\{ \beta u_h^{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) u_h^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) u_h^n \right\} \\ &= \beta b_h(t_{n+2}) + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) b_h(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) b_h(t_n), \quad 0 \leq n \leq N - 2. \end{aligned} \quad (347)$$

Por tanto, en cada paso de tiempo se debe resolver un sistema lineal de la forma:

$$\{ M_h + \beta (\Delta t)^2 K_h \} u_h^{n+2} = \eta^{n+1} \quad (348)$$

donde $\eta^{n+1} \in R^{3N_h}$ es conocido. Por otra parte, dado que $\beta \geq 0$, la matriz simétrica $M_h + \beta (\Delta t)^2 K_h$ es definida positiva, lo cual facilita grandemente la resolución de los sistemas lineales.

5.3 Problemas de cuarto orden: Estudio de una placa empotrada

En el estudio de la elasticidad linealizada ocurre en muchas ocasiones que el cuerpo bajo análisis es tal que algunas de sus dimensiones son mucho más pequeñas que el resto. Podemos pensar, por ejemplo, en el caso de una placa fina rectangular (fig. 5)

$$\Omega = (-a, a) \times (-b, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \text{con } \varepsilon \ll \min\{a, b\}, \quad (349)$$

o en el caso de una viga de sección cuadrada (fig. 6)

$$\Omega = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\ell, \ell), \quad \text{con } \varepsilon \ll \ell. \quad (350)$$

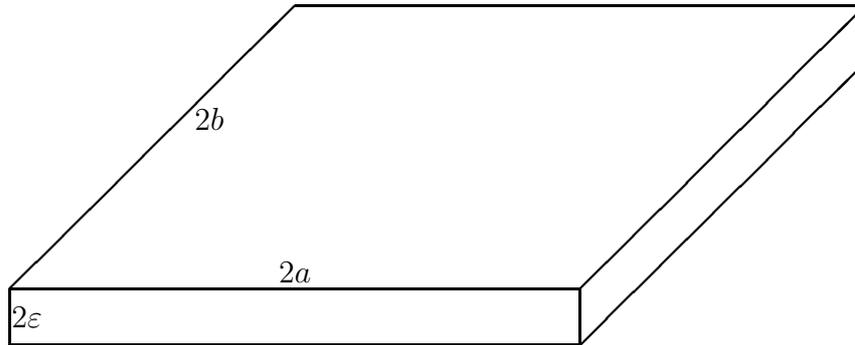


Figura 5: Placa rectangular.

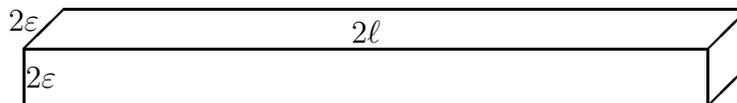


Figura 6: Viga de sección cuadrada.

En estos casos parece más razonable, en vez de trabajar con el dominio tridimensional $\Omega \subset R^3$, utilizar en el estudio de las deformaciones y tensiones el plano medio de la placa $\omega = (-a, a) \times (-b, b) \subset R^2$ o el segmento formado por los centros de masa de las secciones $(-\ell, \ell) \subset R$. De esta manera se pasa de un problema de elasticidad tridimensional a uno

de dimensión inferior. Para ello será necesario imponer una serie de hipótesis relativas a las deformaciones y las tensiones, que nos permitan obtener el modelo en dimensión inferior.

La placa de Kirchhoff-Love

Nos centraremos en el estudio de una placa rectangular $\Omega = (-a, a) \times (-b, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ de pequeño espesor 2ε empotrada a lo largo de su frontera lateral y sometida a una fuerza externa perpendicular al plano medio de densidad F por unidad de área.

Vamos a hacer unas suposiciones sobre la placa, que se conocen como las hipótesis de Kirchhoff-Love:

- Los desplazamientos en la dirección x_3 no dependen de esta variable.
- Los puntos del plano medio se deforman únicamente en la dirección x_3 .
- La tensión normal σ_{33} es nula.
- Los segmentos perpendiculares al plano medio se deforman linealmente, esto es, siguen siendo segmentos rectos, y además continúan permaneciendo ortogonales a la superficie media deformada.

Como consecuencia de estas hipótesis se tiene que el desplazamiento $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ es de la forma:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_1 w(x_1, x_2), \quad (351)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_2 w(x_1, x_2), \quad (352)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2), \quad (353)$$

donde w , que representa la *flexión normal de la placa*, es la solución del problema bilaplaciano de cuarto orden siguiente (recordemos que el laplaciano de una función $v(x_1, x_2)$ se define como $\Delta v \equiv \partial_{11}v + \partial_{22}v$):

$$\begin{cases} \Delta^2 w \equiv \partial_{1111}w + 2\partial_{1122}w + \partial_{2222}w = f & \text{en } \omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\omega, \\ \partial_n w \equiv \vec{\nabla} w \cdot \vec{n} = 0 & \text{sobre } \partial\omega. \end{cases} \quad (354)$$

Si consideramos el espacio $V = H_0^2(\omega)$, este problema admite la formulación variacional siguiente: Encontrar el elemento $w \in V$ tal que

$$a(w, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (355)$$

donde:

$$a(\mathbf{w}, v) = \int_{\omega} \{ \Delta \mathbf{w} \Delta v + (1 - \nu)(2\partial_{12} \mathbf{w} \partial_{12} v - \partial_{11} \mathbf{w} \partial_{22} v - \partial_{22} \mathbf{w} \partial_{11} v) \} dx \quad (356)$$

$$= \int_{\omega} \{ \nu \Delta \mathbf{w} \Delta v + (1 - \nu)(\partial_{11} \mathbf{w} \partial_{11} v + \partial_{22} \mathbf{w} \partial_{22} v + 2\partial_{12} \mathbf{w} \partial_{12} v) \} dx$$

$$l(v) = \int_{\omega} f v dx \quad (357)$$

siendo $F = 2E\varepsilon^3 f/3(1 - \nu^2)$ la *densidad de fuerza por unidad de superficie*, $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ el *módulo de Young*, y $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$ el *coeficiente de Poisson* del material elástico constitutivo de la placa.

Dado que en este caso estamos tratando con un problema de cuarto orden, los elementos finitos de Lagrange no están indicados para su estudio ya que el espacio de elementos finitos asociado X_h está formado por funciones continuas pertenecientes sólo a $H^1(\omega)$, pero no necesariamente a $H^2(\omega)$ (lo cual sería necesario, pues la solución pertenece a este espacio). Por todo ello vamos a introducir una nueva clase de elementos finitos más regulares, los elementos de Hermite.

5.4 Elementos finitos de Hermite

Los *elementos finitos de Hermite* tienen asociado un espacio que satisface la inclusión $X_h \subset C^1(\bar{\omega})$, y que puede por tanto ser usado para resolver problemas de cuarto orden siempre que la inclusión $P_T \subset H^2(T)$, $\forall T \in \tau_h$ también se verifique. En este capítulo vamos a estudiar tres de los elementos finitos de Hermite más sencillos. Nos restringiremos al caso de dimensión $n = 2$ por simplicidad y a la vista de lo comentado en el capítulo previo.

Triángulo de Argyris

Sea T un triángulo de vértices a_i , $1 \leq i \leq 3$. Sean $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$, $1 \leq i < j \leq 3$, los puntos medios de los lados. Se tiene entonces que todo polinomio $p \in P_T = P_5(T)$ está únicamente determinado por los 21 grados de libertad

$$\Sigma_T = \{ p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{11} p(a_i), \partial_{12} p(a_i), \partial_{22} p(a_i), 1 \leq i \leq 3; \\ \partial_n p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3. \} \quad (358)$$

El espacio de elementos finitos X_h asociado al triángulo de Argyris verifica:

$$X_h \subset C^1(\bar{\omega}) \cap H^2(\omega). \quad (359)$$

Triángulo de Bell

En ocasiones será deseable reducir el número de grados de libertad, en concreto los relativos a los puntos medios. Si definimos el espacio $P_T = P'_5(T)$ como:

$$P'_5(T) = \{p \in P_5(T) \mid \partial_n p|_S \in P_3(S) \text{ para cada lado } S \text{ de } T.\} \quad (360)$$

entonces todo polinomio $p \in P'_5(T)$ (debe tenerse en cuenta que $P_4(T) \subset P'_5(T) \subset P_5(T)$) está únicamente determinado por los 18 grados de libertad

$$\Sigma_T = \{p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{11} p(a_i), \partial_{12} p(a_i), \partial_{22} p(a_i), 1 \leq i \leq 3.\} \quad (361)$$

