TEMA 2: RESOLUCION DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

1 CONCEPTOS GENERALES

Se llama **ecuación escalar numérica** a toda expresión formal

$$F(x) = 0$$

donde F es una aplicación $F : A \subset R \to R$.
Por ejemplo:

$$x - log(x) = 0.$$

$$sen(x) + \sqrt{x^3 - 7} - e^{tg(x)} - 19 = 0.$$

Una **raíz** (o cero) de la ecuación $F(x) = 0$ es cualquier número $\alpha \in A$ tal que $F(\alpha) = 0$.
Una raíz α de la ecuación $F(x) = 0$ se dice **separada** en un subconjunto $B \subset A$ si α es la única raíz de $F(x) = 0$ que pertenece a B.

La separación de las raíces de una ecuación numérica es un proceso muy importante y, en general, previo a su cálculo. Los métodos para realizar la a separación de las raíces son de dos tipos:

1. Gráficos: basados exclusivamente en la representación gráfica de F (o de una descomposición de F: por ejemplo, la gráfica de la función $F(x) = \text{sen}(x) - x + 2$ no es inmediata de representar pero, teniendo en cuenta que $F(x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x) = x - 2$ sí es fácil representar las gráficas de $\text{sen}(x)$ y de $x - 2$ y calcular sus puntos de corte.

2. Analíticos: basados en teoremas matemáticos sencillos, como por ejemplo:

Teorema 1 .- *(Bolzano)*
Sea $F : [a, b] \subset R \rightarrow R$ *continua en* $[a, b]$ *y tal que* $F(a).F(b) < 0$. *Entonces existe* $\alpha \in (a, b)$ *tal que* $F(\alpha) = 0$.

Teorema 2 .- *(Rolle)*
Sea $F : [a, b] \subset R \rightarrow R$ *continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b). *Entonces se verifica:*

1. *Si* $F(a) = F(b)$ *entonces existe* $\alpha \in (a, b)$ *tal que* $F'(\alpha) = 0$.

2. *Si* $F'(x) \neq 0, \ \forall x \in (a, b)$ *entonces* F *es estrictamente monótona.*

3. *Entre dos raíces consecutivas de* $F'(x) = 0$ *en el intervalo* (a, b) *existe, a lo sumo, una raíz de* $F(x) = 0$.

Teorema 3 .- *Sea* $F : R \to R$ *de clase* $C^1(R)$ *y tal que existe una constante* $M > 0$ *verificando* $F'(x) \geq M > 0, \ \forall x \in R$.
Entonces la ecuación $F(x) = 0$ *tiene una única raíz* α *comprendida entre* 0 *y* $-\dfrac{F(0)}{M}$.

Ejemplo 1 .- *(Separación de raíces)*

1. *Consideremos la ecuación* $F(x) = e^x - 2 = 0$.

   Claramente, $F \in C^\infty(R)$. *Por otra parte,*

   $$F(0) = 1 - 2 < 0$$

   $$F(1) = e - 2 > 0$$

   Por Bolzano, existe, al menos, una raíz en el intervalo $(0, 1)$.

   Como $F'(x) = e^x \neq 0, \ \forall x \in R$, *por Rolle, existe, a lo sumo, una raíz.*

   En consecuencia, $F(x) = 0$ *tiene una única raíz separada en* $(0, 1)$.

2. *Sea ahora la ecuación* $G(x) = e^x - 2x - 2 = 0$.

   Dado que $G \in C^\infty(R)$ *y que* $G'(x) = e^x - 2 = 0$ *tiene una única raíz, entonces, por Rolle,* $G(x) = 0$ *tiene, a lo sumo, dos raíces.*

   Por otra parte,

$$G(-1) = e^{-1} + 2 - 2 > 0$$

$$G(0) = 1 - 2 < 0$$
$$G(1) = e - 2 - 2 < 0$$
$$G(2) = e^2 - 4 - 2 > 0$$

   Por Bolzano, existen, al menos, una raíz en el intervalo $(-1, 0)$ *y otra en* $(1, 2)$.

   En consecuencia, $G(x) = 0$ *tiene sólo dos raíces: una separada en* $(-1, 0)$ *y otra en* $(1, 2)$.

Una vez localizada una raíz, para su aproximación se utilizan **algoritmos de tipo iterativo** consistentes en la construcción de una sucesión de iterantes $\{x_k\}_{k\in N}$ destinada a converger a la raíz α que se quiere determinar.

El **orden de convergencia** de un algoritmo iterativo indica la rapidez con que la sucesión $\{x_k\}_{k\in N}$ converge a α : Un algoritmo iterativo convergente se dice de orden p para la ecuación $F(x) = 0$ y para la raíz α si p es el mayor número tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \neq 0,$$

donde se define el error k-ésimo $e_k = x_k - \alpha$, para $\{x_k\}$ cualquier sucesión construida por el algoritmo y tal que $x_k \neq \alpha$ para casi todo $k \in N$.

Además, si el orden de convergencia es p se tiene que:

$$|e_k| \leq \frac{1}{L^{1/(p-1)}}[|e_0|L^{1/(p-1)}]^{p^k}$$

donde $L = \max\limits_{n\in N} \dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$. Por tanto, si $|e_0|$ es suficientemente pequeño de modo que $|e_0|L^{1/(p-1)}$ sea menor que 1, entonces la convergencia será tanto más rápida cuanto mayor sea p.

Ejemplo 2 .-
Si un algoritmo tiene orden de convergencia $p = 1$ *entonces:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = C, \quad \textit{con} \;\; 0 < C < 1.$$

Si además se tiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = C, \quad \textit{con} \;\; 0 < |C| < 1,$$

entonces la convergencia se dice lineal.

Si además se tiene:

$$e_{k+1} = C\, e_k, \quad \forall k \in N$$

con $0 < |C| < 1$, *entonces la convergencia se dice geométrica.*

2 ALGORITMO DE DICOTOMIA (O DE BISECCION)

Se trata de uno de los métodos más simples para el cálculo de una raíz de una función $F : [a, b] \to R$ continua y tal que $F(a).F(b) < 0$.

En estas condiciones, el teorema de Bolzano asegura la existencia de, al menos, una raíz en (a, b). El algoritmo de dicotomía permite calcular una de dichas raíces α. (Si α está separada en (a, b) entonces la sucesión construida por este método convergerá a dicha raíz α.)

