METODOS NUMERICOS.
E.T.S.I. Minas. *Boletín de problemas propuestos.*

1. Localizar las raíces de la ecuación $F(x) = 0$:
   (a) $F(x) = x - tg(x)$.
   (b) $F(x) = sen(x) - x + 2$.
   (c) $F(x) = x + e^x$.
   (d) $F(x) = 0.5 - x + 0.2\, sen(x)$.
   (e) $F(x) = x^5 - 3$.
   (f) $F(x) = e^{-x} - sen(x)$.
   (g) $F(x) = x^3 - x - 1$.
2. Sea $F(x) = x - e^{-x}$.
   (a) Separar las raíces de $F(x) = 0$.
   (b) Construir 4 iterantes del método de dicotomía para alguno de los intervalos del apartado anterior.
   (c) Construir 5 iterantes del método de la secante para el intervalo $(0.2, 1)$. Estudiar si converge el método para $\varepsilon = 10^{-4}$. En caso afirmativo, dar una aproximación de la raíz.
   (d) Construir 4 iterantes del método de la "regula falsi" para el intervalo $(0.2, 1)$.
   (e) Construir una función f y un intervalo I de modo que los puntos fijos de f sean los ceros de $F(x) = 0$ y f esté en las condiciones para aplicar el método de iteración funcional. Construir 5 iterantes de dicho método partiendo de $x_0 = 0.2$ y estudiar la convergencia para $\varepsilon = 10^{-2}$.
3. Separar las raíces de la ecuación:
   $$log(x) = 1 + \frac{1}{x}$$
   y aproximarlas con un error menor que 10^{-4} mediante un algoritmo de tipo punto fijo.
4. Aproximar el número:
   $$\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$
   con un error menor que 10^{-2} utilizando: (a) Iteración funcional (b) Newton-Raphson
5. Separar en intervalos de la forma $[m, m+1]$, con $m \in Z$, las raíces de la ecuación:
   $$F(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$
   y aproximar las raíces positivas con un error menor que 10^{-5} mediante un algoritmo de iteración funcional simple.
6. Utilizar un método de iteración funcional para aproximar con un error menor que 10^{-4} la distancia del punto $(0, 0)$ a la curva $y = -e^{-x}$ en la dirección del vector unitario:
   $$v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}).$$
7. Sea $F : [a, b] \longrightarrow R$ una función de clase 2 verificando:
   $$F(a) < 0 < F(b),$$
   $$0 < k_1 < F'(x) < k_2, \quad \forall x \in [a, b],$$

donde k_1, k_2 son dos constantes. Sea $\{x_n\}$ una sucesión construida del modo siguiente:

$$x_0 \in [a, b] \;\; dado,$$

$$x_{n+1} = x_n + MF(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

siendo M una constante no nula. Se pide:

(a) Probar que $F(x) = 0$ tiene una única raíz α en $[a, b]$.

(b) Probar que si $\{x_n\}$ es convergente, entonces su límite es α.

(c) Demostrar que si $-\frac{2}{k_2} < M < 0$ entonces la sucesión converge a α siempre que se tome x_0 suficientemente próximo a α.

(d) ¿ Hay algún valor de M que garantice que el método sea de orden 2 ?

(e) Encontrar valores de M que garanticen que la sucesión $\{x_n\}$ puede construirse y es convergente a α, partiendo de cualquier punto $x_0 \in [a, b]$.

8. Sean c un número real positivo y k un entero mayor que uno. Encontrar condiciones bajo las cuales se puede aplicar el método de Newton-Raphson en un intervalo (a, b) para aproximar la raíz k-ésima de c.

   Calcular utilizando dicho método la raíz quinta de 3 con un error menor que 10^{-5}.

9. Sea $p(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2x + 1$.

   (a) Calcular el valor de p y todas sus derivadas en el punto $x = 3$.

   (b) Acotar todas las raíces de $p(x) = 0$.

   (c) Comprobar si tiene raíces complejas.

10. Calcular las cotas superiores e inferiores de las raíces reales positivas y negativas del polinomio:

$$p(x) = x^6 - 25x^3 + 3x^2 + 2x - 30 = 0$$

11. Se considera el polinomio $p(x) = 3x^3 - 13x^2 + 20x - 14$. Se pide:

    (a) Acotar todas las raíces de p.

    (b) Dar unas buenas cotas para las raíces reales de p.

    (c) Separar las raíces reales utilizando Sturm.

12. Acotar y separar las raíces reales de $p(x) = x^5 - 5x + 1$.

13. Clasificar, acotar y separar por Sturm las raíces de $p(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 10x - 12$.

14. Separar por Sturm las raíces de $p(x) = x^3 - 5x + 2$.

15. Acotar las raíces reales de $p(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 4x^2 + 8x - 4$. Construir una sucesión de Sturm relativa a p y utilizarla para separar sus raíces reales.

16. Aproximar el punto de la parábola $y = x^2$ más próximo al punto $P = (3, 1)$ utilizando Newton-Raphson.

17. La función exponencial se puede desarrollar en serie de potencias de la forma siguiente:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in R.$$

    Supongamos que se aproxima e^x por:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in R.$$

    Se pide:

(a) Utilizando la regla de Descartes, determinar cuántas raíces reales positivas y negativas puede tener el polinomio $p(x)$. ¿Se puede garantizar, usando el teorema de Hua, que $p(x)$ tiene raíces complejas?

(b) Dar una cota inferior y una cota superior de las raíces reales negativas de $p(x)$.

(c) Acotar todas las raíces reales y complejas de $p(x)$.

(d) Determinar el número exacto de raíces reales negativas.

(e) Utilizar los apartados anteriores para calcular el número exacto de raíces complejas.

(f) Encontrar un intervalo apropiado de modo que se verifiquen las hipótesis de convergencia global del método de Newton-Raphson para calcular una raíz real negativa de $p(x)$. Aproximar dicha raíz con 5 cifras decimales exactas.

18. Resolver por los métodos de Gauss normal, con pivote parcial y con pivote total el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Calcular el determinante de la matriz del sistema.

19. Calcular la inversa de la matriz A por el método de Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Resolver por el método LU el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 13x_2 & + & 12x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

21. Resolver por el método de Crout el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

22. Resolver por el método de Cholesky el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & & & = & 16 \\ -x_1 & & & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}\right.$$

23. Resolver, utilizando la factorización QR, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

24. Se considera la matriz tridiagonal simétrica definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & z_2 & & & & & \\ z_2 & x_2 & z_3 & & & 0 & \\ & z_3 & . & . & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & 0 & & & . & . & z_n \\ & & & & & z_n & x_n \end{pmatrix}$$

Probar que admite una factorización de Cholesky con una matriz B de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & & & & \\ c_2 & a_2 & 0 & & & 0 & \\ & c_3 & . & . & & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & \\ & 0 & & & . & . & 0 \\ & & & & & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

y además:

$$a_1 = \sqrt{x_1},$$

$$c_s = \frac{z_s}{a_{s-1}}, \quad a_s = \sqrt{x_s - c_s^2}, \quad s = 2, 3, \dots, n.$$

25. Calcular para qué valores de α y β se pueden factorizar por Cholesky las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \beta \\ \beta & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 1 & -1 \\ 2 & 2\alpha + 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

26. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & \beta \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde α y β son parámetros reales. Se desea resolver un sistema $Ax = b$ por un método iterativo clásico.

(a) Construir la matriz del método de Gauss-Seidel y probar que dicho método es convergente si y sólo si $\mid \alpha + \beta \mid < 6$.

(b) Para $\alpha = \beta = 0$ estudiar la convergencia del método de Jacobi.

27. Discutir según los valores del parámetro real ε la convergencia del método de Gauss-Seidel para sistemas con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizar estos resultados para garantizar la convergencia de dicho método al resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 0.5\,x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 0.5\,x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 0.5\,x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

u otro equivalente.

28. Demostrar que el método de Jacobi es convergente si lo aplicamos al sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Partiendo del iterante inicial $x_0 = (1, 1, 1)$ calcular los cinco primeros iterantes y deducir cúal es el límite de la sucesión.

29. El método de Richardson se define utilizando un parámetro real positivo α de la forma siguiente:

$$x_0 \;\; arbitrario,$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k), \quad k \geq 0.$$

   (a) Determinar si el método de Richardson se basa en una descomposición de $A = M - N$. Obtener la matriz y el vector del método.
   (b) Si A es simétrica y definida positiva, demostrar que una condición necesaria y suficiente para la convergencia del método es que:
   $$\alpha < \frac{2}{\rho(A)}.$$
   En este caso comprobar que la sucesión converge a la solución del sistema $Ax = b$.
   (c) Para el sistema:
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$
   probar que el método de Richardson es convergente con $\alpha = \frac{1}{5}$.

30. Se considera el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

   (a) Construir la matriz del método de Jacobi J.
   (b) Calcular $|| \; J \; ||_\infty$ y $|| \; J \; ||_1$.
   (c) Estudiar la convergencia del método de Jacobi.
   (d) Calcular los 3 primeros iterantes a partir de $x_0 = (0, 0, 0)$.

31. Sea el sistema $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar los valores de ω para los cuales el método de relajación resulta convergente.

(b) Construir a partir de $x_0 = (1, 1, 1)$ los cuatro primeros iterantes para el método de Gauss-Seidel.

(c) Construir la matriz J del método de Jacobi y estudiar la convergencia de dicho método.

32. Dado el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} x & = & A & sen(x) & + & B & cos(y) \\ y & = & A & cos(x) & - & B & sen(y) \end{array} \right.$$

(a) Dar condiciones sobre A y B para que el método de iteración funcional sea convergente.

(b) Dar condiciones sobre A y B para que el método de Newton sea localmente convergente.

33. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con $A \in M_{n\times n}(R)$ inversible, $b \in R^n$, se propone el siguiente método iterativo:

- Escoger una matriz H fácilmente inversible (por ej., triangular, tridiagonal,...)
- Tomar $x_0 \in R^n$ tal que $Hx_0 = b$.
- Hacer iteraciones para construir la sucesión $\{x_k\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Hy_k = b - Ax_k, \\ x_{k+1} = x_k + y_k, \quad k = 0, 1, \ldots \end{array} \right.$$

Se pide:

(a) Escribir el método en la forma de los métodos iterativos clásicos.

(b) Establecer una condición de convergencia en función de las matrices A y H para que la sucesión $\{x_k\}$ converja a la solución x del sistema de partida.

(c) Si la matriz A admite una factorización de Choleski con matriz triangular inferior con unos en la diagonal, y se toma como H dicha matriz de Choleski, ¿se puede asegurar la convergencia del método?

34. Explicar cómo se puede aplicar el método de Hyman para calcular el determinante de una matriz Hessenberg superior.

Aplicarlo al cálculo del determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

35. Calcular los autovalores de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

utilizando Leverrier y Krylov. Calcular el autovalor dominante de esta matriz utilizando el método de la potencia.

36. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que 2 es una primera aproximación de un autovalor de A, mejorar dicha aproximación por el método de la potencia inversa, mediante el cálculo de los términos u^1, u^2, u^3, u^4 de la sucesión, tomando como término inicial $u^0 = (1, 1, 1)$. Calcular un autovector asociado. (Todos los sistemas lineales que aparezcan deberán resolverse por el método LU).

Utilizar el método de deflacción de Hotelling para determinar el resto de los autovalores de A.

37. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el autovalor dominante con 3 cifras decimales exactas.

(b) Acotar el autovalor más próximo a -1 en un intervalo (a, b) con $\mid a - b \mid \leq 2.10^{-2}$ y calcular un autovector asociado.

38. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 2 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

calcular todos sus autovalores con 2 cifras decimales exactas.

39. Calcular el autovalor más próximo a $\frac{10}{3}$ y un autovector asociado para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

eligiendo $u_0 = (4, 2, 1)$. (Calcular 6 iterantes).

40. Transformar en Hessenberg superior la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

41. Tridiagonalizar la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Sea la matriz tridiagonal simétrica:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Comprobar si D es definida positiva.

(b) Calcular cuantos autovalores tiene D en $(-3,-1)$.

(c) Dar una buena cota del radio espectral $\rho(D)$.

(d) Comprobar si -2 es un autovalor de D.

43. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular una sucesión de Sturm relativa al polinomio característico de A. Utilizarla para:

(a) Demostrar que A es definida positiva.

(b) Separar los autovalores de A en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

44. Sea la matriz tridiagonal simétrica:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Comprobar si B es definida positiva.

(b) Calcular cuantos autovalores tiene B en $(-2,0)$.

(c) Dar una buena cota de $\rho(B)$.

(d) Comprobar si -4 es un autovalor de B.

45. Demostrar, basándose en resultados conocidos, el siguiente enunciado:

" Sea A una matriz cuadrada de orden n, simétrica, inversible y con todos sus autovalores de módulo diferente:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|\,.$$

Entonces existe una matriz inversible P tal que:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Si la matriz P^{-1} admite una factorización LU entonces la sucesión $\{A_k\}_{k\in N}$ obtenida por el método QR converge a la matriz diagonal D. "

¿Se puede asegurar un comportamiento similar para el método LR ?

46. Calcular por Hyman el polinomio característico de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

47. Explicar cómo utilizar el método de Householder-Hyman para calcular el determinante de cualquier matriz. Aplicar dicho proceso para calcular el determinante de la matriz tridiagonal simétrica de orden 4 dada por:

$$a_{ii} = 2, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

$$a_{i+1,i} = -1, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

48. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizar el método QR, calculando hasta el cuarto iterante, para aproximar los autovalores de A.

49. Sea $f(x) = sen(x)$. Sean $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{\pi}{6}$. Calcular:
   (a) El polinimio de Lagrange para $f(x)$ relativo a los nodos $x_0,\ x_1,\ x_2$.
   (b) El polinimio de Taylor para $f(x)$ de grado 3 relativo a x_0.
   (c) El polinimio de Hermite para $f(x)$ relativo a los nodos $x_0,\ x_1$.

50. Sea $f(x) = 2^x$. Sean $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4$. Calcular:
   (a) El polinimio de Lagrange para $f(x)$ relativo a los nodos $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.
   (b) El polinimio de Taylor para $f(x)$ de grado 3 relativo al punto x_0.
   (c) El polinimio de Hermite relativo a $f(x)$ y a los nodos $x_0,\ x_1$.

51. Calcular el polinomio p_2 de grado menor o igual que 2 que interpola la función $f(x) = cos(\frac{x}{2})$ en los puntos $-\pi,\ 0,\ \pi$.

   Acotar el error cometido al aproximar la función f por p_2 en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

52. Sea p_n el polinomio de Lagrange que interpola la función $f(x) = e^x$ en los nodos:

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

   Calcular para qué valores de n se puede asegurar que:

$$\mid f(x) - p_n(x) \mid < 10^{-6}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

53. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y los nodos $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$.
   (a) Calcular el único polinimio de grado 3 que interpola $f(x)$ en los nodos $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ utilizando la fórmula de Newton-Gregory progresiva.
   (b) Acotar el máximo error de interpolación en el intervalo $[2, 3]$.

54. Calcular numéricamente $\sqrt{2}$ interpolando la función $f(x) = 2^x$ en los nodos $-1, 0, 1, 2$ mediante la fórmula de Newton-Gregory regresiva.

   Acotar el error cometido con tal aproximación.

55. Calcular el spline S de orden 1 que en los puntos $0,\ 1,\ 2,\ 3$ vale, respectivamente, $2,\ 1,\ 1,\ -1$.

56. Calcular el spline cúbico natural S que en los puntos $0,\ 1,\ 2,\ 3$ vale, respectivamente, $0,\ 2,\ 5,\ 7$.

   Calcular el polinomio de Lagrange p_3 correspondiente a los mismos datos y compararlo con S.

57. Obtener los coeficientes de la fórmula de derivación de tipo interpolatorio polinómico siguiente:

$$f'(x_0) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_0 + h) + A_2 f(x_0 + 2h) + A_3 f(x_0 - h) + A_4 f(x_0 - 2h).$$

58. Determinar el número de puntos del intervalo $[0,1]$ suficiente para obtener con 4 cifras decimales exactas el valor de:

$$log(2) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

utilizando las fórmulas compuestas de:

(a) Trapecio,

(b) Simpson.

59. Sea la función f tal que:

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(3) = \sqrt{3},\ f(4) = 2.$$

Calcular numéricamente $f'(1)$ y $\int_1^3 f(x)dx$.

Comprobar los errores cometidos, teniendo en cuenta que $f(x) = \sqrt{x}$.

60. Calcular numéricamente $log(2)$ evaluando, mediante las fórmulas de Poncelet, Trapecio y Simpson, la integral:

$$log(2) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Estimar el error cometido con cada una de las aproximaciones.

61. Se conocen los valores de la función f en los puntos $0,\ 1,\ 2,\ 3$ que son, respectivamente, $2,\ 1,\ 0,\ 5$. Además se sabe que las cuatro primeras derivadas de f están acotadas en valor absoluto por $M = 2$ en el intervalo $[0,3]$. Se pide:

(a) Calcular el polinomio de Lagrange $P_3(x)$ y acotar el error que se comete al considerar $P_3(0.5)$ como aproximación de $f(0.5)$.

(b) Calcular $f''(0.5)$.

(c) Calcular $\int_0^3 f(x)dx$.

62. Sea:

$$H(t) = \int_0^t e^{-x^2}\ dx, \quad t \geq 0.$$

Utilizando una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico para los nodos:

$$0,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ 2$$

calcular $H(2)$ y estimar el error cometido en función de una cota para las derivadas de $f(x) = e^{-x^2}$.

63. Sea la función f tal que:

$$f(4) = 2,\ f(9) = 3,\ f(16) = 4.$$

Calcular numéricamente, comprobando los errores cometidos:

(a) $f(8)$

(b) $f'(6)$

(c) $\int_4^{16} f(x)dx$

(Para comprobar los errores, tener en cuenta que $f(x) = \sqrt{x}$).

64. Sea la fórmula de cuadratura:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

para los nodos:

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

(a) Determinar para n impar cuánto vale:

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_{\frac{n-1}{2}}.$$

(b) Calcular $\int_0^2 log(1+x)dx$ mediante una fórmula de cuadratura del tipo anterior para $n = 3$.

(c) Hacer lo mismo para $\int_0^2 \frac{1}{1+x}dx$, determinando el eror cometido.

65. Calcular:

$$I_n = \int_n^{n+1} e^{16x^2}\, dx, \quad n \in Z,$$

utilizando una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico para los cinco nodos:

$$n + \frac{i}{4}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

66. Se considera la función $f(x) = e^{-x^2}$:

(a) Se aplica el algoritmo de dicotomía para calcular α tal que:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Determinar, sin cálcularlos, cúal es el primero de los iterantes con una cifra decimal exacta tomando como intervalo inicial $[0, 1]$. Calcular dicho iterante.

(b) ¿Se podría utilizar el método de Newton-Raphson para calcular α iniciándolo en cualquier $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$?

(c) Deducir la fórmula abierta de Newton-Cotes de 4 puntos para cualquier intervalo $[a, b]$.

(d) Aplicar dicha fórmula para calcular la integral:

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

(e) Calcular la integral anterior mediante la fórmula de Simpson compuesta con 4 subintervalos y acotar el error cometido.

67. Se consideran los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ simétricamente distribuidos respecto del cero, esto es:

$$x_i = -x_{n-i}, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

(a) Sea $l_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, n$, el polinomio de Lagrange correspondiente al nodo x_i, es decir, tal que:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, n.$$

Demostrar que:

$$l_i(-x) = l_{n-i}(x), \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n, \quad \forall x \in R.$$

Probar que si n es par, entonces los coeficientes del polinomio de Lagrange $l_{\frac{n}{2}}(x)$ correspondientes a las potencias impares de x son nulos.