El espacio de elementos finitos X_h asociado al triángulo de Bell también verifica:

$$X_h \subset C^1(\bar{\omega}) \cap H^2(\omega). \quad (362)$$

Rectángulo de Bogner-Fox-Schmit

Sea T un rectángulo de vértices a_i , $1 \leq i \leq 4$. Se verifica que todo polinomio $p \in P_T = Q_3(T)$ (conociendo que $P_3(T) \subset Q_3(T) \subset P_6(T)$) está únicamente determinado por los 16 grados de libertad siguientes

$$\Sigma_T = \{p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{12} p(a_i), 1 \leq i \leq 4.\} \quad (363)$$

Como en los casos anteriores, el espacio de elementos finitos X_h asociado al rectángulo de Bogner-Fox-Schmit cumple que:

$$X_h \subset C^1(\bar{\omega}) \cap H^2(\omega). \quad (364)$$

Estimación del error

Todos los elementos finitos que hemos estudiado para problemas de cuarto orden son conformes (lo que requiere, al menos, elementos de clase 1), aunque es posible también el uso de elementos no conformes. Se puede demostrar que bajo suposiciones muy razonables el orden de aproximación obtenido para la solución mediante estos elementos finitos es suficientemente elevado. Así, puede probarse el siguiente resultado:

Resultado 1: Sea ω un abierto poliédrico de R^2 . Sea $\{\tau_h\}$ una familia regular de triangulaciones de ω asociada a un elemento finito de referencia $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Se supone que existe un entero $k \geq 2$ tal que $P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^2(\hat{T})$. Entonces el método de elementos finitos es convergente de orden $k - 1$, esto es, existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que, si la solución u pertenece a $H^{k+1}(\omega)$ entonces:

$$\|u - u_h\|_{2,\omega} \leq C h^{k-1} |u|_{k+1,\omega} \quad (365)$$

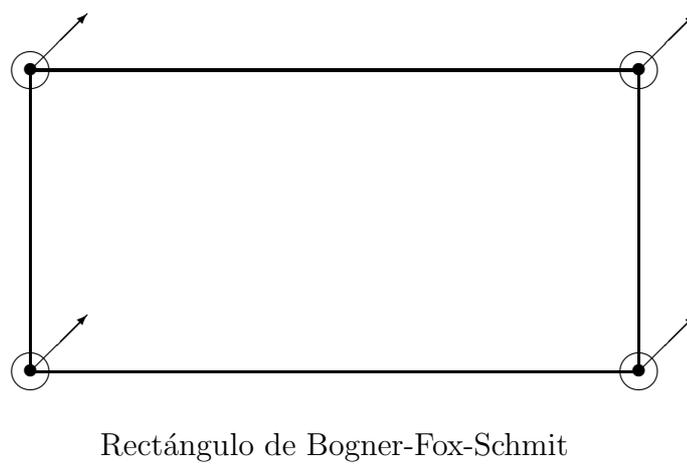
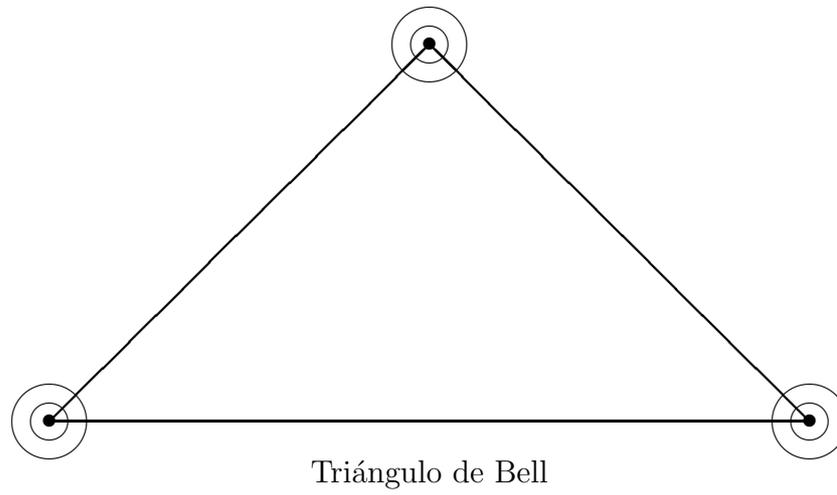
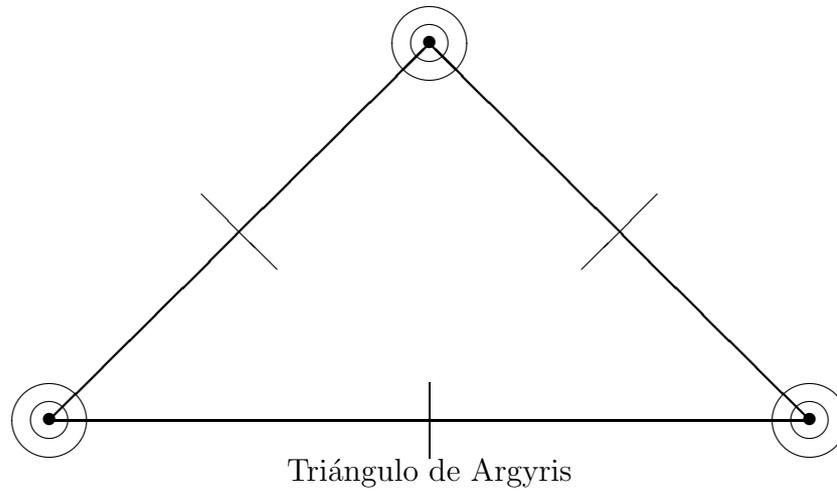


Figura 7: Elementos finitos de Hermite

En la práctica, esto quiere decir que, suponiendo que la solución es suficientemente regular, el triángulo de Argyris es de orden 4, el triángulo de Bell de orden 3 y el rectángulo de Bogner-Fox-Schmit de orden 2.

5.5 Bibliografía

1. Braess, D. *Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
2. Ciarlet, P.G.; Lions, J.L. (Eds.) *Handbook of numerical analysis. Vol. II. Finite element methods (Part 1)*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
3. Hughes, T.J.R. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
4. Strang, G.; Fix, G.J. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

6. El método de elementos finitos en dinámica de fluidos

Sea Ω un abierto de R^n que representa la región ocupada por un fluido, y sea $[0, T]$ un intervalo de tiempo. En este capítulo estamos interesados en el estudio del flujo a lo largo del intervalo de tiempo en torno a un obstáculo o en una región acotada.

De los principios de conservación de la masa y el movimiento se pueden deducir, como ya se vio en el primer capítulo, las distintas ecuaciones que modelan los problemas que aparecen en dinámica de fluidos.

Nosotros centraremos nuestro estudio, en concreto, en la resolución numérica de los siguientes tipos de problemas:

- Problemas de convección-difusión (casos estacionario y evolutivo)
- Problemas de flujos viscosos (ecuaciones de Stokes y de Navier-Stokes)

6.1 Problemas de convección-difusión

Sea $\Omega \subset R^n$, $n = 2$ ó 3 , un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular y sea $[0, T]$ un intervalo de tiempo. Vamos a buscar la solución $\Phi(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, de la ecuación:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\Phi) - \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}\Phi) + a\Phi = f. \quad (366)$$

Este problema puede interpretarse de la siguiente forma: El dominio Ω está ocupado por un fluido en movimiento cuya velocidad $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$ es conocida. La función $\Phi = \Phi(x, t)$ es una magnitud (temperatura, concentración de una determinada sustancia, etc.) que es “transportada” por el flujo y que está sujeta a un proceso de disipación y difusión (siendo $a \geq 0$ y $\nu \geq 0$ los coeficientes de disipación y difusión, respectivamente).

Por simplicidad supondremos que $a = 0$, lo que ocurre en muchos ejemplos. Sin embargo, todo lo que sigue se aplica al caso general $a \geq 0$. Por ejemplo, cuando a es constante se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{at}\Phi) = e^{at}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + a\Phi\right) \quad (367)$$

de forma que un cambio de variable nos devuelve al caso $a = 0$.

En general ν es pequeño en comparación con UL (siendo U una velocidad característica y L una longitud característica del proceso), lo que lleva a la aparición de capas límite y a la inestabilidad de los esquema numéricos centrados. Para explicar esto con más detalle vamos a considerar un ejemplo estacionario en dimensión 1.