La idea del método es construir una sucesión de intervalos $\{[a_k, b_k]\}_{k \in N}$ cada uno de longitud la mitad del anterior y de forma que todos contengan en su interior una raíz de $F(x) = 0$.

Para ello se toma como intervalo inicial:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b.$$

A partir del intervalo $[a_k, b_k]$ verificando $F(a_k).F(b_k) < 0$ (de modo que posee una raíz de F en su interior) se calcula su punto medio:

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Puede ocurrir una de las tres posibilidades siguientes:

1. $F(x_k) = 0 \;\Rightarrow\; x_k$ es la raíz buscada.
2. $F(x_k) \neq 0,\; F(a_k).F(x_k) < 0 \;\Rightarrow$ Existe, al menos, una raíz en (a_k, x_k). Entonces se toma:

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k.$$

3. $F(x_k) \neq 0,\; F(x_k).F(b_k) < 0 \;\Rightarrow$ Existe, al menos, una raíz en (x_k, b_k). Entonces se toma:

$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k.$$

A partir del nuevo intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ se calcula su punto medio x_{k+1} y se repite el proceso.

Dado que por construcción se tiene:

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k < x_k < b_k \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0 = b$$

las sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son monótonas y acotadas, y por tanto convergentes:

$$\exists \lim_{k\to\infty} a_k = \alpha, \quad \exists \lim_{k\to\infty} b_k = \beta.$$

Como:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b-a}{2^k}$$

se tiene que:

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \beta.$$

Por tanto, la sucesión $\{x_k\}$ es convergente.
Por otra parte:

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} F(a_k).F(b_k) = [F(\alpha)]^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; F(\alpha) = 0.$$

Por tanto, $\alpha = \lim_{k\to\infty} x_k$ es una raíz de $F(x) = 0$.

Además se tiene la siguiente acotación del error:

$$|e_k| = |x_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, para hacer el error $|e_k| < \varepsilon$ basta que se verifique $\dfrac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon$, esto es, basta aplicar el algoritmo hasta una iteración k tal que:

$$k > \frac{log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{log(2)} - 1.$$

Observación 1 .- *En la práctica se suele aplicar el algoritmo hasta una iteración k tal que se verifica el test de parada:*

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

Así, por ejemplo, tomando $\varepsilon = 10^{-s}$ podemos considerar que x_k tiene sus s primeras cifras decimales exactas, ya que dos iterantes consecutivos tienen sus s primeras cifras decimales coincidentes.

3 ALGORITMO DE LA SECANTE Y SUS VARIANTES

3.1 ALGORITMO DE LAGRANGE

Sea $F : [a, b] \to R$ continua y sea α una raíz de $F(x) = 0$ separada en $[a, b]$. El algoritmo de Lagrange (o de la secante fija) construye la sucesión $\{x_k\}_{k \in N}$ en la forma siguiente:

$$x_0 = a,$$

$$x_1 = b,$$

$$x_{n+1} = \frac{aF(x_n) - x_n F(a)}{F(x_n) - F(a)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

es decir, x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección con el eje $0X$ de la recta que une los puntos $(a, F(a))$ y $(x_n, F(x_n))$.

El método de Lagrange, al contrario del de dicotomía, puede no ser convergente.

3.2 ALGORITMO DE LA SECANTE

Sea $F : [a, b] \to R$ continua y sea α una raíz de $F(x) = 0$ separada en $[a, b]$. El algoritmo de la secante construye la sucesión $\{x_k\}_{k \in N}$ en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= b, \\ x_{n+1} &= \frac{x_{n-1}F(x_n) - x_n F(x_{n-1})}{F(x_n) - F(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

es decir, x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección con el eje $0X$ de la recta que une los puntos $(x_n, F(x_n))$ y $(x_{n-1}, F(x_{n-1}))$.

Al igual que en el caso anterior, el método de la secante puede fallar por alguna de las razones siguientes:

1. Algún x_n deja de pertenecer al dominio de definición de F, con lo cual no existe $F(x_n)$.
2. $F(x_n) = F(x_{n-1})$, con lo cual no se puede definir x_{n+1}.
3. La sucesión $\{x_k\}$, aún pudiendo ser construida, no es convergente.

Observación 2 .- *Estas dificultades están ligadas al hecho de que $F(x_n)$ y $F(x_{n-1})$ pueden tener el mismo signo, con lo cual el punto de corte x_{n+1} no tiene porque estar entre x_n y x_{n-1}. (Este problema se evitará con el metodo de regula falsi).*

Observación 3 .- *En el caso en que el método es convergente, $F(x_n)$ y $F(x_{n-1})$ estarán muy próximos a 0 para n grande (y por tanto, muy próximos entre sí). Entonces, para calcular x_{n+1} será necesario dividir por un número muy próximos a 0 con el consiguiente problema de precisión numérica.*
Para evitar parcialmente esta dificultad, es conveniente escribir el algoritmo como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{\frac{F(x_n)-F(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

que evita el problema cuando en las proximidades de la raíz F' no sea pequeño, pues:

$$\frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq F'(x_n).$$

(Se verá posteriormente que el método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

motivado por esta observación, es uno de los más eficaces.)

Teorema 4 .- *Sea* $F : [a,b] \rightarrow R$ *tal que* $F(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) \neq 0$, *y* F'' *continua en* $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. *Supongamos que existen constantes positivas* M_1, M_2 *tales que:*

$$|F'(x)| > M_1, \quad |F''(x)| < M_2, \quad \forall x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta).$$

Entonces el método de la secante es convergente, siempre que $x_0, x_1 \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ *con* ε *"suficientemente pequeño".*
Además, el orden de convergencia es 1.618 *(raíz de* $x^2 - x - 1 = 0$.*)*

3.3 ALGORITMO DE REGULA FALSI

Sea $F : [a,b] \rightarrow R$ continua tal que $F(a).F(b) < 0$ y sea α una raíz de $F(x) = 0$ separada en $[a,b]$. El algoritmo de regula falsi construye la sucesión $\{x_k\}_{k\in N}$ en la forma siguiente:

$$x_0 = a,$$

$$x_1 = b,$$

$$x_{n+1} = \frac{x_m F(x_n) - x_n F(x_m)}{F(x_n) - F(x_m)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

donde $m = m(n)$ es el mayor entero menor que n que verifica $F(x_n).F(x_m) < 0$.

