En este libro se reúnen las lecciones que forman el temario de la asignatura Métodos Numéricos de la E.T.S.I. Telecomunicación. Su único objetivo es servir de guía para los alumnos que sigan dicha asignatura.

Vigo, 25 de mayo de 2004.

Lino J. Alvarez Vázquez
Aurea M. Martínez Varela

.

TEMA 1:

INTRODUCCION Y

NECESIDAD DE LOS

METODOS NUMERICOS

1 DEFINICION DE ANALISIS NUMERICO

El **Análisis Numérico** puede definirse como "la disciplina que se ocupa de la descripción y análisis de los algoritmos numéricos para la obtención de la solución de un problema matemático, en el que intervienen números, ya sea de manera exacta o aproximada". (Henrici)

Los **métodos numéricos** se pueden utilizar en muy diversos campos de la Ingeniería, la Mecánica, la Técnica, la Física . . . y su desarrollo está íntimamente ligado al de los ordenadores y medios informáticos en general.

Una de las principales razones del desarrollo continuo de los métodos numéricos es la posibilidad de simular fenómenos muy complejos que han sido estudiados por los métodos analíticos y experimentales. Esta necesidad de complementar, e incluso sustituir en casos delicados, la aproximación experimental mediante simulaciones numéricas está motivado, aparte del propio interés científico, por cuestiones de simplicidad, seguridad y bajo coste económico.

El carácter del Análisis Numérico como vehículo de conexión entre la Matemática en general y la Informática viene dado por ser la ciencia de los algoritmos. Esto es, la ciencia que permite descomponer el método numérico elegido para la resolución de un problema en operaciones elementales que, a su vez, son fácilmente implantadas en ordenador.

Un cuadro tipo que pone de manifiesto esta conexión es el siguiente:

1. **El problema:** Cualquiera que sea su naturaleza, el problema debe estar a priori claramente expuesto. Es decir, debe ser un problema bien planteado. Es necesario que el problema tenga sentido desde el punto de vista de su tratamiento por ordenador (aunque en ocasiones no se configurará ese aspecto) y deberá conocerse la existencia de una eventual solución (antes de pasar a su resolución informática).

2. **El método de resolución:** Consiste en la descripción del procedimiento que permite obtener la solución del problema. Este método puede ser planteado por una formulación matemática o bien por consignas de tipo literal. Es claro que los métodos del Análisis Numérico se exponen generalmente mediante formulaciones matemáticas y estas deben conducir a un algoritmo, lo cual probará que el metodo es utilizable.

3. **El algoritmo:** Es la estrategia que permite descomponer el método en un número finito de operaciones elementales (operaciones aritméticas, lógicas o de transferencia). El algoritmo debe tener un principio y un fin claros y, por ello, se suele dar una descripción de él mediante un organigrama.

4. **El programa informático:** La programación es la traducción del algoritmo a un lenguaje máquina. Esta lenguaje debe poder satisfacer todas las operaciones que figuran explícitamente en el algoritmo. De esta forma se establece el paso de las ideas y expresiones matemáticas al ordenador.

5. **El tratamiento máquina:** Es el paso por el cual se ejecuta el método de resolución mediante el programa intrermediario en un ordenador. El sistema informático utilizado debe disponer de los recursos necesarios:

   (a) logicales: compiladores, funciones, subprogramas ...

   (b) materiales: tamaño de memoria, velocidad de ejecución, periféricos de salida ...

6. **La interpretación de los resultados:** Los resultados que proporciona el ordenador deben ser siempre analizados. Su control es absolutamente necesario porque no existe regla alguna que permita afirmar a priori que el programa ha realizado todos los cálculos correctamente.

2 CONCEPTOS QUE TRATA EL ANALISIS NUMERICO

Los problemas propios de la disciplina pueden dividirse en los dos grandes grupos siguientes: problemas en dimensión finita y problemas en dimensión infinita.

2.1 Problemas en dimensión finita

Son problemas de naturaleza numérica en los que intervienen números en cantidad finita: cálculo de raíces de ecuaciones algebraicas, resolucion de sistemas de ecuaciones, cálculo de determinantes, inversión de matrices, cálculo de autovalores y autovectores ...

En todos estos problemas, el Análisis Numérico debe proporcionar algoritmos que permitan el cálculo exacto o aproximado de la solución.

2.2 Problemas en dimensión infinita

Son problemas donde intervienen elementos con infinitos grados de libertad (por ejemplo, funciones): interpolación y aproximación, derivación e integración numérica, resolución de ecuaciones diferenciales ...

El analista numérico debe ocuparse de la aproximación de un problema de este segundo grupo por otros del primero, de modo que serán estos últimos los que se resuelvan en el ordenador. Este proceso de aproximación de un problema en dimensión infinita por el paso a dimensión finita se conoce como **discretización** y se realiza, principalmente, con ayuda de la teoría de interpolación y aproximación de funciones. En general, la discretización será buena cuando la solución del problema aproximado converja a la del problema original, cuando la dimensión tienda a infinito.

Ligado a este problema de convergencia, el analista debe ocuparse de la estimación del error cometido al reemplazar la solución exacta por la aproximada, es decir, el llamado **error de discretización**.

Una vez reducido, en caso necesario, el problema en dimensión infinita a uno en dimensión finita, el analista ha de dedicarse a la descripción y análisis de los algoritmos numéricos utilizados en su resolución. Con frecuencia se presentarán problemas que no puedan resolverse mediante **métodos directos** (en un número finito de operaciones se llega a la solución exacta), lo cual nos llevará al uso de **métodos iterativos** (se construye una sucesión infinita de iterantes que en el límite converge a la solución exacta), aunque en la práctica solamente podrán calcularse un número finito de iterantes. El error que se comete al detener el proceso infinito en un paso determinado: el **error de truncamiento** (o error de convergencia), debe ser considerado cuidadosamente.