Caso estacionario unidimensional

Consideramos el problema de contorno con velocidad constante $u = 1$ y coeficiente de difusión $0 < \nu < 1$ siguiente:

$$\begin{cases} -\nu \Phi''(x) + \Phi'(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ \Phi(0) = 1, \\ \Phi(1) = 0. \end{cases} \quad (368)$$

La solución exacta de este problema está dada por la expresión

$$\Phi(x) = (1 - e^{-\frac{1}{\nu}})^{-1} (1 - e^{-\frac{1-x}{\nu}}) \quad (369)$$

Para ν pequeño, Φ es aproximadamente igual a 1 excepto en una capa en $x = 1$ de anchura $O(\nu)$ donde Φ decae de 1 a 0 (*capa límite*).

Elegimos para la discretización elementos finitos P_1 continuos, esto es, tomamos una partición $\{x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_N = 1\}$ del intervalo $[0, 1]$, siendo $h = x_i - x_{i-1}$, para $i = 1, \dots, N$. De esta forma obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para los valores de la aproximación por elementos finitos $\Phi_i = \Phi_h(x_i) \simeq \Phi(x_i)$:

$$\begin{cases} -\frac{\nu}{h^2} [\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}] + \frac{1}{2h} [\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}] = 0, & i = 1, \dots, N-1, \\ \Phi_0 = 1, \\ \Phi_N = 0. \end{cases} \quad (370)$$

(Este esquema también puede verse como un esquema de diferencias finitas con una aproximación en diferencias centrales para el término convectivo). Si N es impar y ν es muy pequeño la solución esta cercana a 1 para i par y cercana a 0 para i impar, lo que produce una solución que oscila en todo el dominio y no está próxima a la solución exacta. En resumen, el método de Galerkin produce una solución oscilante si $2\nu < h$.

El remedio para esta situación es bien conocido en el marco de las diferencias finitas y consiste en utilizar una discretización descentrada del término convectivo

$$\Phi'(x_i) \simeq \frac{1}{h} [\Phi_i - \Phi_{i-1}] \quad (371)$$

o de manera más general, pueden ponderarse las discretizaciones centrada y descentrada, lo que lleva al esquema siguiente:

$$\begin{cases} -\frac{\nu}{h^2}[\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}] + \frac{\alpha}{2h}[\Phi_i - \Phi_{i-1}] + \frac{1-\alpha}{2h}[\Phi_{i+1} - \Phi_i] = 0, \\ \Phi_0 = 1, \\ \Phi_N = 0. \end{cases} \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (372)$$

donde $\alpha \geq 0$ es un parámetro. La solución de este problema no presenta oscilaciones si $\alpha \geq 0$, $2\nu > h$ o bien si $2\nu \leq h$, $\alpha > 1 - \frac{2\nu}{h}$. En particular, nunca se obtiene oscilación para $\alpha = 1$, es decir, para el esquema completamente descentrado.

Nótese que este esquema ponderado puede reescribirse en la forma

$$-\left(\frac{\nu}{h^2} + \frac{\alpha}{2h}\right)[\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}] + \frac{1}{2h}[\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}] = 0, \quad (373)$$

esto es, el uso de una discretización descentrada se traduce en la introducción de una viscosidad artificial. Lo que tratamos de hacer es generalizar este descentrado en el marco de los elementos finitos.

Una primera idea es utilizar un espacio de funciones test diferente del de las funciones de forma φ_i correspondientes a los elementos P_1 , que verificaban $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j$.

Se construyen entonces, para $\alpha \geq 0$ dado, las funciones $\tilde{\varphi}_i^\alpha$ dadas por:

$$\tilde{\varphi}_i^\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) + \alpha g\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right), & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \varphi_i(x) - \alpha g\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right), & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (374)$$

donde g es una función positiva en $[0, 1]$ y tal que $g(0) = g(1) = 0$, $\int_0^1 g(y) dy = \frac{1}{2}$. (Por ejemplo, se puede tomar $g(y) = 3y(1-y)$.) Entonces se define \tilde{V}_h como el espacio generado por las funciones $\tilde{\varphi}_i^\alpha$. Obsérvese que, de esta forma, las funciones de base φ_i son descentradas dando más peso al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Es inmediato verificar que con esta elección de \tilde{V}_h y para una discretización uniforme de paso h del intervalo $[0, 1]$, al hacer la formulación de elementos finitos se recupera el esquema (372).

Convección estacionaria

Las conclusiones del modelo sencillo anterior se pueden extender al caso general estacionario en el que se prueba que aparecen oscilaciones si se tiene que $\nu < \frac{Uh}{2}$, es decir, siempre que

ν sea muy pequeño.

Las razones de este comportamiento proceden de las propiedades de las ecuaciones en derivadas parciales, pues cuando ν se hace igual a cero, de un problema de naturaleza elíptica:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\Phi) - \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi) = f \quad \text{en } \Omega. \quad (375)$$

pasamos a uno de carácter hiperbólico:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\Phi) = f \quad \text{en } \Omega. \quad (376)$$

donde las condiciones de contorno sólo pueden imponerse en la parte de la frontera donde el fluido entra:

$$\Phi = g \quad \text{sobre } \Gamma^- = \{x \in \partial\Omega \mid \vec{u}(x) \cdot \vec{n}(x) < 0\} \quad (377)$$

Si denotamos el resto de la frontera como $\Gamma^+ = \partial\Omega \setminus \Gamma^-$, la formulación variacional para el problema estacionario de convección pura (376)-(377) puede escribirse como: Encontrar $\Phi \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \Phi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w \, dx = \int_{\Gamma^-} g \vec{u} \cdot \vec{n} w \, d\gamma - \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega) \mid w|_{\Gamma^+} = 0. \quad (378)$$

Con regularidad suficiente de los datos es posible obtener una solución explícita utilizando las *curvas características*: Dado un punto x se define la curva característica que parte de x como la solución $X(x; s)$ de la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \frac{dX(x; s)}{ds} = \vec{u}(X(x; s)), \\ X(x; 0) = x. \end{cases} \quad (379)$$

(La función $X(x; s)$ da la posición en el instante de tiempo s de la partícula que ha sido transportada por el flujo de velocidad \vec{u} y que en el tiempo 0 ocupaba la posición x). Entonces, la solución Φ puede calcularse como

$$\Phi(x) = g(X(x; s_-)) e^{-\int_{s_-}^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(X(x; s)) \, ds} + \int_{s_-}^0 f(X(x; s)) e^{-\int_s^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(X(x; t)) \, dt} \, ds \quad (380)$$

donde $X(x; s_-)$ es la intersección de la curva característica $\{X(x; s) \mid s < 0\}$ con la parte de frontera Γ^- .

De esta forma, el valor de la solución a lo largo de la curva característica es independiente de lo que ocurre en el resto del dominio. En consecuencia, si las curvas características que parten de Γ^- cubren todo el dominio Ω , la solución es única.

Otro fenómeno que también puede ocurrir es la aparición de discontinuidades en la solución. La existencia de una discontinuidad en la condición de contorno no impide la existencia de

solución, aunque dicha discontinuidad se propagará a lo largo de la característica que parte del punto donde se encuentra la discontinuidad inicial.

Cuando $\nu > 0$ se hace muy pequeño con respecto a la magnitud de \vec{u} , la solución de la ecuación de convección-difusión se aproxima a la de la ecuación hiperbólica. Entonces, si las condiciones de contorno que se imponen en Γ^+ son muy diferentes de los resultados que se obtendrían en dicho trozo de frontera con $\nu = 0$ aparecen capas límites: la solución para $\nu > 0$ es aproximadamente la solución para $\nu = 0$ en todo el dominio salvo en una franja de pequeño espesor alrededor de Γ^+ , donde cambia bruscamente para satisfacer la condición de contorno.

Para evitar estos problemas se buscan esquemas numéricos adecuados sin tener que recurrir a la reducción de tamaño de h (por su alto coste computacional). Una propiedad esencial del problema hiperbólico es que la solución en un punto depende de lo que ocurre “aguas arriba” y, en consecuencia, parece razonable elegir esquemas que privilegien ciertas direcciones. Esta solución ya se conoce en el marco de las diferencias finitas, en las que el uso de los esquemas descentrados evita la aparición de oscilaciones independientemente del valor de h . Lo que sí ocurre es una pérdida de precisión en la aproximación que, en realidad, es equivalente a la introducción de un término de difusión adicional (conocida como *viscosidad artificial* debida a la discretización).

Volviendo al caso de los elementos finitos, la obtención de esquemas válidos pasa por el uso de técnicas de descentrado que privilegien la dirección “aguas arriba” (*upwind*) al mismo tiempo que se intenta evitar que dichas técnicas añadan demasiada viscosidad artificial.