Geométricamente, x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección con el eje $0X$ de la recta que une los puntos $(x_n, F(x_n))$ y $(x_m, F(x_m))$.

Este método, que es una modificación del método de la secante, tiene sobre este la ventaja de que es siempre convergente, aunque su orden de convergencia es 1 en general:

Teorema 5 .- *Sea $F : [a, b] \rightarrow R$ continua tal que $F(a).F(b) < 0$ y sea α una raíz de $F(x) = 0$ separada en $[a, b]$. Entonces, si $F(x_k) \neq 0$, $\forall k \in N$, la sucesión $\{x_k\}$ construida por el algoritmo de regula falsi converge a α.*

Observación 4 .- *Aunque el método es siempre convergente, la convergencia puede ser muy lenta.*

3.4 ALGORITMO DE MÜLLER

El método de la secante puede obtenerse aproximando la función F por la recta que pasa por los puntos $(x_n, F(x_n))$ y $(x_{n-1}, F(x_{n-1}))$. El punto de intersección de esta recta con el eje $0X$ define la nueva aproximación x_{n+1}.

En lugar de aproximar F por una recta (polinomio de grado 1) parece natural obtener una convergencia más rápida aproximando F por una parábola (esto es, un polinomio de grado 2) que pase por los puntos $(x_n, F(x_n))$, $(x_{n-1}, F(x_{n-1}))$ y $(x_{n-2}, F(x_{n-2}))$. De esta forma se determinará la nueva aproximación x_{n+1} como una de las raíces del polinomio. En esto consiste, esquemáticamente, el algoritmo de Müller, que alcanza un orden de convergencia 1.839 (raíz de $x^3 - x^2 - x - 1$.)

4 ALGORITMOS DE ITERACION FUNCIONAL SIMPLE

Estudiaremos a continuación un tipo de métodos de gran importancia para la resolución de ecuaciones numéricas. Son métodos que se basan en construir una sucesión $\{x_k\}_{k \in N}$ en la forma siguiente:

$$x_0 \quad \text{dado,}$$

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde la función f se determina a partir de la función F que define la ecuación a resolver: $F(x) = 0$.

A la hora de estudiar el método se plantean las siguientes cuestiones:

1. Cualquiera que sea n, ¿pertenece x_n siempre al dominio de definición de f?. Si la respuesta fuese negativa, no podría construirse la sucesión.

Por ejemplo, esto ocurre con $f(x) = -\sqrt{x}$ que sólo está definida como función real para los positivos:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -\sqrt{-1} = -i \notin R.$$

2. Si la sucesión puede construirse, ¿$\exists \lim_{k\to\infty} x_k = \beta$?.
3. Si la sucesión es convergente, ¿es su límite una raíz de $F(x) = 0$?.

El problema planteado en la primera cuestión puede resolverse imponiendo la siguiente hipótesis sobre f:

H1: Existe un intervalo $I = [a, b] \subset R \quad / \quad f(I) \subset I$.

Ejemplo 3 .-
Ejemplos de verificación de esta hipótesis son:

- $f(x) = x^2, \quad I = [0, 1]$.
- $f(x) = \mathrm{sen}(x), \quad I = [0, \pi]$.
- $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad I = [1, 2]$.

El problema planteado en la tercera cuestión puede resolverse imponiendo la siguiente hipótesis sobre f:

H2: f es continua en $I = [a, b]$.

En efecto, si la sucesión es convergente:

$$\beta = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\beta).$$

Esto es, β es un punto fijo de f. Por tanto, si toda solución de la ecuación $x - f(x) = 0$ es también solución de $F(x) = 0$, β es una raíz de F. Así pues, nos interesan aquellas f tales que $x - f(x) = 0$ sea equivalente a $F(x) = 0$.

Ejemplo 4 .-

$$F(x) = x^2 - log(x) = 0.$$

$$x^2 = log(x) \;\Rightarrow\; x = \sqrt{log(x)} \;\Rightarrow\; f_1(x) = \sqrt{log(x)}.$$

$$x^2 = log(x) \;\Rightarrow\; x = e^{x^2} \;\Rightarrow\; f_2(x) = e^{x^2}.$$

$$x = x + x^2 - log(x) \;\Rightarrow\; f_3(x) = x + x^2 - log(x).$$

$$\ldots$$

Ejemplo 5 .-

$$F(x) = x^3 - 2x - 1 = 0.$$

$$x^3 = 2x + 1 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{2x+1} \;\Rightarrow\; f_1(x) = \sqrt[3]{2x+1}.$$

$$2x = x^3 - 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{x^3-1}{2} \;\Rightarrow\; f_2(x) = \frac{x^3-1}{2}.$$

$$x = x^3 - x - 1 \;\Rightarrow\; f_3(x) = x^3 - x - 1.$$

$$x(x^2-2) = 1 \;\Rightarrow x = \frac{1}{x^2-2} \;\Rightarrow\; f_4(x) = \frac{1}{x^2-2}.$$

$$\ldots$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6 .- *Sea $f : I \to R$ continua y tal que $f(I) \subset I$. Entonces f tiene, al menos, un punto fijo en I.*

Para resolver el problema planteado en la segunda cuestión (la convergencia de la sucesión) se pueden analizar diferentes casos y en todos se puede observar que para tener convergencia necesitamos que la pendiente de f en el punto fijo tenga módulo menor que 1. Esto sugiere imponer la siguiente hipótesis sobre f:

H3: f es contractiva en $I = [a, b]$, es decir:

$$\exists k \in [0, 1) \quad / \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \; \forall x, y \in I.$$

(Debe tenerse en cuenta que H3 $\Rightarrow$ H2.)

Se tiene entonces el siguiente resultado de convergencia global:

Teorema 7 .- *Sea $f : I \to R$ contractiva en I de constante k y tal que $f(I) \subset I$. Entonces f tiene un único punto fijo β en I. Además, cualquier sucesión definida por:*

$$x_0 \in I,$$
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

converge a β y verifica la siguiente relación:

$$|x_n - \beta| \leq k|x_{n-1} - \beta|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(por tanto, la convergencia es de orden 1), de donde puede deducirse la acotación del error:

$$|x_n - \beta| \leq k^n|x_0 - \beta|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Observación 5 .- *La anterior cota de error no es utilizable en la práctica ya que se desconoce β. En cambio, a partir de ella se puede obtener la siguiente acotación, ya independiente de β:*

$$|x_n - \beta| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Para asegurar la contractividad de una aplicación se tiene el siguiente resultado sencillo:

Teorema 8 .- *Sea $f : I = [a, b] \to R$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces son equivalentes:*

i) f es contractiva en I de constante k.

ii) $|f'(x)| \leq k, \quad \forall x \in (a, b)$.