(b) Sea f una función regular definida en toda la recta real. Se considera la fórmula de derivación siguiente:

$$f'(0) \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i).$$

Demostrar que:

$$A_i = -A_{n-i}, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

Probar que si n es par, entonces $A_{\frac{n}{2}} = 0$.

(c) Sea a un número real positivo. Se considera la fórmula de cuadratura siguiente:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i).$$

Demostrar que:

$$A_i = A_{n-i}, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

68. Calcular las soluciones de las ecuaciones en diferencias de orden 1 siguientes:

(a) $y_{n+1} - y_n = 0, \quad y_0 = 1.$

(b) $y_{n+1} - y_n = 3, \quad y_0 = 1.$

(c) $y_{n+1} - y_n = 4n, \quad y_0 = 1.$

(d) $y_{n+1} - y_n = 5^n, \quad y_0 = 1.$

(e) $y_{n+1} - y_n = 3 + 4n + 5^n, \quad y_0 = 1.$

69. Calcular la sucesión de Fibbonacci resolviendo la ecuación en diferencias de orden 2 siguiente:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

con condiciones iniciales $y_0 = y_1 = 1$.

70. Resolver la ecuación en diferencias de orden 2:

$$y_{n+2} = \alpha y_n$$

en función del parámetro real α.

Calcular los valores de α para los cuales se puede asegurar que existe $lim_{n\to\infty} y_n$ y deducir el valor que toma dicho límite.

71. Calcular la solución de la ecuación en diferencias de orden 2 siguiente:

$$y_{n+2} = 2(y_n + y_{n+1} + 3)$$

con condiciones iniciales $y_0 = -1, \;\; y_1 = -1 - \sqrt{3}$.

72. Resolver las ecuaciones en diferencias de orden 3 siguientes:

(a) $y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 3^n, \quad y_0 = 0, \; y_1 = \frac{1}{4}, \; y_2 = \frac{1}{2}.$

(b) $y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 8, \quad y_0 = 0, \; y_1 = 0, \; y_2 = 4.$

(c) $y_{n+3} - 6y_{n+2} + 12y_{n+1} - 8y_n = 48\ 2^n, \quad y_0 = 0, \; y_1 = 2, \; y_2 = 32.$

73. Sea y_n la suma de los cubos de los números naturales de 0 a n, es decir:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Calcular el valor de y_n planteando y resolviendo una ecuación en diferencias de orden 1.

74. Se tiene el siguiente algoritmo iterativo:

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitrario}, \\ x_{k+1} = \dfrac{1}{2 + 2x_k}, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

(a) Demostrar que la sucesión así construida es convergente para cualquier $x_0 \in [0, 1]$. Calcular el límite α de dicha sucesión.

(b) Partiendo de $x_0 = 0$, calcular x_4 y dar una estimación del error $\mid x_4 - \alpha \mid$.
Utilizar lo valores de α y x_4 para dar una aproximación del número $\sqrt{3}$.

75. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 270 \\ -90 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular la factorización Cholesky de A. Explicar por qué es A definida positiva.

(b) Para resolver el sistema $Ax = b$ se considera la descomposición $A = M - N$ con $N = 2I$. Describir el método iterativo asociado a dicha descomposición y ponerlo en la forma:

$$x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(c) Explicar cómo determinar el espectro de B mediante el cálculo de las raíces del polinomio $det(\lambda M - N) = 0$. Calcular el radio espectral de B.

(d) Estudiar la convergencia del método iterativo del apartado (b).

76. Se considera el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$.

(a) Utilizando la regla de Descartes, determinar el número de raíces reales del polinomio $p(x)$. ¿Cúantas raíces complejas puede tener?

(b) Determinar el número exacto de raíces reales positivas menores o iguales que 4.

(c) Determinar un intervalo en el cual se verifiquen las hipótesis de convergencia global del método de Newton-Raphson.

(d) Aproximar la raíz localizada en el apartado (c) utilizando el algoritmo de Newton-Raphson con un error menor que 10^{-5}.

(e) Calcular x_3 y x_4 por el método de "regula falsi" cuando tomamos $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$.

77. Sea una función $f(x)$ de la cual se conocen los valores:

$$w_0 = f(-1), \quad w_1 = f(1), \quad w_2 = f'(-1), \quad w_3 = f'(1).$$

Se pide:

(a) Encontrar los valores b_0, b_1, b_2, b_3 de modo que el polinomio de grado 3 definido por:

$$p(x) = b_3(x-1)^2(x+1) + b_2(x-1)(x+1)^2 + b_1(x-1)^2 + b_0(x+1)^2$$

verifique:

$$p(-1) = w_0, \quad p(1) = w_1, \quad p'(-1) = w_2, \quad p'(1) = w_3.$$

(b) Probar que el anterior polinomio $p(x)$ es el único polinomio en $\mathcal{P}_3$ solución del problema de interpolación planteado.

(c) Si se aproxima numéricamente:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \simeq \int_{-1}^{1} p(x)\, dx$$

calcular los coeficientes de la fórmula de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \simeq B_0 f(-1) + B_1 f(1) + B_2 f'(-1) + B_3 f'(1).$$

78. Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$\begin{cases} y_{n+3} - y_{n+2} + 4y_{n+1} - 4y_n = 100n, \\ y_0 = -4, \\ y_1 = y_2 = 0. \end{cases}$$

79. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(R)$ una matriz inversible y no simétrica. Sea $b \in R^n$.

    (a) Demostrar que la matriz A^tA admite una factorización de Cholesky, es decir, $A^tA = BB^t$ con B matriz triangular inferior de elementos diagonales positivos.

    (b) Demostrar, utilizando el apartado (a), que la matriz A^tA admite una factorización LU, es decir, $A^tA = LU$ con U matriz triangular superior y L matriz triangular inferior de elementos diagonales iguales a 1.

    Determinar la relación existente entre las matrices L, U y B.

    (c) Explicar, utilizando el apartado (a), cómo usar el método de Cholesky para resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.

    Describir brevemente el algoritmo de resolución de dicho sistema.

80. (a) Se plantea el siguiente problema de interpolación: Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:

    $$p(x_0) = w_0, \quad p(x_1) = w_1, \quad p''(x_0) = w_2, \quad p''(x_1) = w_3.$$

    ¿Tiene siempre solución única el problema de interpolación cualesquiera que sean los puntos reales x_0 y x_1? Justificar la respuesta.

    (b) Calcular los coeficientes A_i de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:

    $$f''(0) \simeq A_0 f(0) + A_1 f(-h) + A_2 f(-2h) + A_3 f(h) + A_4 f(2h),$$

    siendo h un número real conocido.

    (c) Calcular el valor de las constantes B_0 y B_1 para que la fórmula de integración numérica:

    $$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx \simeq B_0 f(0) + B_1 f(\pi),$$

    sea exacta para todas las funciones del tipo: $a + b\,cos(x)$, con a y b números reales.

81. Se considera la siguiente función:

    $$F : x \in [0.1, 3] \longrightarrow F(x) = log(x) - cos(x) + 2 \in R.$$

    (a) Probar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $[0.1, 3]$.

    (b) Aproximar dicha raíz con cuatro cifras decimales exactas utilizando un algoritmo de iteración funcional simple.

    (c) Encontrar un intervalo en el cual se verifiquen las hipótesis del teorema de convergencia global del método de Newton-Raphson y calcular cuatro iterantes utilizando dicho método.

82. Se considera la matriz:

    $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Calcular el autovalor de A más próximo a $\frac{2}{3}$ por el método de la potencia inversa, mediante el cálculo de los cuatro primeros términos u^1, u^2, u^3, u^4 de la sucesión, tomando como primer término $u^0 = (1,1,1)$.

Obtener un autovector asociado a dicho autovalor.

(Todos los sistemas lineales que aparezcan deberán resolverse por el método LU.)

83. Sea y_n definido por:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - k)\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Calcular el valor de y_n planteando y resolviendo una ecuación en diferencias de orden 1.

84. Dada la matriz $A \in M_{nxn}(R)$ definida por $a_{ij} = \min\{i, j\}$, se pide:

(a) Comprobar que es definida positiva viendo que admite una factorización del tipo Cholesky.

(b) Calcular su determinante y su inversa utilizando dicha factorización.

(c) Demostrar para el caso $n = 3$ que el método iterativo de Jacobi converge a la solución del sistema $Ax = b$, con $b \in R^n$, cualquiera que sea el vector inicial x_0.

85. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 2m+3 & 0 \\ -1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Encontrar el mayor entero positivo m para que A admita factorizacin Cholesky.

(b) Calcular la solución del S.E.L. $Ax = b$, con $b = (2, 16, 8)$ por el método de Cholesky para el parámetro m del apartado anterior.

(c) En ese mismo caso comprobar si el método de Gauss-Seidel es convergente.

86. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) Calcular A^{-1} por el método de Gauss-Jordan.

(b) Hallar la matriz J del método iterativo de Jacobi para la resolución del S.E.L. $Ax = b$, con $b \in R^3$ dado.

(c) Comprobar si existe algún vector $c \in R^3$ tal que la sucesión:

$$x_{k+1} = Jx_k + c, \quad k \geq 0$$

con x_0 arbitrario, sea convergente al vector $x = (1, 1, 1)$.

87. Se considera el S.E.L. $Ax = b$ con $A \in M_{nxn}(R)$ simétrica e inversible. Se considera también el sistema equivalente al anterior $A^2x = Ab$. Probar que el método de relajación para la resolución de este segundo sistema es siempre convergente si $0 < w < 2$. ¿Se puede asegurar lo mismo para el primer sistema?

88. Para $a \in R$, $\mid a \mid < 1$, se define la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ y se intenta resolver por un método iterativo clásico. Se pide:

(a) Si la matriz A es definida positiva, ¿son convergentes los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación?. Razonar la respuesta.