Esquema 1: Características

Se puede proponer el siguiente esquema: Se considera una triangulación τ_h de Ω con vértices $\{q_i\}_{i=1}^{N_h}$, y a continuación:

1. \vec{u} se aproxima por \vec{u}_h (elementos P_1 conformes) a partir de sus valores en los vértices.
2. Las características $\{X(q_i; \cdot)\}_{i=1}^{N_h}$ que se originan en los vértices se aproximan por líneas poligonales

$$X_h(q_i) = \bigcup_k [\xi^k, \xi^{k+1}] \quad (381)$$

donde $\xi^0 = q_i$ y ξ^{k+1} es la intersección de la semirrecta $\{\xi^k - s\vec{u}_h(\xi^k)\}_{s>0}$ con la frontera del elemento que contiene a ξ^k y a $\xi^k - \epsilon\vec{u}_h(\xi^k)$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

3. Se evalúa $\Phi(q_i)$ por la fórmula explícita.
4. Se construye Φ_h a partir de los valores en los vértices $\{\Phi(q_i)\}_{i=1}^{N_h}$ por interpolación P_1 .

La estimación de error que se obtiene en este caso es

$$\sup_{x \in \Omega} |\Phi(x) - \Phi_h(x)| \leq C h \quad (382)$$

donde la constante C sólo depende de las normas de \vec{u} , f y g , y del diámetro de Ω .

Este esquema es preciso, pero bastante costoso, pues han de calcularse las características partiendo de todos los vértices de la triangulación.

Observación sobre el cálculo de $X_h(q_i)$

Para calcular la sucesión de puntos $\{\xi^k\}$ un buen algoritmo es usar las coordenadas baricéntricas $\{\lambda_j^k\}_{j=1}^{n+1}$ de ξ^k y descomponer $\vec{u}_h(\xi^k)$ en una suma en los $n + 1$ vértices q_j del elemento en que se encuentra ξ^k

$$\vec{u}_h(\xi^k) = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j^k q_j, \quad \text{tal que } \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j^k = 0. \quad (383)$$

Entonces, se define

$$\xi^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j^{k+1} q_j \quad (384)$$

donde $\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + \rho \mu_j^k$, con ρ tal que:

$$\lambda_j^{k+1} \geq 0, \quad \prod_{j=1}^{n+1} \lambda_j^{k+1} = 0. \quad (385)$$

De esta forma, una de las coordenadas baricéntricas de ξ^{k+1} es nula, lo cual indica que está sobre uno de las caras del elemento.

Esquema 2: Descentrado por discretización de la derivada total

Recordemos que una formulación débil del problema estacionario de convección pura (376)-(377) puede escribirse como: Encontrar $\Phi \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \Phi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w \, dx = \int_{\Gamma^-} g \vec{u} \cdot \vec{n} w \, d\gamma - \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega) \mid w|_{\Gamma^+} = 0. \quad (386)$$

Sean $T_{\delta}^{\pm}(\Omega)$ las traslaciones de Ω por δ en la dirección $\pm \vec{u}$, esto es,

$$T_{\delta}^{\pm}(\Omega) = \{x \pm \delta \vec{u}(x) \mid x \in \Omega\} \quad (387)$$

Para construir el esquema se consideran las siguientes aproximaciones:

$$\vec{u}(x) \cdot \vec{\nabla} w(x) \simeq \frac{1}{\delta} [w(x + \delta \vec{u}(x)) - w(x)], \quad (388)$$

$$\int_{\Omega \setminus [\Omega \cap T_\delta^-(\Omega)]} \psi \, dx = \int_{\Gamma^+} \psi \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\gamma + O(\delta). \quad (389)$$

De esta forma podemos aproximar el problema variacional (386) en el espacio W_h de funciones P_1 a trozos, continuas en la triangulación de Ω por el problema: Encontrar Φ_h tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_h w_h \, dx &- \int_{\Omega \setminus [\Omega \cap T_\delta^-(\Omega)]} \Phi_h(x) w_h(x + \delta \vec{u}(x)) \, dx = \delta \int_{\Omega} f w_h \, dx \\ &- \delta \int_{\Gamma^-} g \vec{u} \cdot \vec{n} w_h \, d\gamma, \quad \forall w_h \in W_h \mid w_h|_{\Gamma^+} = 0. \end{aligned} \quad (390)$$

(También puede modificarse el esquema para que las condiciones de contorno se cumplan de forma fuerte).

Estos esquemas, por ejemplo para el caso \vec{u} constante, dan una aproximación de orden $O(\delta + \frac{h^2}{\delta})$, pero presentan el problema de ser, en general, muy difusivos.

Esquema 3: Difusión en las líneas de corriente (SUPG)

Consideramos de nuevo el problema de convección pura (376)-(377). Se define el espacio \tilde{W}_h de funciones P_1 a trozos, continuas en la triangulación de Ω y nulas sobre Γ^- . Entonces el problema se transforma en: Encontrar Φ_h tal que $\Phi_h - g \in \tilde{W}_h$ y satisface

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi_h) [w_h + h \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} w_h)] \, dx = \int_{\Omega} f [w_h + h \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} w_h)] \, dx, \quad \forall w_h \in \tilde{W}_h. \quad (391)$$

La idea del método consiste en descentrar las funciones de base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ añadiendo el término $h \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \varphi_i$, lo cual da más peso “aguas arriba”. De esta forma se reemplaza la formulación de Galerkin simétrica

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi_h) \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx, \quad \forall i = 1, \dots, N_h, \quad (392)$$

por una formulación no simétrica de tipo Galerkin generalizado

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi_h) [\varphi_i + h \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \varphi_i)] \, dx = \int_{\Omega} f [\varphi_i + h \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \varphi_i)] \, dx, \quad \forall i = 1, \dots, N_h, \quad (393)$$

Por otra parte, puede comprobarse que el esquema es la aproximación del problema

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi) - h \vec{u} \cdot \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi)] = f - h \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f \quad (394)$$

que, cuando \vec{u} es constante, se convierte en

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\Phi) - h \vec{\nabla} \cdot [(\vec{u} \otimes \vec{u}) \vec{\nabla} \Phi] = f - h \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f \quad (395)$$

con lo que se ha añadido una viscosidad tensorial $h \vec{u} \otimes \vec{u}$ al problema de partida. Esta viscosidad sólo actúa en la dirección del flujo, lo cual es adecuado para que no se produzca una difusión excesiva.

Este esquema es estable y su orden de convergencia en norma $L^2(\Omega)$ es $O(h^{\frac{3}{2}})$.

Esquema 4: Descentrado por discontinuidad

Si Φ se aproxima por funciones polinómicas a trozos que son discontinuas en las caras de los elementos, puede introducirse un esquema descentrado utilizando las integrales sobre las caras. En el caso del problema de convección pura (376)-(377) buscaremos Φ_h en un espacio de funciones polinómicas a trozos, pero no necesariamente continuas en la triangulación τ_h de Ω , esto es:

$$\hat{W}_h = \{w_h \mid w_h|_T \in P^k, \forall T \in \tau_h\} \quad (396)$$

El problema se puede aproximar entonces por: Encontrar Φ_h tal que

$$\int_T \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\Phi_h) w_h dx - \int_{\partial T^-} \vec{u} \cdot \vec{n} [\Phi_h] w_h d\gamma = \int_T f w_h dx, \quad \forall w_h \in \hat{W}_h, \forall T \in \tau_h, \quad (397)$$

donde \vec{n} es la normal unitaria exterior a ∂T , donde ∂T^- es la parte de ∂T en la cual $\vec{u} \cdot \vec{n} < 0$, y donde el salto de discontinuidad de Φ_h se define como:

$$[\Phi_h](x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{\Phi_h(x + \epsilon \vec{u}(x)) - \Phi_h(x - \epsilon \vec{u}(x))\}, \quad \forall x \in \partial T \quad (398)$$

(En el caso en que ∂T interseca a Γ^- el convenio es que $\Phi_h = g$ en el otro lado de ∂T , esto es, $\Phi_h(x - \epsilon \vec{u}(x)) = g(x)$ cuando $x \in \Gamma^-$).

Señalemos que, si la solución Φ es continua, se espera que Φ_h tienda a una función continua cuando h se hace muy pequeño, pues el término que se añade a la formulación débil estándar es pequeño. Para $\nu > 0$, sin embargo, el método no puede ser aplicado directamente ya que para tratar el término de difusión es necesario que las funciones de base sean continuas.

Puede probarse que este esquema tiene convergencia de orden $O(h^{k+\frac{1}{2}})$ en norma $L^2(\Omega)$. Este orden puede incrementarse a $O(h^{k+1})$ siempre que la triangulación sea uniforme en la dirección del flujo.

Problemas evolutivos de convección-difusión

Vamos a estudiar ahora la resolución numérica del problema de convección-difusión evolutivo que planteábamos a principio del capítulo.