Ejemplo 6 .-
Claramente, la función $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$ *es contractiva en todo* R *con constante* $k = \frac{1}{2}$*, puesto que:*

$$|f'(x)| = |-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{x}{2})| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in R.$$

En cambio, para poder asegurar la condición $f(I) \subset I$, los resultado son más complicados:

Teorema 9 .- *Sea* $f : I = [a, b] \to R$ *contractiva en* I *de constante* k*. Entonces, si* $x_1 \in I$ *y* ρ *son tales que:*

$$|x_1 - f(x_1)| \leq (1 - k)\rho,$$
$$J = [x_1 - \rho, x_1 + \rho] \subset I,$$

se tiene que $f(J) \subset J$*.*

Teorema 10 .- *Sea* $f : I = [a, b] \to R$ *contractiva en* I *de constante* k *y sea* $\beta \in (a, b)$ *un punto fijo de* f*. Entonces,* $\forall \rho > 0$ *tal que* $J = [\beta - \rho, \beta + \rho] \subset I$*, se verifica* $f(J) \subset J$*.*

Teorema 11 .- *Sea* $f : I = [a, b] \to R$ *continua en* I *y sea* $\beta \in (a, b)$ *un punto fijo de* f*. Supongamos que existe una constante* $0 < M < 1$ *tal que:*

$$x, y \in I, \; x \leq y \;\Rightarrow\; 0 \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x).$$

Entonces, $f(I) \subset I$*.*

Observación 6 .-
En la práctica, se pueden utilizar también razonamientos de tipo más gráfico.
Por ejemplo, si $I = [a, b]$*, para que* $f(I) \subset I$ *es necesario (aunque no suficiente) que* $f(a) \in I$ *y que* $f(b) \in I$*.*
Pero si además de esto se verifica que f *es monótona (esto es,* $f'(x) \geq 0$ *ó* $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$*) entonces ya se tiene que* $f(I) \subset I$*.*

Hemos visto hasta ahora que exigiendo a f las hipótesis H1, H2 y H3 se aseguraba la **convergencia global** del método, esto es, la sucesión converge al punto fijo de f cualquiera que sea el punto inicial x_0 en I.

Vamos a ver a continuación que, reduciendo considerablemente las hipótesis se obtiene **convergencia local** del método, esto es, la sucesión converge al punto fijo de f siempre que el punto inicial x_0 esté "suficientemente próximo" a la solución:

Teorema 12 .- *(Ostrowski)*
Sea $f : I = [a, b] \to R$ *y sea* $\beta \in (a, b)$ *un punto fijo de* f*. Supongamos que* f *es derivable en* β *y tal que* $|f'(\beta)| < 1$*. Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que cualquiera que sea* $x_0 \in (\beta - \delta, \beta + \delta)$*, la sucesión construida por*

el algoritmo de iteración funcional simple converge a β.
Además, el orden de convergencia es, al menos, 1 puesto que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = f'(\beta)$$

En cuanto al orden de convergencia, daremos un resultado más general que los vistos anteriormente:

Teorema 13 .- *Si f es de clase $C^p(a,b)$ y el punto fijo β (esto es, $f(\beta) = \beta$) verifica:*

$$f'(\beta) = f''(\beta) = \ldots = f^{(p-1}(\beta) = 0, \quad f^{(p}(\beta) \neq 0,$$

entonces el algoritmo de iteración funcional simple es de orden p.

4.1 Aceleración de la convergencia.-

Además de la hipótesis H1 y H3 vamos a exigir a f una nueva:

H4: f es de clase $C^1(I) \quad / \quad f'(x) \neq 0, \ \forall x \in I.$

Esto significa que f es estrictamente monótona en I. Por tanto,

$x_0 \neq \beta \ \Rightarrow x_n \neq \beta, \ \forall n \in N \ \Rightarrow e_n = x_n - \beta \neq 0, \ \forall n \in N.$

Se tiene, como ya hemos comentado, que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = f'(\beta) \neq 0,$$

es decir, el método es de orden 1. Además, esto prueba que, para n grande, el error en el iterante $(n+1)$ es aproximadamente igual a $f'(\beta)$ veces el error en el iterante n. Por tanto:

$$x_{n+1} - \beta \simeq f'(\beta)(x_n - \beta),$$

$$x_{n+2} - \beta \simeq f'(\beta)(x_{n+1} - \beta),$$

restando ambas expresiones:

$$f'(\beta) \simeq \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n},$$

y sustituyendo en la primera expresión:

$$\beta \simeq \frac{x_{n+1} - f'(\beta)x_n}{1 - f'(\beta)} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = \tilde{x}_n.$$

Por tanto, $\tilde{x}_n$ debería darmos una mejor aproximación de β que x_n. Esto nos lleva al **algoritmo Δ^2 de Aitken**, según el cual, dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$, se genera una nueva sucesión $\{\tilde{x}_n\}_{n\in N}$ mediante la fórmula:

$$\tilde{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n},$$

donde:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

$$\Rightarrow \Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.$$

Teorema 14 .- *(Convergencia del método de Aitken) Sea $\{x_n\}_{n\in N}$, una sucesión convergente a β tal que las cantidades $e_n = x_n - \beta$ verifican:*

$$e_n \neq 0, \quad \forall n \in N,$$

$$e_{n+1} = (A + \varepsilon_n)e_n, \quad \forall n \in N,$$

donde A es una constante de valor absoluto menor que uno y $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$, es una sucesión convergente a 0. Entonces la sucesión $\{\tilde{x}_n\}_{n\in N}$, generada por el algoritmo Δ^2 de Aitken, converge a β más rápido que la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$, en el sentido siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \beta}{x_n - \beta} = 0.$$

Corolario 1 .- *Sea $f : I = [a, b] \to R$ contractiva en I, de clase $C^1(I)$, tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ y $f(I) \subset I$. Entonces, si $x_0 \neq \beta$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ generada por el algoritmo de iteración funcional simple está en las hipótesis del teorema anterior, de modo que el algoritmo Δ^2 de Aitken produce una aceleración de la convergencia.*