(b) Si se añade la hipótesis de considerar la matriz $2I - A$ definida positiva, ¿son convergentes los métodos anteriores?. Razonar la respuesta.

89. Para estudiar la solución del S.E.L. $Ax = b$, $A \in M_{nxn}(R)$, $b \in R^n$, se considera el algoritmo iterativo:

$$x_{k+1} = (I - w(D-E)^{-1}A)x_k + (D-E)^{-1}wb, \quad w > 0.$$

(a) Comprobar si el método anterior corresponde a un método iterativo clsico.

(b) Encontrar una relación entre la matriz B del método anterior y la matriz B' del método de Gauss-Seidel. Escribir los autovalores de B en funcin de los de B'.

(c) Estudiar la convergencia del método de Gauss-Seidel y del método anterior para $w = 1.11$ cuando la matriz del S.E.L. es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

En el caso de que ambos métodos sean convergentes, ¿cuál de ellos lo es más rápidamente?.

90. Se considera el polinomio de grado $n \geq 2$ y coeficientes reales:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

(a) Demostrar que si α es una raíz compleja (no real) de $p(x)$, entonces existe un polinomio de grado 2 y coeficientes reales que divide exactamente a $p(x)$.

(b) Si consideramos un polinomio de grado 2 y coeficientes reales $w(x) = x^2 - u\,x - v$ se tiene que $p(x) = q(x).w(x) + r(x)$, con:

$$q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \ldots + b_3 x + b_2, \qquad r(x) = b_1(x-u) + b_0.$$

Demostrar que los coeficientes b_k verifican la ecuación en diferencias siguiente:

$$b_k - u\,b_{k+1} - v\,b_{k+2} = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-2, \qquad b_{n-1} - u\,b_n = a_{n-1}, \qquad b_n = a_n.$$

(c) Según el apartado anterior, los coeficientes b_1 y b_0 de $r(x)$ dependen de u y v, esto es: $(b_1, b_0) = F(u,v)$. ¿Qué relación existe entre la solución del sistema de ecuaciones no lineales $F(u,v) = (0,0)$ y las raíces de $p(x) = 0$?

Describir el método de Newton para resolver el sistema no lineal $F(u,v) = (0,0)$ y aplicarlo al cálculo de raíces de $p(x) = 0$. (Se denomina *método de Bairstow*).

91. Sea $A \in M_{n\times n}(R)$ simétrica y definida positiva con autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$.

Para cada vector $x \in R^n$, $x \neq 0$, se define el cociente de Rayleigh de x en la forma:

$$R(x) = \frac{x^t A x}{x^t x}.$$

(a) Demostrar que:

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} R(x).$$

(b) Se construye la sucesión de vectores $\{u^k\}_{k \in N}$ en la forma:

$$\begin{cases} u^0 \in R^n \quad \text{arbitrario,} \\ u^{k+1} = Au^k, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Demostrar que si definimos $\xi^k = R(u^k)$, entonces la sucesión de números reales $\{\xi^k\}_{k \in N}$ converge a λ_1 siempre que u^0 esté *bien elegido.* Precisar de manera correcta la definición de *bien elegido.*

(c) Explicar cómo utilizar el método de la potencia inversa para calcular λ_n.

92. Se considera el polinomio $P(x) = 2x^3 + 8x^2 + 8x + 1$.

(a) Contestar *razonadamente* a las siguientes preguntas:
¿Tiene $P(x)$ raíces reales positivas?
¿Tiene $P(x)$ raíces complejas no reales?

(b) Obtener unas *buenas* cotas inferior y superior para las raíces negativas de $P(x)$.

(c) Localizar, por Sturm, las raíces reales negativas de $P(x)$ en intervalos de la forma $[m, m+1]$, con $m \in Z$. ¿Cuántas raíces complejas (no reales) tiene $P(x)$?

(d) Para calcular la raíz de $P(x)$ de menor módulo se utiliza el algoritmo de Lin. Describir la sucesión que se obtiene por dicho método y demostrar su convergencia global en un intervalo real adecuadamente elegido.

(e) Utilizando el algoritmo de Lin y partiendo de $x_0 = 0$, calcular x_6. ¿Cuántos iterantes serían necesarios teóricamente para aproximar la raíz con tres cifras decimales exactas? ¿Cuántos se necesitan calcular en la práctica?

93. (a) Se plantea el siguiente problema de interpolación: Hallar una función interpolatoria $p(x)$ de la forma:

$$p(x) = A_0 + A_1\, sen(x) + A_2\, cos(x)$$

tal que:

$$p(0) = 1, \quad p(\frac{\pi}{2}) = 2, \quad p(\pi) = 3.$$

¿Tiene este problema solución? ¿Es única la solución? En caso afirmativo, calcularla.

(b) Se plantea el siguiente problema de interpolación: Hallar una función interpolatoria $q(x)$ de la forma:

$$q(x) = B_0 + B_1\, sen(x) + B_2\, cos(x) + B_3\, sen(2x) + B_4\, cos(2x)$$

tal que:

$$q(-\pi) = q(-\frac{\pi}{2}) = q(0) = q(\frac{\pi}{2}) = q(\pi) = 3.$$

¿Tiene este problema solución? ¿Es única la solución? En caso afirmativo, calcularla.

(c) Calcular los coeficientes C_i de la fórmula de derivación de tipo interpolatorio polinómico:

$$f''(2) \simeq C_0\, f(0) + C_1\, f(\frac{\pi}{2}) + C_2\, f(\pi).$$

(d) Calcular los coeficientes D_i de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \simeq D_0\, f(0) + D_1\, f(\frac{\pi}{2}) + D_2\, f(\pi).$$

(e) Teniendo en cuenta que:

$$log(3) = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx,$$

aproximar el valor de $log(3)$ por una fórmula de Simpson compuesta con cuatro subintervalos. Dar una acotación del error cometido.

94. Sean $A \in M_{n\times n}(R)$, $b \in R^n$. Para resolver el S.E.L. $Ax = b$ se propone el método iterativo siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \in R^n \ \text{ arbitrario}, \\ (A+\alpha D)y_k = Ax_k - b, \quad k = 0,1,2,\ldots \\ x_{k+1} = x_k - y_k, \quad k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

donde α es un parámetro real y la matriz D es la parte diagonal de A.

(a) Demostrar que el método anterior corresponde a un método iterativo clásico basado en una descomposición de $A = M - N$.
(b) ¿Qué debe verificar α para que el método esté bien definido?
(c) Dar una condición necesaria y suficiente para la convergencia del método en función de A, D y α.
(d) En caso de ser convergente el método, ¿a qué converge la sucesión $\{y_k\}$?
(e) Si A es una matriz triangular superior con unos en la diagonal, determinar todos los valores de α para los cuales el método es convergente. ¿Para qué valor de α la convergencia es más rápida?

95. Sea el polinomio $P(x) = a_0\,x^k + a_1\,x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\,x + a_k$ con raíces $r_1, r_2, \ldots, r_k$ verificando:

$$\mid r_1 \mid > \mid r_2 \mid > \ldots > \mid r_k \mid > 0.$$

Se considera la ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes:

$$a_0\,y_{n+k} + a_1\,y_{n+k-1} + \ldots + a_{k-1}\,y_{n+1} + a_k\,y_n = 0.$$

(a) Calcular la solución general y_n de dicha ecuación en diferencias.
(b) Obtener una condición bajo la cual se verifique:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = r_1.$$

(Se denomina *método de Bernoulli* para el cálculo de la raíz dominante de un polinomio).

(c) Explicar cómo se puede utilizar el método anterior para calcular la raíz r_k del polinomio $P(x) = 0$.

96. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Aproximar el autovalor dominante de A por el método de la potencia iterada, mediante el cálculo de los vectores u^1, u^2, u^3, u^4, u^5 de la sucesión, tomando como vector inicial $u^0 = (1, -1, 1)$. Dar una aproximación de un autovector de A asociado a dicho autovalor.
(b) Calcular el polinimio característico de A por el método de Hyman. Teniendo en cuenta que $\lambda_1 = 1$ es un autovalor de A, calcular el espectro de A de forma exacta. Deducir de lo obtenido por el método de Hyman cual es un autovector de A asociado a λ_1.

97. Se considera $a > 0$. En el intervalo $[0, a]$ se definen los cinco nodos equiespaciados x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 en la forma:

$$x_k = kh, \quad k = 0, \ldots, 4; \qquad \text{donde } \; h = \frac{a}{4}.$$

(a) Se considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_0^a f(x)\, dx \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k\, f(x_k).$$

Calcular el valor de los coeficientes $A_k, \; k = 0, \ldots, 4$. Deducir de lo anterior que:

$$\int_{-a}^0 f(x)\, dx \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k\, f(-x_k).$$

(b) Se considera la fórmula de derivación de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'''(\frac{a}{2}) \simeq \sum_{k=0}^{4} B_k\, f(x_k).$$

Calcular el valor de los coeficientes $B_k, \; k = 0, \ldots, 4$.

(c) Teniendo en cuenta que:

$$sen(y) = \int_0^y cos(x)\, dx,$$

aproximar el valor de $sen(1)$ por una fórmula del trapecio compuesta con cuatro subintervalos y por una fórmula de Simpson compuesta con tres subintervalos. En ambos casos, dar una acotación del error cometido.

98. Se desea resolver el S.E.L. $Ax = b$ con $A \in M_{n\times n}(R)$ matriz simétrica y definida positiva.

(a) Explicar cómo utilizar un método de cálculo de mínimos de funciones cuadráticas para obtener la solución del sistema.

(b) Entre los métodos de cálculo de mínimos destacan, por su sencillez, los métodos de gradiente, donde se construye una sucesión destinada a converger a la solución:

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k, \qquad k \in N,$$

con d_k la dirección de descenso y ρ_k el paso correspondiente.