Consideramos la ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi) - \vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla} \Phi) + a \Phi = f \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0(x) \quad \text{en } \Omega, \\ \Phi = g \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \end{array} \right. \quad (399)$$

y como en la mayor parte de las aplicaciones ν es pequeño (convección dominante) buscaremos esquemas que funcionen bien incluso cuando $\nu = 0$. Por simplicidad supondremos que $g = 0$ (condición Dirichlet homogénea).

Consideramos el espacio funcional $V = H_0^1(\Omega)$ y definimos, para $\Phi, w \in V$, la aplicación

$$a(\Phi, w) = \int_{\Omega} \{ \nu \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} w - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w \Phi + a \Phi w \} dx \quad (400)$$

entonces una formulación débil o variacional del problema es: Dados $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $\Phi_0 \in L^2(\Omega)$, $\vec{u} \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$, encontrar $\Phi \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \Phi(t), w \rangle + a(\Phi(t), w) = \langle f(t), w \rangle, \quad \forall w \in V, \\ \Phi(0) = \Phi_0. \end{array} \right. \quad (401)$$

Podemos considerar a continuación la siguiente formulación semidiscreta del problema anterior: Encontrar Φ_h tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \Phi_h(t), w_h \rangle + a(\Phi_h(t), w_h) = \langle f(t), w_h \rangle, \quad \forall w_h \in W_h, \\ \Phi_h(0) = \Phi_{0,h}, \end{array} \right. \quad (402)$$

donde $W_h \subset V$ es un espacio de elementos finitos adecuados.

Comenzaremos introduciendo una familia de esquemas en diferencias finitas en tiempo y comentando sus propiedades de estabilidad.

Discretización en tiempo por θ -esquemas

En este caso la elección de W_h debe hacerse con cuidado. La utilización del espacio de funciones continuas, P_1 a trozos sobre una triangulación de Ω no es satisfactoria cuando la convección es dominante, pues la solución es altamente oscilante a menos que el parámetro de discretización h sea del orden de ν . Es más adecuado en este caso el uso de un espacio W_h que incorpore implícitamente el descentrado.

Se divide el intervalo $[0, T]$ en subintervalos de igual longitud $[t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, \dots, N-1$, con $\Delta t = \frac{T}{N}$ y $t_n = n\Delta t$, $\forall n = 0, \dots, N$. Denotaremos por $\Phi^n(x)$ una aproximación de $\Phi(x, n\Delta t)$. Entonces, utilizando el θ -esquema para la discretización en tiempo, obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \langle \Phi_h^{n+1} - \Phi_h^n, w_h \rangle + a(\theta \Phi_h^{n+1} + (1-\theta) \Phi_h^n, w_h) \\ \quad = \langle \theta f(t_{n+1}) + (1-\theta) f(t_n), w_h \rangle, \quad \forall w_h \in W_h, \\ \Phi_h^0 = \Phi_{0,h}, \end{cases} \quad (403)$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ y $\Phi_{0,h} \in W_h$ es una aproximación del dato inicial Φ_0 . (Recordemos que esta técnica incluye los esquemas clásicos: Euler explícito ($\theta = 0$), Euler implícito ($\theta = 1$) y Crank-Nicolson ($\theta = \frac{1}{2}$).

Si denotamos por $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N_h}$ una base de W_h , entonces en cada paso de tiempo es necesario resolver un sistema lineal asociado a la matriz $A + \theta \Delta t M$, donde $A = (a_{ij})$ y $M = (m_{ij})$ son las matrices definidas como:

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad 1 \leq i, j \leq N_h \quad (404)$$

$$m_{ij} = \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq N_h. \quad (405)$$

Nótese que en el caso de Euler explícito ($\theta = 0$) la matriz no es diagonal, lo cual obliga en cada paso a la resolución completa de un sistema de ecuaciones lineales. Para evitar esto, puede concentrarse la matriz en la diagonal mediante la técnica de “mass lumping”, lo que hace inmediata su resolución.

Vamos a dar a continuación un resultado de estabilidad para los θ -esquemas:

Resultado 1: Supongamos que existen constantes $0 < \mu_0 < \mu_1$ tales que

$$\mu_0 \leq \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi) + a \leq \mu_1 \quad (406)$$

y que la aplicación $t \rightarrow \|f(t)\|_{0,\Omega}$ está acotada por f_0 en $[0, T]$. En el caso $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ supondremos además que τ_h es una familia uniforme de triangulaciones y que el paso de tiempo Δt verifica la restricción:

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{(1-2\theta)C_1} \min\left\{\frac{1}{\nu}, \frac{2\mu_0}{h^2\mu_1^2}\right\}. \quad (407)$$

Entonces la solución Φ_h^n satisface:

$$\|\Phi_h^n\|_{0,\Omega} \leq \|\Phi_h^0\|_{0,\Omega} + C_2 \sqrt{\frac{T}{\nu}} f_0 \quad (408)$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas que sólo dependen de Ω .

Discretización en tiempo por características

Este método surge de considerar la ecuación de convección-difusión desde un punto de vista lagrangiano (en lugar del euleriano). Recordemos la definición de *curvas características*:

Dado un punto $x \in \bar{\Omega}$ y un instante de tiempo t se define la curva característica $X = X(x, t; s)$ como la solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \frac{dX(x, t; s)}{ds} = \vec{u}(X(x, t; s), s), \\ X(x, t; t) = x. \end{cases} \quad (409)$$

Desde un punto de vista geométrico, $X(x, t; s)$ da la posición en el tiempo s de la partícula de fluido que ha sido transportada por el campo de velocidad \vec{u} y que en el instante t ocupaba la posición x .

Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{ds}\Phi(X(x, t; s), s)|_{s=t} = \frac{d\Phi}{dt}(x, t) + \vec{u}(x, t) \cdot \vec{\nabla}\Phi(x, t) \quad (410)$$

Teniendo en cuenta que $X(x, (n+1)\Delta t; (n+1)\Delta t) = x$ podemos escribir

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} + \vec{u} \cdot \nabla\Phi\right)^{n+1}(x) \simeq \frac{1}{\Delta t}[\Phi^{n+1}(x) - \Phi^n(X^n(x))] \quad (411)$$

donde $X^n(x)$ es una aproximación de $X(x, (n+1)\Delta t; n\Delta t)$. Para esta aproximación pueden elegirse distintos esquemas; por ejemplo, usando un esquema de Euler para resolver (409) se tiene:

$$X^n(x) = x - \vec{u}^n(x) \Delta t \quad (412)$$

o usando un esquema de Runge-Kutta de segundo orden se llega a:

$$X^n(x) = x - \vec{u}^{n+\frac{1}{2}}(x - \vec{u}^n(x) \frac{\Delta t}{2}) \Delta t \quad (413)$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{\nabla} \cdot (\nu \vec{\nabla}\Phi) = \nu \Delta\Phi, \quad (414)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \Phi) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\Phi + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \Phi, \quad (415)$$

y la igualdad (411), obtenemos la siguiente discretización en tiempo de las ecuaciones de convección-difusión (399):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^0 = \Phi_0, \\ \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n \circ X^n}{\Delta t} - \nu \Delta \Phi^{n+1} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} + a) \Phi^{n+1} = f^{n+1} \quad \text{en } \Omega, \\ \Phi^{n+1} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (416)$$

Como puede observarse, este método presenta una gran ventaja sobre los anteriores ya que en los problemas a resolver en cada paso de tiempo no aparecen términos de convección, por lo que no serán necesarias técnicas de descentrado a la hora de aproximarlos por elementos finitos. Además, puede probarse la estabilidad incondicional del método aún en el caso $\nu = 0$.