El procedimiento Δ^2 de Aitken sugiere un nuevo algoritmo iterativo, propuesto por Steffensen en 1933. El **algoritmo de Steffensen** se basa en construir la sucesión $\{x_k\}_{k\in N}$ mediante:

$$x_0 \quad \text{dado},$$

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

donde:

$$g(x) = \begin{cases} x - \frac{(f(x)-x)^2}{f(f(x))-2f(x)+x} & \text{si } f(f(x)) - 2f(x) + x \neq 0, \\ x & \text{si } f(f(x)) - 2f(x) + x = 0. \end{cases}$$

Teorema 15 .- *(Steffensen)*
Sea $f : I = [a, b] \to R$ una función con un punto fijo $\beta \in (a, b)$. Supongamos que existe un entorno $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ tal que $f \in C^3(\beta - \delta, \beta + \delta)$ y $f'(\beta) \neq 1$. Entonces:

$$g \in C^2(\beta - \delta, \beta + \delta), \quad g(\beta) = \beta, \quad g'(\beta) = 0.$$

(Por tanto, el método tiene, al menos, convergencia de orden 2.)

5 ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON

Hemos visto anteriormente que un algoritmo de I.F.S. $x_{n+1} = f(x_n)$ podía adquirir orden 2 si la derivada de f se anulaba en el punto fijo. Sin embargo, esta condición no se verifica usualmente, con lo cual el orden de convergencia se restringe a 1. Vamos a estudiar a continuación un algoritmo que permite alcanzar orden 2 de manera general.

El **algoritmo de Newton-Raphson** para la resolución de una ecuación $F(x) = 0$, con $F : I = [a, b] \to$

R derivable en (a, b), consiste en construir una sucesión $\{x_k\}_{k \in N}$ mediante:

$$x_0 \quad \text{dado,}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Observación 7 .-

1. *Geométricamente, el punto x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección con el eje $0X$ de la recta tangente a la curva $y = F(x)$ en el punto $(x_n, F(x_n))$.*
2. *Evidentemente, para poder definir la sucesión necesitamos que $F'(x_n) \neq 0, \ \forall n \in N$.*
3. *El algoritmo de N.-R. es un caso particular de I.F.S., $x_{n+1} = f(x_n)$, con:*

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}.$$

Por tanto, todos los resultados vistos para I.F.S. siguen siendo válidos para este algoritmo. En particular, aplicando el teorema de Ostrowski, se tiene:

Teorema 16 .- *(Convergencia local de N.-R.)*
Sea $F : I = [a, b] \to R$ y sea $\alpha \in (a, b)$ una raíz de la ecuación $F(x) = 0$. Supongamos que F es derivable en un entorno $(\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1)$, F' es continua en α y $F'(\alpha) \neq 0$. Entonces:

1. *La aplicación* $f(x) = x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$ *está definida en un entorno* $(\alpha - \delta_2, \alpha + \delta_2)$.

2. f *es derivable en* α *y* $f'(\alpha) \neq 0$.

3. *Existe un entorno* $(\alpha - \delta_3, \alpha + \delta_3)$ *tal que, si* $x_0 \in (\alpha - \delta_3, \alpha + \delta_3)$, *entonces* $x_n \in (\alpha - \delta_3, \alpha + \delta_3)$, $\forall n \in N$, *y además:*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha.$$

4. *Si* $x_0 \in (\alpha - \delta_3, \alpha + \delta_3)$, *entonces, para* $e_n = x_n - \alpha$, *se tiene:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 0.$$

(Por tanto, el orden de convergencia es $p > 1$*.)*

Demostramos a continuación que cuando α es una raíz simple ($F'(\alpha) \neq 0$) entonces el método es de orden 2:

Teorema 17 .- *(Orden de convergencia de N.-R.)* *Sea* $F : I = [a, b] \to R$ *de clase* $C^2(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ *y tal que* $F'(\alpha) \neq 0$. *Entonces, si* $x_0 \neq \alpha$, *se tiene* $x_n \neq \alpha$, $\forall n \in N$, *y además se verifica:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{F''(\alpha)}{2F'(\alpha)}.$$

(Entonces el orden de convergencia es, al menos, 2.)

Teorema 18 .- *(Convergencia global de N.-R.)*
Sea $F : I = [a, b] \to R$ de clase $C^2(I)$ verificando:

1. $F(a).F(b) < 0$.
2. $F'(x) \neq 0, \ \forall x \in I$.
3. $F''(x) \geq 0$ *ó* $\leq 0, \ \forall x \in I$.
4. *Si c denota el extremo de $[a, b]$ en el que $|F'(x)|$ es más pequeño, entonces:*

$$\frac{|F(c)|}{|F'(c)|} \leq b - a.$$

Entonces el método de N.-R. converge a la única raíz de la ecuación $F(x) = 0$ en $[a, b]$ sea cual sea el iterante inicial $x_0 \in [a, b]$.

Observación 8 .- *El método de N.-R. es costoso desde el punto de vista computacional, ya que para el cálculo de cada iterante se necesita evaluar la función y su derivada.*
Es posible rebajar este coste computacional mediante alguna de la simplificaciones siguientes:

1. *Método de Newton de paso p:*

   Se conserva $F'(x_n)$ fijo durante p iteraciones consecutivas:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_0)}, \quad 0 \leq n \leq p - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_{rp})}, \quad rp \leq n \leq (r+1)p - 1$$

De esta manera la derivada sólo se evalua una vez cada p iteraciones.

2. *Método de Newton simplificado (o von Mises):* *Sustituir $F'(x_n)$ por $F'(x_0)$. Así:*

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_0)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

   De esta manera la derivada sólo se evalua una vez en todo el proceso. (Corresponde a $p = \infty$).

3. *Reemplazar $F'(x_n)$ por cualquier número $A \neq 0$:*

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{A}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Para el caso en que α es una raíz de multiplicidad $m \geq 2$:

$$F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(m-1}(\alpha) = 0, \quad F^{(m}(\alpha) \neq 0,$$

es posible aplicar también el algoritmo de N.-R. con una pequeña modificación:

Teorema 19 .- *Sea $F : I = [a, b] \to R$ de clase $C^m(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Entonces, la sucesión $\{x_k\}_{k \in N}$ construida mediante:*

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} & si \;\; F'(x_n) \neq 0, \\ x_n & si \;\; F'(x_n) = 0 = F(x_n), \end{cases}$$

converge a α para x_0 suficientemente próximo a α. Además se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1-m}{m}.$$

(Esto es, el orden de convergencia es 1.)