Un tercer tipo de error, de especial importancia en el cálculo a gran escala, es el **error de redondeo**. Dicho error se debe a la imposibilidad de representar exactamente en un ordenador todas las cifras de un número, tanto real como complejo. Si a esto añadimos que la aritmética utilizada por el ordenador es distinta a la que habitualmente manejamos, se comprenderá que este error sea de gran importancia cuando se realicen un número elevado de cálculos.

Desde luego, un algoritmo numéricamente inestable (es decir, muy sensible a los errores de redondeo) debe ser desechado, ya que los resultados que proporcione pueden diferir totalmente de la solución real del problema. Para estudiar la propagación de los errores es preciso conocer el **condicionamiento** del problema (sensibilidad de los resultados del problema frente a pequeños cambios en los datos de partida). La resolución de un problema mal condicionado conduce a un funcionamiento incierto de los algoritmos. En estos casos habrá que mejorar el condicionamiento, es decir, de alguna manera equilibrar el problema. Por todo esto se hace necesario buscar algoritmos con el menor número posible de operaciones (algoritmos de bajo coste).

En resumen, existen tres tipos de problemas dentro de los que trata el Análisis Numérico:

1. Problemas de gran complejidad matemática para los que no existe una solución analítica conocida y que requieren una solución aproximada: el Análisis Numérico se ocupa de proponer y analizar métodos que den aproximaciones de la solución requerida.

Por ejemplo, la predicción del tiempo atmosférico.

2. Problemas que pueden ser resueltos analíticamente, pero cuya solución no puede ser explotada en la práctica: el Análisis Numérico se ocupa de proporcionar algún método para la aproximación de la solución que sea sencillo y permita sustituir la solución exacta.

   Por ejemplo, en Electromagnetismo, la ecuación de Bessel:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}(\frac{x}{2})^{n+2k}.$$

3. Problemas que poseen solución matemática calculable por un método exacto, pero que en la práctica son inservibles al consumir mucho tiempo de cálculo u ocupar mucha memoria para almacenamiento de datos: el Análisis Numérico se ocupa de proponer métodos alternativos.

   Por ejemplo, la regla de Cramer para la resolución de un S.E.L.: Así, para resolver un sistema de 10 ecuaciones necesitaríamos realizar alrededor de 40 millones de operaciones.

3 ANALISIS DEL ERROR

No debe olvidarse que valorar la precisión de los resultados de un cálculo es uno de los objetivos primordiales en el Análisis Numérico. Existen distintos tipos de error que pueden limitar esta precisión:

1. **Errores de toma / entrada de datos:**

   Están fuera del control del cálculo y son debidos a las imperfecciones en las mediciones físicas que se realizan. Así aparecen errores en los datos (*ruido*) que deberán ser tenidos en cuenta en el análisis final de los resultados.

2. **Errores de discretización / truncamiento:**

   Para que las aproximaciones finito-dimensionales de un problema sean aceptables es necesaria la *convergencia* de la solución del problema aproximado al exacto. Ligados a este problema están el de la *consistencia* (si la solución exacta pertenece a un cierto subespacio de dimensión finita no se produce error discretización) y el de la *estabilidad* (pequeños cvambios en los datos del problema aproximado producen pequeños cambios en la solución).

   En general, se tiene que convergencia equivale a estabilidad más consistencia.

3. **Errores de redondeo:**

   Aunque los errores de redondeo individuales son pequeños, su efecto acumulativo puede, en virtud del volumen de operaciones efectuadas, crecer rápidamente de suerte que el resultado final al que se llega no se parece en absoluto a la solución exacta (*inestabilidad numérica*). Un algoritmo puede ser numéricamente inestable para un problema y estable para otro. Por ello se pueden distinguir tres tipos de estabilidad:

   (a) Estabilidad del problema a resolver:

   Pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en la solución exacta. Los problemas que no verifican esto se dicen mal condicionados.

   (b) Estabilidad del algoritmo:

   Supuestas las operaciones exactas, pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en la solución proporcionada por el algoritmo.

   (c) Estabilidad numérica:

   El algoritmo debe ser inmune a los efectos acumulativos del error de redondeo.

Así, por ejemplo, para un algoritmo de tipo iterativo dependiendo del parámetro n se dice que tiene *estabilidad numérica absoluta* si el error de redondeo acumulado tiende a cero cuando n tiende a ∞. Si este error está sólo acotado cuando n tiende a ∞, se dice que el algoritmo tiene *estabilidad numérica relativa.*

Estos conceptos están relacionados con otros dos más generales: el error absoluto y el relativo.
Si un número x se aproxima por otro $\tilde{x}$, se llama **error absoluto** a la cantidad:

$$e_a = |x - \tilde{x}|.$$

Se llama **error relativo** a la cantidad:

$$e_r = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}, \quad \text{(o, en ocasiones, } e_r = \frac{|x - \tilde{x}|}{|\tilde{x}|}\text{)}.$$

Ejemplo 1 .-

a) $x = 3,\ \tilde{x} = 3.1 \ \Rightarrow \ e_a = 0.1,\ e_r = 0.03333$

b) $x = 0.003,\ \tilde{x} = 0.0031 \Rightarrow e_a = 0.0001,\ e_r = 0.03333$

c) $x = 3000,\ \tilde{x} = 3100 \ \Rightarrow \ e_a = 100,\ e_r = 0.03333$