Este método se aplica al problema totalmente discretizado usando elementos finitos en un espacio W_h adecuado (por ejemplo, funciones continuas, P_1 a trozos sobre la triangulación de Ω y satisfaciendo las condiciones de contorno). El esquema resultante es: Dado $\Phi_h^0 = \Phi_{0,h} \in W_h$, para cada $n = 0, \dots, N-1$ encontrar $\Phi_h^{n+1} \in W_h$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \langle \Phi_h^{n+1} - \Phi_h^n \circ X_h^n, w_h \rangle + \nu \langle \vec{\nabla} \Phi_h^{n+1}, \vec{\nabla} w_h \rangle + \langle (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{n+1} + a) \Phi_h^{n+1}, w_h \rangle \\ = \langle f^{n+1}, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in W_h \end{aligned} \quad (417)$$

donde X_h^n es una aproximación de X^n . Puede probarse que, bajo hipótesis de regularidad adecuadas, se obtiene la siguiente estimación del error:

$$\|\Phi(t_n) - \Phi_h^n\|_{0,\Omega} = O(h + \Delta t + \frac{h^2}{\Delta t}) \quad (418)$$

Las dificultades fundamentales aparecen, en primer lugar, en el cálculo de las aproximaciones discretas X_h^n de X^n mediante las técnicas ya vistas en el caso estacionario (ver (383)-(385)) y, en segundo lugar, en el cálculo de las integrales:

$$\int_{\Omega} (\Phi_h^n \circ X_h^n)(x) w_h(x) dx \quad (419)$$

Un cálculo exacto de estas integrales es muy costoso, por lo cual, lo que se hace en la práctica, es usar un esquema de integración numérica:

$$\int_{\Omega} (\Phi_h^n \circ X_h^n)(x) w_h(x) dx \simeq \sum_{T \in \tau} \sum_{i=1}^{N_T} \pi_i^T \Phi_h^n(X_h^n(\eta_i^T)) w_h(\eta_i^T) \quad (420)$$

donde η_i^T son los nodos de cuadratura de la fórmula de integración elegida en el triángulo T y π_i^T son los pesos asociados.

El estudio de cómo afecta a la estabilidad del método la elección del esquema de integración numérica es complejo, pero parece necesario utilizar esquemas suficientemente ricos (esto es, con un número N_T de nodos suficientemente grande) para asegurar la estabilidad.

6.2 Resolución numérica de las ecuaciones de Stokes

Un buen método para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes debería, al menos, ser capaz de resolver de manera efectiva el problema de Stokes (de hecho, muchos procedimientos iterativos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes se basan en resolver una sucesión de problemas de Stokes).

Vamos a presentar entonces métodos para resolver las ecuaciones de Stokes que modelan flujos incompresibles de fluidos newtonianos con número de Reynolds moderado, es decir, para los casos de baja velocidad o de alta viscosidad. Por simplicidad nos centraremos en el caso de dimensión $n = 2$, pero razonamientos análogos son válidos para el caso tridimensional.

El problema puede plantearse como: Encontrar la velocidad \vec{u} y la presión p tales que:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} & \text{en } \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (421)$$

Una formulación débil de este problema es: Encontrar $\vec{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ y $p \in L^2(\Omega)$ tales que:

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{v} \, dx - \int_{\Omega} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx, & \forall \vec{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ \int_{\Omega} q \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, dx = 0, & \forall q \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (422)$$

donde $\vec{\nabla}\vec{u}$ representa la matriz de componentes $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ y donde se define el producto $:$ de las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ como:

$$A : B = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij} \quad (423)$$

Teniendo en cuenta que la solución \vec{u} debe ser de divergencia nula (esto es, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$) parece natural introducir el espacio de funciones de divergencia nula:

$$W = H(\text{div}, \Omega) = \{\vec{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2 \mid \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0\} \quad (424)$$

De esta manera, se puede obtener otra formulación variacional equivalente a (422): Encontrar $\vec{u} \in W$ tal que:

$$\nu \int_{\Omega} \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx, \quad \forall \vec{v} \in W. \quad (425)$$

Es importante señalar que:

- Ambos problemas variacionales (422) y (425) son equivalentes al problema de optimización con restricciones siguiente:

$$\min_{\vec{v} \in W} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\nu}{2} \vec{\nabla} \vec{v} : \vec{\nabla} \vec{v} dx - \vec{f} \cdot \vec{v} \right\} dx. \quad (426)$$

- La condición de incompresibilidad (que está incluida en $\vec{v} \in W$) juega el papel de restricción lineal.
- De las formulaciones anteriores se deduce que la presión p puede interpretarse como un multiplicador de Lagrange asociado a esa restricción. En realidad las ecuaciones de la formulación variacional (422) son las ecuaciones de equilibrio del problema de punto silla:

$$\min_{\vec{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2} \max_{q \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\nu}{2} \vec{\nabla} \vec{v} : \vec{\nabla} \vec{v} + q \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{f} \cdot \vec{v} \right\} dx. \quad (427)$$

Si denotamos $V = [H_0^1(\Omega)]^2$, $Q = L^2(\Omega)$, podemos definir

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \nu \int_{\Omega} \vec{\nabla} \vec{u} : \vec{\nabla} \vec{v} dx \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \quad (428)$$

$$b(\vec{v}, q) = - \int_{\Omega} q \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dx \quad \forall \vec{v} \in V, \quad \forall q \in Q. \quad (429)$$

Así podemos escribir (422) en la forma: Encontrar $\vec{u} \in V$ y $p \in Q$ tales que:

$$\begin{cases} a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle, & \forall \vec{v} \in V, \\ b(\vec{u}, q) = 0, & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (430)$$

En general, la existencia y unicidad de solución para un problema de este tipo requiere, además de la V -elipticidad de la forma bilineal a , la verificación de la condición “*inf-sup*” de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) que se puede escribir como:

$$\inf_{\vec{v} \in V} \sup_{q \in Q} \frac{b(\vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|_V \|q\|_Q} \geq k_0 > 0. \quad (431)$$

Analizaremos entonces discretizaciones válidas para (430): Introducimos subespacios finito-dimensionales $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$ y consideramos la formulación discreta

$$\begin{cases} a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p_h) = \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle, & \forall \vec{v}_h \in V_h, \\ b(\vec{u}_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (432)$$

Para asegurar la existencia de solución del problema discreto y la convergencia de esta a la solución del problema continuo será necesario el cumplimiento de la condición “*inf-sup*” uniforme siguiente:

$$\inf_{\vec{v}_h \in V_h} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{b(\vec{v}_h, q_h)}{\|\vec{v}_h\|_{V_h} \|q_h\|_{Q_h}} \geq k_h \geq k_0 > 0, \quad \forall h > 0. \quad (433)$$

La primera cuestión que se plantea es cómo comprobar de manera sencilla el cumplimiento de esta condición. Un criterio en esta dirección es el siguiente:

Resultado 2: Si puede construirse un operador Π_h de V en V_h verificando:

$$b(\Pi_h(\vec{v}) - \vec{v}, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (434)$$

$$\|\Pi_h(\vec{v})\|_V \leq C \|\vec{v}\|_V \quad (435)$$

con C independiente de h , entonces la condición “*inf-sup*” LBB discreta se cumple.

Forma matricial del problema discreto

Si $\{\vec{\phi}_i\}_{i=1}^{N_h}$ es una base de V_h y $\{\psi_j\}_{j=1}^{M_h}$ es una base de Q_h , se definen las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{kl})$ y el vector $F = (f_i)$ mediante:

$$a_{ij} = a(\vec{\phi}_j, \vec{\phi}_i), \quad (436)$$

$$b_{kl} = b(\vec{\phi}_l, \psi_k), \quad (437)$$

$$f_i = \langle \vec{f}, \vec{\phi}_i \rangle. \quad (438)$$

Si escribimos las soluciones discretas \vec{u}_h y p_h en función de las bases

$$\vec{u}_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \vec{\phi}_i, \quad (439)$$

$$p_h = \sum_{j=1}^{M_h} P_j \psi_j, \quad (440)$$

y denotamos $U = (U_i)_{i=1}^{N_h}$, $P = (P_j)_{j=1}^{M_h}$, el problema discreto puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (441)$$

Ejemplos de elementos finitos

Una idea natural en los problemas de divergencia nula es forzar al cumplimiento de esa restricción fuertemente, es decir, en cada punto. Esto puede hacerse fácilmente: Dada una

elección de V_h para las velocidades sería suficiente elegir Q_h de manera que contuviese $\vec{\nabla} \cdot (V_h)$ para asegurar que la divergencia es cero en cada punto. Pero, como ocurre con muchas ideas simples, esto conduce a un punto muerto: Aparecen restricciones de más para la velocidad y así se llega a un fenómeno de “locking”, es decir, la única solución posible es la nula.

Ejemplo: Se aproxima \vec{u} usando elementos P_1 conformes, de esta manera la velocidad discreta \vec{u}_h es continua en todo el dominio Ω y polinómica de grado 1 a trozos. Aproximamos la condición de incompresibilidad por $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_h = 0$, esto es, una restricción por triángulo, de forma que la presión discreta p_h es constante a trozos. Si ahora contamos el número de grados de libertad para la velocidad discreta (son dos veces el número de vértices interiores) este es inferior al número de restricciones lineales (el número de triángulos).

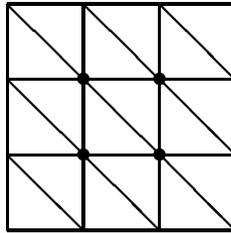


Figura 8: Malla cuadrada uniforme: $2 \times 4 = 8 < 18$.