Explicar cuál es la elección de d_k en los métodos de gradiente y razonar el motivo de esta elección.

(c) Entre los métodos de gradiente, el más conocido es el *método de máximo descenso* donde, tras tomar la dirección de descenso como en el apartado anterior, el paso se elige de manera que minimice la función cuadrática correspondiente. Calcular la expresión explícita del paso en función de la dirección de descenso.

99. Según ciertas teorías económicas, el incremento de la inflacción en el año n, denotado por y_n, se obtiene como solución de la ecuación en diferencias:

$$y_{n+2} = \sqrt{a+b}\, y_{n+1} - a\, y_n + 1,$$

donde a y b son dos parámetros económicos relativos a la inversión pública y a la tasa de desempleo.

(a) Resolver dicha ecuación para el caso $a = b = 1$.

(b) En el caso anterior y sabiendo que el incremento en los años 1984 y 1985 fue, respectivamente,

$$y_{1984} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y_{1985} = 1,$$

predecir cuál será el incremento de la inflacción para el año 1998.

100. Se considera la ecuación:
$$F(x) = 2^x - 5x + 2 = 0.$$

(a) Demostrar que tiene solamente dos raíces reales y separarlas en intervalos de la forma $[m, m{+}1]$, con $m \in Z$.

(b) Encontrar un método de iteración funcional simple distinto del de Newton-Raphson y un intervalo de forma que, partiendo de cualquier punto de dicho intervalo, el algoritmo converja a la raíz de menor módulo.

(c) Repetir el apartado anterior para la raíz de mayor módulo.

(d) Encontrar un intervalo en el cual el método de Newton-Raphson sea globalmente convergente a la raíz de mayor módulo. Partiendo del punto medio x_0 del intervalo encontrado, calcular los cuatro primeros iterantes x_1, x_2, x_3, x_4.

101. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -18 \\ 5 & 13 & -19 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Para resolver el S.E.L. $Ax = b$ se considera el método iterativo asociado a la descomposición $A = M - N$ con $M = 4I$. Escribir el método en la forma
$$x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, \ldots$$
calculando B y c.

(b) Determinar $||B||_\infty$ y $||B||_1$. ¿Es convergente el método anterior?

(c) Utilizar el método de la potencia iterada, tomando como vector inicial
$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
para aproximar el radio espectral de B. (Es necesario calcular al menos los tres primeros iterantes u_1, u_2, u_3.)

102. Dada la ecuación algebraica $p(x) = 2x^3 - 6x + 1 = 0$:

(a) Separar sus raíces reales por Sturm.

(b) Encontrar una sucesión de la forma:
$$\begin{cases} x_0 \text{ dado}, \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$
que converja a la raíz de menor valor absoluto.

(c) Determinar el número de iteraciones necesarias para obtener por el método anterior una aproximación de dicha raíz con 3 cifras decimales exactas partiendo de $x_0 = 0$..

103. Sea $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz de la forma $A = D - E - F$, con $D = I$, $F = E^t$, y tal que la matriz $(I - E)$ sea inversible. Para resolver el S.E.L. $Ax = b$ se define el algoritmo siguiente:
$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ (I-E)y^k = Fx^k + b, \\ (I-F)x^{k+1} = Ey^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(a) Demostrar que la matriz $(I - F)$ es inversible y que $(I - E)^{-1}E = E(I - E)^{-1}$.

(b) Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

(c) Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A = M - N$ con $N = EF$.

(d) Tomemos:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Explicar razonadamente si en este caso es convergente el método iterativo anterior.
Construir el primer iterante x^1.

104. (a) Sea $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica, no definida positiva e inversible que admita factorización LU. Demostrar que la matriz A puede escribirse en la forma $A = B\tilde{B}^t$, donde B es una matriz triangular inferior y donde $\tilde{B}$ es una matriz tal que cada columna de $\tilde{B}$ es o bien igual a la columna correspondiente de B, o bien igual a la columna correspondiente de B cambiada de signo.

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 22 \\ 3 & 22 & 72 \end{pmatrix}$$

encontrar una factorización de la forma $A = B\tilde{B}^t$.

(b) Sea $C \in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica y definida positiva. ¿Cuántas factorizaciones de la forma $C = SS^t$, con S matriz triangular inferior, admite?. (Es decir, sin necesidad de que los elementos diagonales sean positivos).

Dada la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

encontrar todas las factorizaciones posibles de la forma $C = SS^t$.

105. Se considera la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar, mediante el método de Householder, una matriz tridiagonal simétrica semejante a A.

(b) Utilizar el método de Givens para calcular el polinomio característico de A y una sucesión de Sturm relativa a dicho polinomio.

(c) Separar, usando la sucesión de Sturm, los autovalores de A en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(d) Utilizar el método de Newton-Raphson, partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, para aproximar con cuatro cifras decimales exactas el autovalor de menor módulo de A.

106. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

(a) Se consideran los $(n+1)$ nodos equiespaciados $y_j = y_0 + jh, \quad j = 0, 1, \ldots, n$.
Se considera la formula de derivación de tipo interpolatorio polinómico:

$$f^{(m}(\alpha) \simeq \sum_{j=0}^{n} A_j\, f(y_j).$$

Demostrar que:

i. Si $m > n$, entonces $f^{(m}(\alpha) \simeq 0, \quad \forall \alpha \in R$.

ii. Si $m = n$, entonces los coeficientes de la fórmula verifican la propiedad de simetría sea cual sea el punto α, es decir:

$$A_j = (-1)^n A_{n-j}, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n, \quad \forall \alpha \in R.$$

(b) Dados los nodos $x_k = k, \quad k = 0, 1, \dots, 6$, aproximar el valor de $f'''(3)$ mediante la fórmula de derivación de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'''(3) \simeq \sum_{k=0}^{6} B_k \, f(x_k).$$

(c) Teniendo en cuenta que:

$$log(4) = \int_0^6 f(x) \, dx,$$

aproximar el valor de $log(4)$ por una fórmula del trapecio compuesta con seis subintervalos y por una fórmula de Simpson compuesta con tres subintervalos. En ambos casos, dar una acotación del error cometido.

107. Se considera el S.E.L. $Ax = b$ con $A \in M_{n\times n}(R)$ simétrica.

(a) Para resolver el sistema se utiliza el *método de Richardson*:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ x^{k+1} = Cx^k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

donde la matriz $C = I - A$ verifica: $Sp(C) \subset [-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.
Encontrar el menor intervalo real de la forma $[a, b]$ que contenga todos los autovalores de A. ¿Es A definida positiva? ¿Es el método de Richardson convergente?

(b) Para acelerar la convergencia del método de Richardson se utiliza el *algoritmo de extrapolación* dependiente del parámetro real $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ y^k = Cx^k + b, \\ x^{k+1} = \alpha\, y^k + (1-\alpha)\, x^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

i. Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots$
ii. Demostrar que corresponde a una descomposición de $A = M - N$.
iii. ¿Para qué valores del parámetro α es convergente el algoritmo de extrapolación?
iv. Para el caso particular $\alpha = 1$, ¿qué método es el algoritmo de extrapolación?

108. (a) Sea $A \in M_{n\times n}(C)$ una matriz hermitiana $(A^* = A)$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Sea $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ una base ortonormal de C^n, formada por autovectores de A, esto es: $Ap_j = \lambda_j p_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$. Se define la matriz de Hotelling:

$$B = A - \lambda_1 p_1 p_1^*.$$

i. Probar que todos los autovalores λ_j de A son reales. Deducir que B es hermitiana.
ii. Demostrar cuál es el espectro de B.
iii. Encontrar una base ortonormal de C^n, formada por autovectores de B.

(b) Se introduce en la calculadora un número cualquiera del intervalo $[0, 1]$ y se pulsa repetidamente la tecla de la función coseno ($\boxed{cos}$) ¿Qué número aparecerá en la pantalla de la calculadora tras suficientes pulsaciones? Dar una caracterización de dicho número y una explicación a ese comportamiento.
Si en vez de la tecla del coseno se presiona repetidamente la tecla de la función exponencial ($\boxed{e^x}$) ¿Qué ocurrirá en este caso?

109. Se considera la función:

$$F(x) = e^x - 4x^2, \quad x \in R.$$

(a) Demostrar que la ecuación $F'(x) = 0$ sólo tiene dos raíces reales.

(b) Localizar, por métodos gráficos y analíticos, todas las raíces reales de $F(x) = 0$ en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(c) Encontrar una función y un intervalo adecuados para que el método de iteración funcional simple converja globalmente hacia la menor raíz positiva de la ecuación $F(x) = 0$. Partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, aproximar con tres cifras decimales exactas dicha raíz.

(d) Utilizar el método de Newton-Raphson, partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, para aproximar con tres cifras decimales exactas una raíz de la ecuación $F'(x) = 0$. Demostrar la convergencia global del método en un intervalo adecuado.

(e) Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange para la función F correspondiente a los nodos $x_k = k, \quad k = 0, 1, 2, 3$.

Aproximar, mediante dicho polinomio, el valor de la función F en el punto $x = 1.5$ y determinar el error cometido comparando con el valor exacto $F(1.5)$.

(f) Calcular el spline cúbico natural relativo a la función F y a los nodos $x_k = k, \quad k = 0, 1, 2, 3$.

Aproximar, ahora mediante dicho spline, el valor de la función F en el punto $x = 1.5$ y determinar el error cometido en la aproximación.

(g) Aproximar el valor de $F'(2)$ usando la fórmula de derivación de tipo interpolatorio polinómico:

$$F'(2) \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k \, F(k).$$

Dar una acotación del error de derivación cometido.

(h) Aproximar el valor de la integral:

$$\int_0^4 F(x)\, dx$$

por una fórmula de Simpson compuesta con cuatro subintervalos.

Dar una acotación del error de integración cometido.