Es decir, se mantiene la convergencia del método, aunque se pierde un orden de convergencia. La convergencia de orden 2 puede recuperarse mediante la siguiente modificación:

Teorema 20 .- *(Schroeder)*
Sea $F : I = [a,b] \to R$ de clase $C^m(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. Entonces, la sucesión $\{x_k\}_{k\in N}$ construida mediante:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - m\,\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} & si \;\; F'(x_n) \neq 0, \\ x_n & si \;\; F'(x_n) = 0 = F(x_n), \end{cases}$$

converge a α para x_0 suficientemente próximo a α. Si además F es de clase $C^{m+1}(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$, entonces se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{m(m+1)} \frac{F^{(m+1}(\alpha)}{F^{(m}(\alpha)}.$$

(En consecuencia, la convergencia es, al menos, de orden 2.)

6 ECUACIONES ALGEBRAICAS

Veamos a continuación métodos especiales para el caso en que la ecuación a resolver es algebraica, esto es, un polinomio.

6.1 Propiedades generales de los polinomios.-

Una **ecuación algebraica** es una ecuación escalar numérica de la forma $P(x) = 0$, donde P es un polinomio con coeficientes $a_i \in C$:

$$P : x \in C \to P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, x^{n-i} \in C.$$

Si $a_0 \neq 0$, entonces se dice que P es un polinomio de **grado** n.

Todo polimonio es infinitamente diferenciable. En realidad, se puede caracterizar un polinomio de grado n como aquella aplicación de clase C^∞ cuyas derivadas se anulan a partir del orden $(n+1)$.

Teorema 21 .- *Dos polinomios son iguales si y sólo si sus grados y sus coeficientes coinciden.*

Teorema 22 .- *Sea P un polinomio de grado n. Entonces, para todo número $\alpha \in C$ existen constantes* *únicas* $\hat{a}_0, \ldots \hat{a}_n$ *tales que:*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i \, (x-\alpha)^{n-i}.$$

Además, $\hat{a}_p = \dfrac{P^{(n-p}(\alpha)}{(n-p)!}, \quad p = 0, \ldots, n.$

Teorema 23 .- *Sea P un polinomio de grado $n \geq 1$. Entonces, para todo número $\alpha \in C$ existe un único polinomio Q de grado $(n-1)$ tal que:*

$$P(x) = (x-\alpha)\, Q(x) + P(\alpha).$$

Dado P un polinomio de grado $n \geq 1$, se dice que α es una raíz de P de **multiplicidad** $m \leq n$ si:

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1}(\alpha) = 0, \quad P^{(m}(\alpha) \neq 0.$$

Teorema 24 .- *Sea P un polinomio de grado $n \geq 1$ y sea $\alpha \in C$ una raíz de P. Sea Q el único polinomio de grado $(n-1)$ tal que $P(x) = (x-\alpha)\, Q(x)$. Entonces:*

1. *La multiplicidad de α como raíz de P es m si y sólo si su multiplicidad como raíz de Q es $(m-1)$.*
2. *Si $\beta \neq \alpha$, la multiplicidad de β como raíz de P coincide con su multiplicidad como raíz de Q.*

Teorema 25 .- *Sea P un polinomio de grado $n \geq 1$. Entonces $\alpha \in C$ es una raíz de P de multiplicidad m si y sólo si existe un único polinomio S de grado $(n-m)$ tal que $P(x) = (x-\alpha)^m\, S(x)$, con $S(\alpha) \neq 0$. Además, si $\beta \neq \alpha$, la multiplicidad de β como raíz de P coincide con su multiplicidad como raíz de S.*

Teorema 26 .- *Sea P un polinomio de grado $n \geq 1$. Entonces existen números $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in C$, distintos y únicos salvo el orden, y existen números $\nu_1, \ldots, \nu_r \in N$, verificando $\nu_1 + \ldots + \nu_r = n$, tales que:*

$$P(x) = a_0\,(x-\alpha_1)^{\nu_1} \ldots (x-\alpha_r)^{\nu_r}.$$

Dado un polinomio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, trataremos de calcular de manera sencilla el valor del polinomio y todas sus derivadas en un punto $\alpha \in C$. Para ello, utilizaremos el **esquema de Hörner**:

Dado que $P(x) = (x-\alpha)\,Q(x) + P(\alpha)$, se definen los números:

$$z_0(\alpha) = a_0,$$

$$z_k(\alpha) = a_k + \alpha\, z_{k-1}(\alpha), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Entonces:

$$Q(x) = z_0(\alpha)x^{n-1} + z_1(\alpha)x^{n-2} + \ldots + z_{n-1}(\alpha),$$

$$P(\alpha) = z_n(\alpha).$$

(Es simplemente la *regla de Ruffini.*)

Si denominamos $Q_{n-1}(x) = Q(x)$ y $R_0 = P(\alpha)$, se tiene:

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q_{n-1}(x) + R_0.$$

Aplicando al algoritmo a Q_{n-1} se tiene:

$$Q_{n-1}(x) = (x - \alpha)\, Q_{n-2}(x) + R_1,$$

donde $R_1 = P'(\alpha)$.
Sucesivamente para $Q_{n-2}, Q_{n-3}, \ldots$ se llega a:

$$P(x) = R_n(x - \alpha)^n + R_{n-1}(x - \alpha)^{n-1} + \ldots + R_0.$$

Por tanto, $R_k = \dfrac{P^{(k}(\alpha)}{k!}, \quad k = 0, \ldots, n.$

Ejemplo 7 .-

$$P(x) = 2x^3 - x + 1, \qquad \alpha = 2.$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 0 & -1 & 1 \\
2 & & 4 & 8 & 14 \\
\hline
 & 2 & 4 & 7 & \mathbf{15} \\
2 & & 4 & 16 & \\
\hline
 & 2 & 8 & \mathbf{23} & \\
2 & & 4 & & \\
\hline
 & 2 & \mathbf{12} & & \\
2 & & & & \\
\hline
 & \mathbf{2} & & &
\end{array}$$

Por tanto:

$$P(2) = 15, \quad P'(2) = 1!\,23 = 23,$$

$$P''(2) = 2!\,12 = 24, \quad P'''(2) = 3!\,2 = 12,$$

$$P^{(k}(2) = 0, \quad \forall k \geq 4.$$

$$P(x) = 2(x-2)^3 + 12(x-2)^2 + 23(x-2) + 15.$$

Veremos a continuación una serie de fórmulas que relacionan los coeficientes de un polinomio con las sumas o productos de sus raíces:

Sea P el polinomio de grado n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ las n raíces (no necesariamente distintas) de P.