Entonces, excepto para mallas muy regulares donde algunas restricciones puedan ser linealmente dependientes, la única \vec{u}_h admisible que satisface las condiciones homogéneas de contorno y las condiciones de incompresibilidad es la solución trivial $\vec{u}_h = 0$ (fenómeno de “locking”).

Este ejemplo elemental muestra como las elecciones de las aproximaciones de \vec{u} y p no son arbitrarias.

Como los métodos con cumplimiento de la condición de divergencia nula de manera exacta son delicados, exigiendo mallas especiales o elementos de grado alto, parece razonable exigir el cumplimiento de la condición sólo de manera aproximada. Puesto que el operador $\vec{\nabla}_h \cdot$ es la proyección sobre Q_h del operador divergencia, si Q_h es pequeño o V_h grande esta proyección será efectivamente más débil que la condición exacta. Además, en general, la verificación de la condición “*inf-sup*” será más sencilla.

Una forma proceder es hacer V_h más grande utilizando elementos enriquecidos. Esto consiste en estabilizar un elemento enriqueciendo el campo de velocidades mediante el uso de funciones “burbuja”, es decir, funciones que solamente son no nulas en el interior de un único elemento. El ejemplo más sencillo es la función “burbuja” conforme, que se suele denotar por $b_{3,T}$. Está definida como $b_{3,T} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, donde los λ_i son las coordenadas baricéntricas

del triángulo T .

Esto da lugar, entre otras, a las siguientes familias de elementos finitos:

Ejemplo 1: El MINI elemento

La velocidad se aproxima por funciones continuas en Ω tales que restringidas a cada elemento T pertenezcan a $P_1^b(T)$, donde:

$$P_k^b(T) = \{q + \alpha b_{3,T} \mid q \in P_k(T), \alpha \in \mathbb{R}\} \quad (k \geq 0) \quad (442)$$

y la presión se aproxima por funciones continuas en Ω y $P_1(T)$ en cada elemento. Esto significa que una burbuja cúbica se añade a la aproximación lineal a trozos de la velocidad, mientras que la presión se considera lineal a trozos.

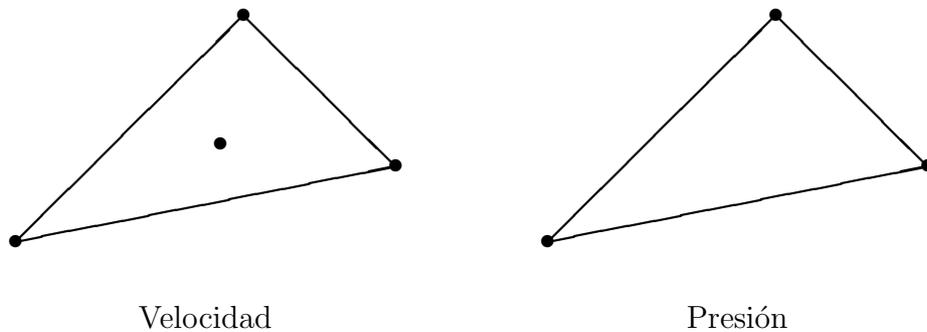


Figura 9: MINI elemento

Ejemplo 2: El elemento de Taylor-Hood enriquecido

En este caso se añade una burbuja cúbica a una aproximación cuadrática a trozos de la velocidad, mientras que la presión se continua aproximando por funciones lineales a trozos. (Sin la burbuja este elemento se conoce como elemento de Taylor-Hood y también es estable).

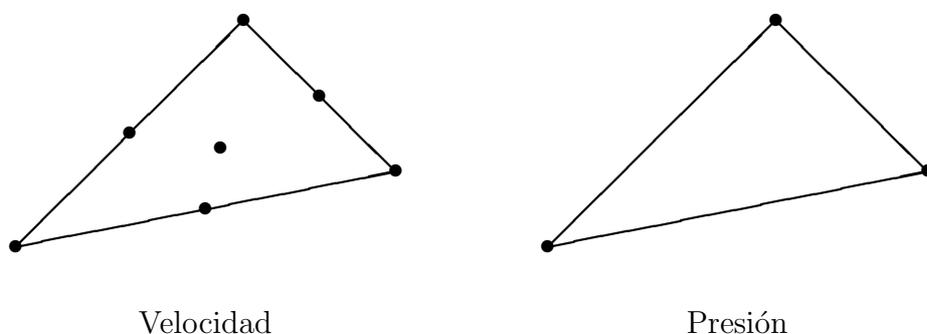


Figura 10: Elemento de Taylor-Hood enriquecido

En estos dos ejemplos hemos considerado aproximaciones continuas de la presión. Sin embargo, parece importante considerar aproximaciones discontinuas, pues proporcionan una mejor verificación de las ecuaciones de conservación de la masa.

Ejemplo 3: El elemento $P_2 - P_0$

Son los elementos estables con presión discontinua más simples. Estos elementos no tienen ninguna propiedad especial, salvo que la presión se aproxima con una precisión muy baja, por lo cual no son muy recomendables en la práctica.

(En el caso en que, en vez de elementos simpliciales, se usen elementos rectangulares, los más simples son los elementos $Q_2 - Q_0$.)

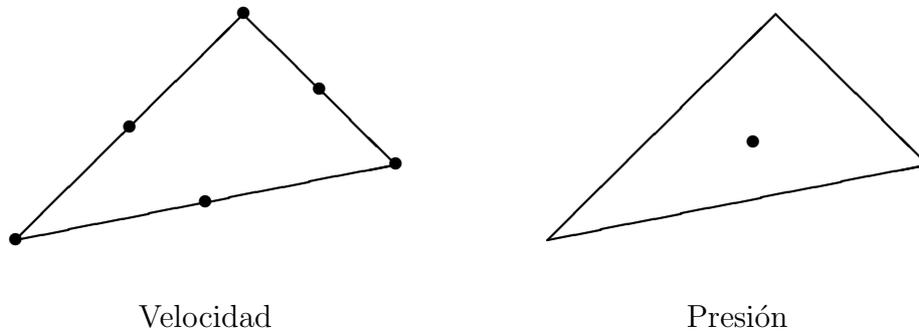


Figura 11: Elemento $P_2 - P_0$

En el caso de elementos con presión discontinua también es posible estabilizar estos elementos añadiendo funciones “burbuja”:

Ejemplo 4: El elemento de Crouzeix-Raviart

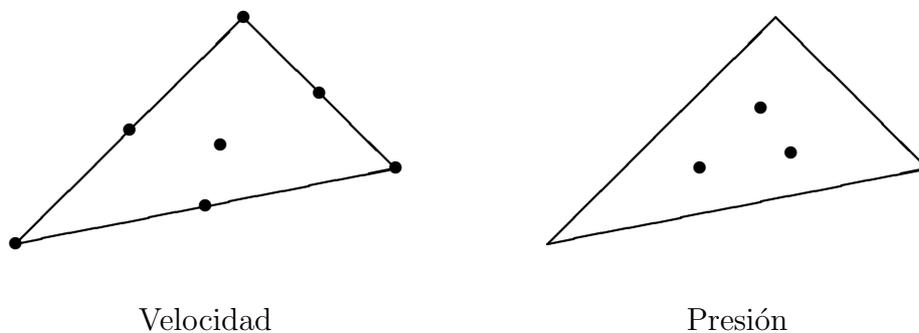


Figura 12: Elemento de Crouzeix-Raviart

Se elige como Q_h es espacio de funciones discontinuas lineales a trozos y se añaden “burbujas” cúbicas a la aproximación cuadrática a trozos de la velocidad.

(También es posible el uso de elementos no conformes y de combinaciones de elementos simpliciales y rectangulares.)

Estabilización de métodos no admisibles

Hasta ahora hemos descartado parejas de elementos que no cumplen la condición “*inf-sup*”. Sin embargo, algunas de estas parejas resultan atractivas, o bien por su bajo número de grados de libertad, o bien porque la velocidad y la presión se aproximan por el mismo tipo de elementos finitos.

Una técnica que permite construir esquemas estables sobre la base de elementos no admisibles es la estabilización mediante el filtrado de la presión. Consideremos, por ejemplo, el caso del elemento $Q_1 - Q_0$ donde la velocidad se aproxima por funciones bilineales a trozos y la presión por constantes a trozos. Si trabajamos con una malla regular de rectángulos, existen presiones espúreas que adoptan un patrón especial (por ejemplo, toman valores 1 y 0 alternativamente sobre los rectángulos de la malla). En este caso el subespacio de las presiones espúreas es fácil de caracterizar y se puede realizar un filtrado que lo elimine de Q_h , de manera que se obtenga un método estable.