110. Sea $u \in R^n$ un vector unitario (es decir, $\|u\|_2^2 = u^t u = 1$) y sea $w \in R^n$ un vector ortogonal a u (esto es, $\langle u, w \rangle = w^t u = 0$). Para $\alpha \in R$, se define la matriz:

$$B_\alpha = \alpha I + u u^t \in M_{n \times n}(R).$$

(a) Demostrar que u y w son autovectores de B_α.

(b) Determinar el espectro de B_α. Deducir que $det(B_\alpha) = (1 + \alpha)\, \alpha^{n-1}$.

¿Para qué valores de α es B_α simétrica?. ¿Para cuáles es definida positiva?.

(c) Si consideramos el método iterativo:

$$\begin{cases} x^0 \in R^n \quad \text{arbitrario}, \\ x^{k+1} = B_\alpha \, x^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

¿Para qué valores de α es dicho método convergente?.

En caso de convergencia, dar una caracterización del límite.

(d) Supongamos $\alpha \geq 0$. Describir el método de la potencia iterada para calcular el autovalor dominante de B_α, escribiendo la sucesión que se obtiene al partir del iterante inicial $u^0 = u + w$. ¿A qué valor converge dicha sucesión?.

111. Sea $f : R \to R$ una función real. Se considera $h > 0$.

(a) Se plantea el siguiente problema de interpolación: Hallar un polinomio $q(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:

$$q(0) = f(0), \quad q''(-h) = f''(-h), \quad q'(h) = f'(h), \quad q''(2h) = f''(2h).$$

¿Tiene solución única el problema de interpolación? Justificar la respuesta.

En caso afirmativo, calcular la solución.

(b) Calcular los coeficientes A_i de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:

$$f'''(0) \simeq A_0 f(0) + A_1 f(-h) + A_2 f(h) + A_3 f(-2h) + A_4 f(2h).$$

(c) Calcular los coeficientes B_i de la fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\, dx \simeq B_0 f(0) + B_1 f(-2h) + B_2 f(2h).$$

112. Se considera el polinimio $F(x) = x^4 - x - 1$.

(a) Determinar el número exacto de raíces positivas, negativas y complejas no reales que tiene el polinomio.

Calcular una buena cota superior de las raíces positivas y una buena cota inferior de las raíces negativas de dicho polinomio.

Localizar todas sus raíces reales en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(b) Encontrar una función y un intervalo adecuados para que el método de iteración funcional simple converja globalmente hacia una raíz positiva.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 1$, ¿cuántos iterantes son necesarios teóricamente para obtener la raíz con tres cifras decimales exactas?.

Aproximar con tres cifras decimales exactas dicha raíz.

(c) Utilizar el método de Newton-Raphson, partiendo del iterante inicial $x_0 = -1$, para aproximar con tres cifras decimales exactas una raíz negativa del polinomio.

Demostrar la convergencia global del método en un intervalo adecuado.

(d) Deducir de los apartados anteriores una buena aproximación del módulo de las raíces complejas no reales.

113. Se considera el sistema no lineal:

$$\begin{cases} e^{2x_1} + 2^{x_2} = log(2) \\ x_1^2 + 3\, sen(x_2) = 3 \end{cases}$$

(a) Resolver dicho sistema por el método de Newton, calculando los tres primeros iterantes x^1, x^2, x^3, a partir del iterante inicial:

$$x^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) ¿Qué se puede decir sobre la convergencia del método?.

¿Qué error se comete si aproximamos la solución exacta por x^3 ?.

114. Sea $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica y definida positiva con radio espectral $\rho(A) = \alpha$. Sea $b \in R^n$.

(a) Para resolver el S.E.L. $Ax = b$ se define el siguiente algoritmo iterativo:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario,} \\ \alpha\, y^k = Ax^k - b, \\ 3\, x^{k+1} = 3\, x^k - 2\, y^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

i. Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

ii. Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A = M - N$.

iii. Demostrar la convergencia del método iterativo.

(b) Si el sistema se escribe en la forma $F(x) = 0$ con:

$$F(x) = Ax - b$$

construir la sucesión que se obtiene al calcular su solución por el método de Newton. ¿Cuántos iterantes serían necesarios para obtener la solución con seis cifras decimales exactas?

115. La fórmula de Poncelet (o punto medio) para aproximar el valor de una integral es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\, f(\frac{a+b}{2})$$

y una acotación del error cometido viene dada por:

$$|error| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{y\in[a,b]} |f''(y)|.$$

(a) Obtener una expresión para la *fórmula de Poncelet compuesta* de m subintervalos.

(b) Deducir una acotación del error para dicha fórmula. ¿Para qué funciones será exacta la fórmula de Poncelet compuesta?.

(c) ¿Qué representa gráficamente la fórmula de Poncelet compuesta?.

(d) Calcular por la fórmula de Poncelet compuesta con 5 subintervalos el valor aproximado de la integral:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} 2^x\,dx$$

116. Se considera la función $F(x) = 3\,cos(x) - e^{2x}$, definida en el dominio $(-2\pi, \pi)$.

(a) Localizar en dicho dominio 3 raíces de F en intervalos de la forma $(m, m+1)$ con $m \in Z$.

(b) Determinar un intervalo en el cual el método de iteración funcional simple converja globalmente a la raíz de menor módulo de F.
Partiendo de $x_0 = 0$, calcular la raíz con 3 cifras decimales exactas.

(c) Calcular el polinomio de interpolación de Taylor $P(x)$ de tercer grado para la función F en el punto $x_0 = 0$.
Calcular una cota superior para las raíces reales positivas del polinomio P.
¿Cuántas raíces positivas tiene P ?

(d) Para calcular la raíz positiva de P de menor módulo se utiliza el método de Newton-Raphson.
Demostrar su convergencia global en un intervalo adecuadamente elegido.
Partiendo de $x_0 = 0$, calcular dicha raíz con tres cifras decimales exactas.

117. Se considera la matriz simétrica y definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) A partir del vector inicial $u^0 = (1\ 1\ 1)^t$ se construye la sucesión $u^{k+1} = Au^k,\ k \in N$.
Calcular, por el método de Rayleigh, el autovalor dominante de A con tres cifras decimales exactas.
Aproximar, por el método de la potencia normalizada, un autovector asociado.

(b) Calcular el determinante de A usando su factorización de Cholesky.

118. Se define:
$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$
Calcular el valor de y_n planteando y resolviendo una ecuación en diferencias de orden 1.

Deducir cúanto vale la suma de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

119. Sea la función continua $F : [a, b] \subset R \to R$, tal que $F(a).F(b) < 0$.

Se considera la ecuación $F(x) = 0$ con una única raíz en el intervalo $[a, b]$. Calcularemos dicha raíz por el *método de tricotomía :*

La idea del método es construir una sucesión de intervalos $\{[a_k, b_k]\}$ a partir del intervalo inicial $[a_0, b_0] = [a, b]$. Para ello se subdivide el intervalo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ en tres subintervalos de igual longitud y se elige como $[a_k, b_k]$ aquel subintervalo tal que F tome en sus extremos signos opuestos.

Llamaremos x_k al punto medio del intervalo $[a_k, b_k]$, esto es, $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

(a) Demostrar que la sucesión $\{x_k\}$ es convergente.

(b) Probar que su límite es la raíz de $F(x) = 0$.

(c) Dar una estimación del error cometido al aproximar la raíz exacta por el iterante x_k.

120. Sea A una matriz simétrica, inversible y con radio espectral $\rho(A) < \alpha$. Intentamos calcular el autovalor dominante de A.

(a) Se define $B = A + \alpha I$.

¿Qué relación existe entre los autovalores de A y de B? ¿Y entre los autovectores correspondientes?

Demostrar que B es definida positiva y dar una cota de su radio espectral.

Explicar cómo utilizar el método de Rayleigh aplicado a B para calcular un autovalor de A. El autovalor así obtenido, ¿es el autovalor dominante de A?

(b) Se define $C = A^2$.

¿Qué relación existe entre los autovalores de A y de C? ¿Y entre los autovectores correspondientes?

Demostrar que C es definida positiva y dar una cota de su radio espectral.

Explicar cómo utilizar el método de Rayleigh aplicado a C para calcular un autovalor de A. El autovalor así obtenido, ¿es el autovalor dominante de A?

121. Se desea resolver el S.E.L. $Ax = b$, donde:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Partiendo del iterante inicial $x^0 = (0 \;\; 0)^t$, calcular los tres primeros iterantes x^1, x^2, x^3 por el método de máximo descenso.

(b) Partiendo del mismo iterante inicial $x^0 = (0 \;\; 0)^t$, calcular los tres primeros iterantes x^1, x^2, x^3 por el método de gradiente conjugado.

(c) Comparar y explicar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.

122. Se discretiza, con paso $h = \dfrac{1}{N}$, el intervalo $[0, 1]$ mediante los nodos equiespaciados:
$$x_n = nh, \qquad n = 0, 1, \dots, N.$$

(a) A partir de la fórmula regresiva para la derivada primera:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h}$$

obtener las fórmulas regresivas para las derivadas de segundo, tercero y cuarto orden.

(b) Se considera la ecuación diferencial:

$$y''(x) - 4\,y(x) = -8x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Aproximando las derivadas por las fórmulas regresivas, obtener la ecuación en diferencias correspondiente a la ecuación diferencial.

Calcular la solución general de dicha ecuación en diferencias.

(c) Para $N = 3$ calcular los coeficientes de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \simeq \sum_{n=0}^{3} A_n\,F(x_n).$$

123. Sea $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica y definida negativa. Sea $b \in R^n$.

(a) Demostrar que existe, al menos, un número real α tal que la matriz $A+\alpha I$ admite factorización Choleski, esto es, se puede encontrar una matriz triangular inferior $L \in M_{n\times n}(R)$ verificando que $A + \alpha I = LL^t$.