Fórmulas de Vieta: Si definimos:

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad s_2 = \sum_{i<j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \quad \ldots \quad s_n = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

entonces:

$$\frac{a_k}{a_0} = (-1)^k\, s_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Fórmulas de Newton: Si definimos ahora:

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} & & & a_0 s_1 & +a_1 & =0 \\ & & a_0 s_2 & +a_1 s_1 & +2a_2 & =0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & +a_0 s_{n-1} & +a_1 s_{n-2} & +\dots & +(n-1)a_{n-1} & =0 \\ a_0 s_n & +a_1 s_{n-1} & +a_2 s_{n-2} & +\dots & +n a_n & =0 \end{array}\right.$$

6.2 Acotación y separación de raíces de polinomios.-

Teorema 27 .- *Sea el polinomio de grado n: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Sea $\alpha \in C$ una raíz de P. Entonces:*

$$\frac{|a_n|}{a' + |a_n|} \leq |\alpha| \leq 1 + \frac{a}{|a_0|},$$

donde:

$$a = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\},$$
$$a' = \max\{|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|\}.$$

Teorema 28 .- *Sea P un polinomio de grado n y sea $\beta \in C$ un número cualquiera. Entonces en el disco complejo $\{z \in C \ / \ |z-\beta| \leq \rho_k\}$ existe al menos una raíz de P, siendo:*

$$\rho_k = \{\binom{n}{k} \frac{|\hat{a}_n|}{|\hat{a}_{n-k}|}\}^{1/k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

donde $\hat{a}_k$ son los coeficientes tales que:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i \, (x-\beta)^{n-i}.$$

Teorema 29 .- *(Cotas de Cauchy)*
Sea un polinomio de grado n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad \textit{con} \;\; a_n \neq 0.$$

Consideramos el polinomio:

$$T_1(x) = |a_0|x^n - |a_1|x^{n-1} - \ldots - |a_{n-1}|x - |a_n|,$$

que posee una única raíz real positiva R.
Consideramos el polinomio:

$$T_2(x) = |a_0|x^n + |a_1|x^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|x - |a_n|,$$

que posee una única raíz real positiva r.
Entonces todas las raíces de P están en la corona compleja $\{z \in C \ / \ r \leq |z| \leq R\}$.

6.3 Polinomios con coeficientes reales.-

En lo que resta de tema consideraremos polinomios de grado n y con coeficientes reales, esto es:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

con $a_i \in R, \ \forall i = 0, \ldots, n$.
Para estudiar la existencia de raíces complejas tenemos el siguiente resultado:

Teorema 30 .- *(Hua)*
Si todas las raíces de P son reales, entonces:

$$a_k^2 > a_{k-1}.a_{k+1}, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1.$$

Para acotar las raíces reales de P introducimos los siguientes polinomios:

$$Q(x) = P(-x) = (-1)^n a_0 x^n + (-1)^{n-1} a_1 x^{n-1} + \ldots - a_{n-1} x + a_n,$$

$$R(x) = x^n P(\frac{1}{x}) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

$$S(x) = x^n P(-\frac{1}{x}) = (-1)^n a_0 + (-1)^{n-1} a_1 x + \ldots - a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Es claro que:

$$\alpha \in R \text{ es raíz de } P \Leftrightarrow -\alpha \text{ es raíz de } Q$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \text{ es raíz de } R \Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} \text{ es raíz de } S.$$

Por tanto, dado $M \in R^+$:

$$M \text{ es cota superior de las raíces positivas de } P$$

$$\Leftrightarrow -M \text{ es cota inferior de las raíces negativas de } Q$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{M} \text{ es cota inferior de las raíces positivas de } R$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{M} \text{ es cota superior de las raíces negativas de } S.$$

Dado que el cálculo de P, Q, R, S es trivial a partir de cualquiera de ellos dado, para acotar las raíces reales de P bastará estudiar método que permitan calcular cotas superiores de las raíces positivas de un polinomio.

Teorema 31 .- *Sea el polinomio de grado n: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ con $a_0 > 0$ y algún coeficiente a_i negativo. (Si todos los coeficientes de un polinomio son $a_i \geq 0$, no tiene raíces positivas).*
Sea a el máximo de los módulos de los coeficientes negativos y sea a_m el primer coeficiente negativo en la sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Entonces todas las raíces positivas de P son menores que la cota:

$$M = 1 + \{\frac{a}{a_0}\}^{1/m}.$$

Teorema 32 .- *(Regla de Laguerre-Thibault)*
Sea P el polinomio de grado $n \geq 1$:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Una condición suficiente para que $M > 0$ sea una c.s.r.p. de P es que los coeficientes del cociente y el resto resultantes de dividir $P(x)$ por $(x - M)$ sean todos no negativos (o bien, no positivos).

Teorema 33 .- *(Regla de Newton)*
Sea P el polinomio de grado $n \geq 1$:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Una condición suficiente para que $M > 0$ sea una c.s.r.p. de P es que los números $P(M), P'(M), \ldots, P^{(n}(M)$ sean todos no negativos (o bien, no positivos).

Dados dos números reales a y b no nulos, se define la *variación*:

$$V(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ signo(a) \neq signo(b), \\ 0 & \text{si } \ signo(a) = signo(b). \end{cases}$$

Dados m números reales $b_1, \ldots, b_m$ no nulos, se define la *variación*:

$$V(b_1, \ldots, b_m) = V(b_1, b_2) + V(b_2, b_3) + \ldots + V(b_{m-1}, b_m).$$

Finalmente, dados m números reales $b_1, \ldots, b_m$ cualesquiera, se define la *variación*:

$$V(b_1, \ldots, b_m) = V(b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}),$$

donde $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}\}$ es el conjunto ordenado resultante de suprimir en $\{b_1, \ldots, b_m\}$ los elementos nulos.