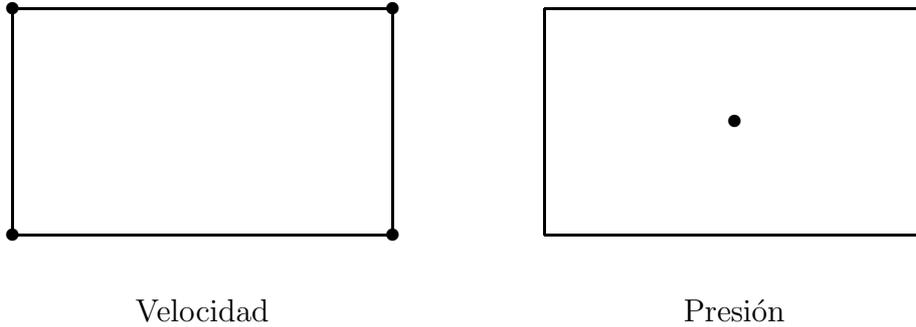


Figura 13: Elemento $Q_1 - Q_0$

Otra idea posible consiste en modificar la formulación variacional del problema, como por ejemplo en el siguiente esquema: Encontrar $\vec{u}_h \in V_h$ y $p_h \in Q_h$ tales que:

$$\begin{cases} a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p_h) = \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle, & \forall \vec{v}_h \in V_h, \\ b(\vec{u}_h, q_h) - d(p_h, \vec{u}_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (443)$$

donde

$$d(p_h, \vec{u}_h, q_h) = \sum_{T \in \tau_h} \alpha_T h_T^2 \int_T (\vec{\nabla} p_h - \Delta \vec{u}_h - \vec{f}) \cdot \vec{\nabla} q_h \, dx \quad (444)$$

donde α_T es un parámetro a elegir para cada elemento T .

El inconveniente de estos métodos es que llevan a la resolución de sistemas lineales no simétricos (aunque se han construido refinamientos de estos esquemas que conducen a sistemas simétricos).

Otra posibilidad de estabilización es la combinación del método de elementos finitos con el método de mínimos cuadrados, lo que da lugar a los métodos GLS.

6.3 Las ecuaciones de Navier-Stokes

Comenzaremos considerando, por razones de simplicidad, la formulación de las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes con condición de contorno Dirichlet homogénea. Al final daremos algunas ideas breves sobre el caso evolutivo.

Caso estacionario

Dado un abierto $\Omega \subset R^2$ de frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular, el problema consiste en encontrar la velocidad $\vec{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ y la presión $p \in L^2(\Omega)$ tales que:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} & \text{en } \Omega, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (445)$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido (que suponemos constante) y \vec{f} representa una fuerza por unidad de superficie. Para definir la formulación variacional débil vamos a introducir las formas bilineales y trilineales siguientes:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \nu \int_{\Omega} \vec{\nabla}\vec{u} : \vec{\nabla}\vec{v} \, dx \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \quad (446)$$

$$b(\vec{v}, q) = - \int_{\Omega} q \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \, dx \quad \forall \vec{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (447)$$

$$c(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} (\vec{w}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\cdot\vec{v} \, dx \quad \forall \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \in [H^1(\Omega)]^2. \quad (448)$$

Entonces, la formulación variacional del problema anterior es: Encontrar $\vec{u} \in [H_0^1(\Omega)]^2$ y $p \in L^2(\Omega)$ tales que:

$$\begin{cases} a(\vec{u}, \vec{v}) + c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle, & \forall \vec{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \\ b(\vec{u}, q) = 0, & \forall q \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (449)$$

El problema discretizado

Se eligen de manera adecuada espacios de elementos finito V_h para aproximar la velocidad y Q_h para la presión. El problema aproximado es entonces: Encontrar $\vec{u}_h \in V_h$ y $p_h \in Q_h$ tales que:

$$\begin{cases} a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + c(\vec{u}_h, \vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p_h) = \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle, & \forall \vec{v}_h \in V_h, \\ b(\vec{u}_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (450)$$

Este problema discreto es equivalente a un sistema de ecuaciones no lineales. Para ver esto consideramos $\{\vec{\phi}_i\}_{i=1}^{N_h}$ una base de V_h y $\{\psi_j\}_{j=1}^{M_h}$ una base de Q_h . Si escribimos las soluciones discretas \vec{u}_h y p_h en función de las bases

$$\vec{u}_h = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \vec{\phi}_i, \quad p_h = \sum_{j=1}^{M_h} P_j \psi_j, \quad (451)$$

y denotamos $U = (U_i)_{i=1}^{N_h}$, $P = (P_j)_{j=1}^{M_h}$, el problema aproximado se escribe como:

$$\begin{pmatrix} A(U) & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (452)$$

donde $A(U) = (a_{ij})$ y $B = (b_{kl})$ son las matrices:

$$a_{ij} = a(\vec{\phi}_j, \vec{\phi}_i) + c(\vec{u}_h, \vec{\phi}_j, \vec{\phi}_i), \quad (453)$$

$$b_{kl} = b(\vec{\phi}_l, \psi_k), \quad (454)$$

y el vector $F = (f_i)$ viene dado por:

$$f_i = \langle \vec{f}, \vec{\phi}_i \rangle. \quad (455)$$

Este sistema no lineal puede resolverse usando los métodos de Newton, cuasi-Newton o iteración simple. Una alternativa es calcular la solución aproximada como la solución de estado estacionario (como límite en tiempo infinito) de un problema evolutivo, aplicando métodos para problemas dependientes del tiempo.

Vamos a comentar las cinco condiciones que permiten garantizar la estabilidad de los esquemas aproximados y que las soluciones obtenidas mediante esos esquemas den ya una precisión óptima.

Las tres primeras de estas condiciones conciernen a la continuidad de las formas a , b y c :

1.

$$|a(\vec{u}_h, \vec{v}_h)| \leq K_1 \|\vec{u}_h\|_{1,\Omega} \|\vec{v}_h\|_{1,\Omega}, \quad \forall \vec{u}_h, \vec{v}_h \in V_h.$$

2.

$$|b(\vec{u}_h, q_h)| \leq K_2 \|\vec{u}_h\|_{1,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega}, \quad \forall \vec{v}_h \in V_h, \forall q_h \in Q_h.$$

3.

$$|a(\vec{u}_h, \vec{v}_h)| \leq K_3 \|\vec{u}_h\|_{1,\Omega} \|\vec{v}_h\|_{1,\Omega}, \quad \forall \vec{u}_h, \vec{v}_h \in V_h.$$

La cuarta condición es la relativa a la elipticidad de a :

4.

$$a(\vec{z}_h, \vec{z}_h) \geq K_4 \|\vec{z}_h\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall \vec{z}_h \in Z_h,$$

donde

$$Z_h = \{\vec{v}_h \in V_h \mid b(\vec{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\} \quad (456)$$

Finalmente, la quinta es la condición “*inf-sup*” LBB ya vista anteriormente:

5.

$$\inf_{\vec{v}_h \in V_h} \sup_{q_h \in Q_h} \frac{b(\vec{v}_h, q_h)}{\|\vec{v}_h\|_{V_h} \|q_h\|_{Q_h}} \geq K_5 > 0.$$

(Algunos espacios de elementos finitos que verifican la condición LBB ya han sido vistos en el estudio de las ecuaciones de Stokes.)

Caso evolutivo

Para finalizar el capítulo comentaremos muy brevemente la aproximación numérica de las ecuaciones evolutivas de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (457)$$

En la resolución numérica de estas ecuaciones están presentes todas las dificultades encontradas en las secciones anteriores, agravadas por la presencia de términos no lineales.

Una primera posibilidad para su resolución es la utilización de una semi-discretización en tiempo (mediante los métodos de Euler o de Crank-Nicolson), lo cual lleva en cada iteración de tiempo a la resolución de un problema *no lineal* de Navier-Stokes estacionario.

Otra posibilidad es el uso del método de características. La aplicación de este método al problema es ventajoso con respecto al anterior, en el sentido de que en cada iteración de

tiempo hay que resolver un problema *lineal* de Stokes estacionario. Las experiencias muestran que este algoritmo tiene buenas propiedades de estabilidad.

6.4 Bibliografía

1. Braess, D. *Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
2. Pironneau, O. *Finite element methods for fluids*. John Wiley & Sons, Chichester; Masson, París, 1989.
3. Raviart, P.A. *Les methodes d'elements finis en mecanique des fluides*. Editions Eyrolles, París, 1981.
4. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. *The finite element method. Vols. 1-3*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.