(b) Para resolver el S.E.L. $Ax = b$ se define el siguiente algoritmo iterativo:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ Ly^k = \alpha\, x^k + b, \\ x^{k+1} = x^k + y^k - L^t x^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

i. Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

ii. Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A = M - N$.

iii. Suponiendo que el polinomio $p(\lambda) = det(A + (\lambda - 1)L)$ tiene todas sus raíces de módulo menor que la unidad, demostrar la convergencia del método iterativo.

iv. En caso de convergencia, demostrar que x^k converge a la solución del sistema. ¿ A qué converge y^k ?

124. Sea $f : R \to R$ una función real. Se considera $h > 0$.

(a) Se plantea el siguiente problema de interpolación:

Hallar un polinomio $q(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:

$$q(h) = f(h), \quad q''(h) = f''(h), \quad q(-h) = f(-h), \quad q''(-h) = f''(-h).$$

¿Tiene solución única el problema de interpolación? Justificar la respuesta.

En caso afirmativo, calcular la solución.

(b) Calcular los coeficientes A_i de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:

$$f''(0) \simeq A_0 f(h) + A_1 f(2h) + A_2 f(-h) + A_3 f(-2h).$$

(c) Calcular los coeficientes B_i de la fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \simeq B_0 f(h) + B_1 f(2h) + B_2 f(-h) + B_3 f(-2h).$$

125. Se considera la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizar el método de la potencia iterada para obtener el autovalor dominante λ_1 de A, calculando los cinco primeros iterantes a partir del iterante inicial $u^0 = (1 \ \ 1 \ \ -1)^t$. Determinar un autovector asociado v_1.

(b) Calcular dos valores $a, b \in R$ tales que $v_2 = (a \ \ b \ \ 0)^t$ sea un autovector de A con $\|v_2\|_\infty = 1$. Calcular el autovalor λ_2 al que está asociado.

Deducir el valor del otro autovalor λ_3 de A.

(c) Utilizando matrices de Householder, obtener una matriz tridiagonal simétrica B que tenga los mismos autovalores que A.

(d) Calcular el polinomio característico de A por el método de Hyman. Deducir de lo obtenido un autovector v_3 de A asociado al autovalor λ_3 obtenido en el apartado (b).

126. Sea el polinomio $P(x) = x^6 - 3\,x^4 + 1$.

(a) Determinar unas *buenas* cotas superior e inferior de las raíces positivas de P, así como el número exacto de raíces positivas.

(b) Demostrar que si α es una raíz de P, entonces $-\alpha$ también lo es.

Deducir el número de raíces negativas de P y unas cotas para dichas raíces.

(c) Demostrar que el método de Newton-Raphson es globalmente convergente para calcular una raíz de P en el intervalo $[\frac{3}{4}, 1]$. Utilizar dicho método, partiendo de $x_0 = 1$, para calcular una raíz de P con dos cifras decimales exactas.

127. Se define: $$y_n = \sum_{k=0}^{2n} k^2, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Calcular el valor de y_n planteando y resolviendo una ecuación en diferencias de orden 1.

128. Sea $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica y definida negativa. Sea el vector $b \in R^n$.

(a) Demostrar que existe una matriz $L \in M_{n\times n}(R)$ triangular inferior con todos los elementos diagonales positivos tal que $A = -L\,L^t$.

Explicar cómo utilizar esta factorización para resolver el sistema lineal $A\,x = b$.

Deducir una expresión para $det(A)$ en función de los elementos diagonales de L.

(b) Para resolver el S.E.L. $A\,x = b$ se define el siguiente algoritmo iterativo:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ L^t\,y^k = b - A\,x^k, \\ x^{k+1} = x^k - A\,y^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

i. Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = B\,x^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

ii. Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A = M - N$.

iii. Dar una condición que garantice la convergencia del método iterativo.

iv. En caso de convergencia, demostrar que la sucesión x^k converge a la solución del sistema $A\,x = b$. ¿A qué converge la sucesión y^k ?

129. (a) Se plantea el siguiente problema de interpolación:

Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 2 tal que:

$$p'(0) = 1, \qquad p''(1) = 2, \qquad p'(2) = 3.$$

¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? Justificar la respuesta y, en caso de tener solución, calcularla.

(b) Responder a las cuestiones del apartado (a) para el nuevo problema de interpolación:
Hallar un polinomio $q(x)$ de grado menor o igual que 2 tal que:

$$q'(0) = -1, \qquad q''(1) = 2, \qquad q'(2) = 3.$$

(c) En el intervalo $[0,1]$ se definen los nodos equiespaciados $x_k = \frac{k}{4}, \quad k = 0, \ldots, 4$. Se considera la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'(\frac{1}{2}) \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k f(x_k).$$

Calcular los coeficientes $A_k, \quad k = 0, \ldots, 4$.

(d) En el intervalo $[0,1]$ se definen los nuevos nodos $y_j = \frac{j}{3}, \quad j = 0, \ldots, 3$. Se considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{3} B_j f(y_j).$$

Calcular los coeficientes $B_j, \quad j = 0, \ldots, 3$.

130. Se considera el polinimio $P(x) = x^4 + 2x^2 - 9x + 1$.

(a) Determinar, sin utilizar el método de Sturm, el número exacto de raíces positivas, negativas y complejas no reales que tiene el polinomio.

(b) Calcular unas buenas cotas superior e inferior de las raíces positivas de dicho polinomio.
Localizar todas sus raíces reales en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(c) Encontrar una función y un intervalo adecuados para que el método de iteración funcional simple converja *globalmente* hacia la raíz de menor módulo.
Partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, aproximar con cuatro cifras decimales exactas dicha raíz por el método de iteración funcional simple.
¿Cuántos iterantes serían necesarios teóricamente para obtener la raíz con cuatro cifras decimales exactas?

(d) Demostrar la *convergencia local* del método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de mayor módulo del polinomio.
Partiendo del iterante inicial $x_0 = 2$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.

131. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -8 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizar el método de la potencia iterada para obtener el autovalor dominante λ_1 de A, calculando los cinco primeros iterantes $u^1, u^2, \ldots, u^5$ a partir del iterante inicial $u^0 = (1 \ \ 5 \ \ 1)^t$.
Determinar un autovector p_1 de A asociado al autovalor λ_1.

(b) Obtener, por el método de Householder, una matriz Hessenberg superior B que sea semejante a A.

(c) Sabiendo que $\lambda = 2$ es un autovalor de B, obtener, por el método de Hyman, un autovector v_2 de B asociado a $\lambda = 2$.
Teniendo en cuenta que $\lambda = 2$ también es autovalor de A, deducir de lo anterior un autovector p_2 de A asociado a $\lambda = 2$.

132. Se considera la ecuación numérica $F(x) = 0$, donde F es una función suficientemente regular. Sea $\alpha \in R$ una raíz de F de multiplicidad $m > 1$.

(a) Describir el algoritmo de Newton-Raphson para calcular dicha raíz de F.

(b) En caso de que el método sea convergente, ¿cúal sería su orden de convergencia?

(c) Se define la nueva ecuación numérica $G(x) = 0$, donde:

$$G(x) = \frac{F(x)}{F'(x)}.$$

Demostrar que $\alpha \in R$ es una raíz simple de G.

(d) Describir el algoritmo de Newton-Raphson para calcular dicha raíz de G, obteniendo la expresión final en función de F.

(e) En caso de que el método fuera convergente, ¿cúal sería su orden de convergencia?

133. (a) Se plantea el siguiente problema de interpolación:
Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:

$$p'(0) = 3, \quad p''(1) = 2, \quad p'''(2) = 1, \quad p^{IV}(3) = 0.$$

¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? Justificar la respuesta y, en caso de tener solución, calcularla.

(b) En el intervalo $[100, 101]$ se definen los nodos equiespaciados $x_k = 100 + \frac{k}{4}, \quad k = 0, \ldots, 4$. Se considera la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'(\frac{201}{2}) \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k f(x_k).$$

Calcular los coeficientes $A_k, \quad k = 0, \ldots, 4$.

(c) En el intervalo $[100, 101]$ se definen los nuevos nodos $y_j = 100 + \frac{j}{3}, \quad j = 0, \ldots, 3$. Se considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_{100}^{101} f(x)\, dx \simeq \sum_{j=0}^{3} B_j f(y_j).$$

Calcular los coeficientes $B_j, \quad j = 0, \ldots, 3$.

134. Se considera el S.E.L. $A\,x = b$ con $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica y definida positiva. Denominaremos C a la matriz de Cholesky tal que $A = C\,C^t$.

(a) Para resolver el S.E.L. $A\,x = b$ se define el siguiente algoritmo iterativo:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ y^k = x^k + C^t\, x^k, \\ C\, x^{k+1} = C\, y^k - b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

i. Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = B\, x^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

ii. Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A = M - N$.

iii. En caso de convergencia, demostrar que la sucesión x^k converge a la solución del sistema $A\,x = b$. ¿A qué convergería la sucesión y^k?

(b) Consideremos el caso particular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

i. Resolver el S.E.L. utilizando el método directo de Cholesky.
Deducir el valor del determinante de A.

ii. ¿Sería convergente el método iterativo propuesto en el apartado (a) ?

135. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizar el método de la potencia iterada para obtener, con dos cifras decimales exactas, el autovalor dominante λ_1 de A, calculando los cuatro primeros iterantes u^1, u^2, u^3, u^4 a partir del iterante inicial $u^0 = (1 \;\; 2 \;\; 3)^t$.

Determinar, de manera aproximada, un autovector de A asociado al autovalor λ_1.

(b) Obtener, por el método de Givens, el polinomio característico de A.

Sabiendo que $\lambda_2 = 2$ es un autovalor de A, obtener, de manera exacta, todos los autovalores de A.

(c) Utilizando el método de Hyman, calcular de manera exacta un autovector asociado a cada uno de los autovalores de A.

136. Supongamos que la matriz $A \in M_{n\times n}(R)$ admite una descomposición $A = P - Q$, tal que la matriz inversible $P^{-1}Q$ tiene todos sus autovalores reales verificando

$$1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n.$$

Para resolver el S.E.L. $A\,x = b$ se define el siguiente algoritmo iterativo en función del parámetro real w:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario,} \\ (1+w)\,P\,x^{k+1} = (Q + wP)\,x^k + b, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(a) Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = B\,x^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A = M - N$.