Ejemplo 8 .-

$$V(-5, 4, 0, 3, 0, -2, -1) = V(-5, 4, 3, -2, -1)$$

$$= V(-5, 4) + V(4, 3) + V(3, -2) + V(-2, -1) = 2.$$

Teorema 34 .- *(Boudan-Fourier)*
Sea un polinomio de grado $n \geq 1$*:*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Sea $[a, b] \subset R$ *un intervalo tal que* $P(a).P(b) \neq 0$. *Entonces el número de raíces reales de* P, *contando cada una tantas veces como indica su multiplicidad, en el intervalo* (a, b) *es igual o inferior en un número par a* $v(a) - v(b)$, *donde:*

$$v(x) = V(P(x), P'(x), \ldots, P^{(n}(x)).$$

Corolario 2 .- *(Regla de Descartes o de los signos)*
Sea un polinomio de grado $n \geq 1$*:*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

tal que $a_n \neq 0$. *Entonces el número de raíces reales positivas de* P, *contando cada una tantas veces como indica su multiplicidad, es igual o inferior en un número par a* $V(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Observación 9 .- *Se puede aplicar este resultado para saber, salvo un número par y contando multiplicidades, el número de raíces reales de* P *mayores que un número real* β.

Para ello basta escribir P de la forma:

$$P(x) = \hat{a}_0(x-\beta)^n + \hat{a}_1(x-\beta)^{n-1} + \ldots + \hat{a}_n$$

y calcular $V(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)$.

Dado un polinomio P de grado n y un intervalo $[a,b]$ se llama *sucesión de Sturm* relativa al polinomio y al intervalo a un conjunto finito de polinomios $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ verificando:

1. p_0 tiene en $[a,b]$ las mismas raíces que P (pero de multiplicidad uno).
2. p_m no tiene raíces en $[a,b]$.
3. $p_j(\alpha) = 0,\ 0 < j < m \ \Rightarrow\ p_{j-1}(\alpha).p_{j+1}(\alpha) < 0$.
4. $p_0(\alpha) = 0 \ \Rightarrow\ p_0'(\alpha).p_1(\alpha) > 0$.

Para construir una sucesión de Sturm relativa a un polinomio P y a cualquier intervalo se utiliza el **algoritmo de Euclides** para el calculo del máximo común divisor de P y P'.
El algoritmo es como sigue:

$$R_0(x) = P(x),\ R_1(x) = P'(x),\ \ grado(R_1) < grado(R_0),$$

$$R_0(x) = R_1(x)\,Q_1(x) - R_2(x), \quad grado(R_2) < grado(R_1),$$

$$R_1(x) = R_2(x)\,Q_2(x) - R_3(x), \quad grado(R_3) < grado(R_2),$$

$$
\begin{aligned}
& \dots \qquad\qquad\qquad \dots \\
R_{m-2}(x) &= R_{m-1}(x)\, Q_{m-1}(x) - R_m(x), \quad grado(R_m) < grado(R_{m-1}), \\
R_{m-1}(x) &= R_m(x)\, Q_m(x).
\end{aligned}
$$

Por tanto, R_m divide a todos los R_k y verifica:

$$R_m = m.c.d.(R_0, R_1) = m.c.d.(P, P').$$

La sucesión de Sturm se puede tomar entonces:

$$\{\frac{R_0}{R_m}, \frac{R_1}{R_m}, \dots, \frac{R_{m-1}}{R_m}, 1\}.$$

Observación 10 .- *Dede tenerse en cuenta que si α es una raíz de P de multiplicidad m, entonces es raíz de P' de multiplicidad $(m-1)$. Por tanto, R_m contendrá un factor de la forma $(x-\alpha)^{m-1}$.*

En consecuencia, las raíces de P son todas simples si y sólo si R_m es una constante. En ese caso, la sucesión de Sturm puede tomarse como:

$$\{R_0, R_1, \dots, R_{m-1}, R_m\}.$$

En caso contrario, si R_m es un polinomio (no una constante), entonces las raíces de R_m son las raíces múltiples de P y además se tiene que su multiplicidad *como raíces de P es la multiplicidad como raíces de R_m más una unidad.*

Teorema 35 .- *(Sturm)*
Sea P un polinomio de grado $n \geq 1$. Sea $[a, b] \subset R$ un intervalo tal que $P(a).P(b) \neq 0$. Entonces el número de raíces reales distintas de P en el intervalo (a, b) es igual a $v^*(a) - v^*(b)$, donde:

$$v^*(x) = V(p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)),$$

siendo $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ una sucesión de Sturm relativa a P y a $[a, b]$.

Una vez localizadas las raíces reales de un polinomio P podemos pasar a su cálculo o aproximación. Todos los métodos estudiados para ecuaciones numéricas generales (por ejemplo, Newton-Raphson) son válidos para polinomios. Pero además también tenemos otros métodos específicos para polinomios:

Algoritmo de Lin: Sea el polinomio de grado n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad \text{con } a_n \neq 0.$$

Sea $\alpha \in R$ una raíz de P. Entonces:

$$P(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

$$\Rightarrow \ \alpha(a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + a_n = 0$$
$$\Rightarrow \ \alpha = -\frac{a_n}{a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}$$
$$\Rightarrow \ \alpha = -\frac{a_n\alpha}{a_0\alpha^{n} + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha}$$
$$\Rightarrow \ \alpha = -\frac{a_n\alpha}{P(\alpha) - a_n} = \frac{a_n\alpha}{a_n - P(\alpha)}.$$

Así pues, α es un punto fijo de la aplicación

$$f(x) = \frac{a_n x}{a_n - P(x)}.$$

El algoritmo de Lin consiste en aplicar el método de I.F.S. para calcular ese punto fijo de f. Es decir, se construye una sucesión $\{x_k\}_{k\in N}$ mediante:

$$x_0 \quad \text{arbitrario,}$$
$$x_{k+1} = \frac{a_n x_k}{a_n - P(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Si la aplicación f verifica las condiciones adecuadas (ya estudiadas previamente), esta sucesión converge al punto fijo α, que es una raíz del polinomio P.

Además de este método, se pueden utilizar entre otros:

Método de Bernouilli: Basado en ecuaciones en diferencias.

Método de Bairstow: Especialmente indicado para el cálculo de pares de raíces complejas.

Método de Laguerre: De orden 3 y, por tanto, utilizable para obtener una raíz con alta precisión.

Método de Graeffe-Lovachevski ...