(c) Encontrar los valores de w para los cuales el método es convergente.

En caso de convergencia, demostrar que la sucesión x^k converge a la solución del sistema.

(d) El parámetro de convergencia óptima se obtiene para $w^* = -\dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$.

En este caso, calcular el radio espectral de B.

137. Sea $v \in R^n$ un vector unitario, es decir, $v^t v = 1$.

Sea $z \in R^n$ un vector ortogonal a v, esto es, $v^t z = 0$.

Se define la matriz de Householder $H = I - 2vv^t \in M_{n\times n}(R)$.

(a) Demostrar que H es simétrica.

(b) Calcular H^2. Deducir el valor del determinante $det(H)$ y de la inversa H^{-1}.

(c) Calcular Hv. Deducir que $\lambda_1 = -1$ es un autovalor de H. ¿Cuál es un autovector asociado?

(d) Calcular Hz. Deducir que $\lambda_2 = 1$ es un autovalor de H. ¿Cuál es un autovector asociado?

(e) Sea $B \in M_{n\times n}(R)$ una matriz cuya primera columna es un vector b verificando que $b - \|b\|_2\, e_1 = v$. ¿Cómo es la matriz producto HB ?

138. Se considera el polinimio $P(x) = x^3 + 4x - 1$.

(a) Determinar, sin utilizar el método de Sturm, el número exacto de raíces positivas, negativas y complejas no reales que tiene el polinomio.

(b) Calcular unas buenas cotas superior e inferior de las raíces positivas de dicho polinomio.

(c) Para calcular una raíz positiva se utilizará el algoritmo de Lin. Encontrar un intervalo adecuado para que dicho algoritmo sea globalmenmte convergente.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, aproximar con cinco cifras decimales exactas dicha raíz por el algoritmo de Lin.

(d) Deducir el valor del módulo de las otras raíces de $P(x) = 0$.

139. (a) Se define la longitud l de una curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, de la forma:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

i. Aproximar la longitud de la curva $y = sen(x)$, $0 \leq x \leq 2$, mediante la fórmula del trapecio compuesto con 4 subintervalos.
Dar una estimación del error cometido.

ii. Aproximar la longitud de dicha curva mediante la fórmula de Simpson compuesto con 2 subintervalos.

(b) Sean la función $f(x) = sen(x)$ y los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$.

i. Se considera el siguiente problema de interpolación:
Aproximar la función $f(x)$ por una expresión de la forma:

$$q(x) = A_0 + A_1 \, cos(x) + A_2 \, cos(2x)$$

que sea exacta en los nodos.
¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? Justificar la respuesta y, en caso de tener solución, calcularla. Dar una aproximación del valor $sen(\frac{\pi}{4})$.

ii. Calcular el polinomio de interpolacion de Lagrange de $f(x)$ relativo a los nodos x_0, x_1, x_2.
Dar una aproximación de $sen(\frac{\pi}{4})$ y una acotación del error cometido.

140. Se considera el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ x^2 - y^2 = y \end{cases}$$

(a) Describir el método de iteración funcional para resolver dicho sistema.

A partir del iterante inicial $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, construir los dos primeros iterantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ con dicho método.

(b) Describir el método de Newton para resolver dicho sistema.

Construir los dos primeros iterantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ con dicho método, a partir del iterante inicial $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

141. Sea $A \in M_{2\times 2}(R)$ una matriz con autovalores reales $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, y con autovectores asociados v_1, $v_2 \in R^2$. Se considera el iterante inicial $u^0 = \alpha\, v_1 + \beta\, v_2$ (para α, $\beta \in R$), y se construye la sucesión $u^{k+1} = A\, u^k$, $k = 0, 1, \ldots$

Para cada componente $i = 1, 2$, se define la sucesión dada por el método de la potencia iterada

$$\xi_i^k = \frac{u_i^{k+1}}{u_i^k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(a) ¿A qué converge, cuando $k \to \infty$, alguna de las sucesiones $\{\xi_i^k\}$ si $\alpha \neq 0$?

(b) Razonar qué ocurre en el caso en que $\alpha = 0$.

(c) Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicar el método de la potencia, partiendo del iterante inicial $u^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, para aproximar un autovalor y un autovector asociado de A, calculando los tres primeros iterantes u^1, u^2, u^3.

Repetir el proceso partiendo de $u^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Explicar los diferentes resultados obtenidos en ambos casos.

142. Se considera la ecuación $F(x) = e^x + 2x(x-4) = 0$.

(a) Determinar el número exacto de raíces reales que tiene dicha ecuación, y separarlas en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(b) Encontrar una función y un intervalo adecuados para que el método de iteración funcional simple presente *convergencia global* hacia la raíz de menor módulo.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, aproximar con cuatro cifras decimales exactas dicha raíz por el método de iteración funcional simple.

¿Cuántos iterantes serían necesarios teóricamente para obtener la raíz con cuatro cifras decimales exactas?

(c) Encontrar un intervalo tal que el método de Newton-Raphson posea *convergencia global* para aproximar la raíz de mayor módulo de la ecuación.

Partiendo del iterante inicial x_0 dado por el extremo inferior del intervalo encontrado, obtener dicha raíz con cuatro cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.

143. (a) Se consideran los nodos $x_0 = -3,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$. Sea la función real f de la cual se conocen los valores en los nodos:

$$f(-3) = -2,\ f(-1) = -8,\ f(0) = 1,\ f(1) = -6,\ f(3) = 4.$$

i. Calcular el polinomio de Lagrange de f relativo a dichos nodos, usando diferencias divididas. Razonar si se pueden utilizar diferencias finitas para calcular el polinomio de Lagrange. Dar una aproximación del valor $f(-2)$.

ii. Calcular los coeficientes A_k, $\quad k = 0, \ldots, 4$, de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'''(0) \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k\, f(x_k).$$

iii. Calcular los coeficientes B_k, $\quad k = 0, \ldots, 4$, de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx \simeq \sum_{k=0}^{4} B_k\, f(x_k).$$

(b) Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(2) = \int_0^2 \cos(x)\, dx$, calcular una aproximación del valor $\operatorname{sen}(2)$ mediante la fórmula de Simpson compuesta de 2 subintervalos. Dar una acotación del error cometido.

144. Se considera el polinomio $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 75x + 25 = 0$.

(a) Calcular unas buenas cotas superiores e inferiores de las raíces reales positivas y negativas de dicho polinomio.

(b) Determinar el número exacto de raíces reales y complejas que tiene y separarlas en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(c) Encontrar un intervalo tal que el método de Newton-Raphson posea *convergencia global* para aproximar la raíz positiva de mayor módulo del polinomio.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 3$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.

(d) Utilizar el algoritmo de Lin para aproximar otra raíz de dicho polinomio, tomando como iterante inicial $x_0 = 0$. Explicar el resultado obtenido.

(e) Utilizando los apartados anteriores calcular el resto de las raíces del polinomio.

145. (a) Se consideran los nodos $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 6$. Sea la función real f de la cual se conocen los valores en los nodos:

$$f(0) = 1,\ f(1) = -3,\ f(3) = -53,\ f(5) = 1,\ f(6) = 217.$$

i. Calcular el polinomio de Lagrange de f relativo a dichos nodos, usando diferencias divididas. Dar una aproximación del valor $f(-1)$.

ii. Calcular los coeficientes $A_k, \quad k = 0, \ldots, 4$, de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'''(3) \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k\, f(x_k).$$

(b) Si consideramos ahora los nuevos nodos $y_0 = -3,\ y_1 = -2,\ y_2 = 0,\ y_3 = 2,\ y_4 = 3$, calcular los coeficientes $B_k, \quad k = 0, \ldots, 4$, de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'''(0) \simeq \sum_{k=0}^{4} B_k\, f(y_k).$$

(c) Teniendo en cuenta que $\log(2) = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2x}\, dx$, calcular una aproximación del valor $\log(2)$ mediante la fórmula de Simpson compuesta de 3 subintervalos. Dar una acotación del error cometido.

146. Se considera el polinomio $P(x) = x^4 - x - 4 = 0$.

(a) Calcular unas buenas cotas superiores e inferiores de las raíces reales positivas y negativas de dicho polinomio.

(b) Determinar el número exacto de raíces reales y complejas que tiene y separar las raíces reales en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(c) Encontrar un intervalo tal que el método de Newton-Raphson posea *convergencia global* para aproximar una raíz negativa del polinomio.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = -1.5$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.

(d) Encontrar un intervalo tal que el método de iteración funcional simple posea *convergencia global* para aproximar una raíz positiva del polinomio.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 1.5$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de iteración funcional simple.

(e) Utilizando los apartados anteriores aproximar el módulo de las otras raíces del polinomio.

147. (a) Se plantea el siguiente problema de interpolación:

Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:

$$p(0) = -1, \qquad p'(1) = 0, \qquad p''(2) = 10, \qquad p'''(3) = 6.$$

¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? Justificar la respuesta y, en caso de tener solución, calcularla.

(b) Calcular los coeficientes $A_k,\ k=0,\dots,3,$ de la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_0^3 f(x)\,dx \simeq A_0\,f(0)+A_1\,f'(1)+A_2\,f''(2)+A_3\,f'''(3)$$

(c) Calcular los coeficientes $B_k,\ k=0,\dots,3,$ de la clásica fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_0^3 f(x)\,dx \simeq B_0\,f(0)+B_1\,f(1)+B_2\,f(2)+B_3\,f(3)$$

Teniendo en cuenta que $\log(4)=\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$, aproximar el valor $\log(4)$ mediante dicha fórmula.

148. Sea $A\in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica y definida positiva.

Sea β un parámetro real no nulo.

Para resolver el S.E.L. $Ax=b$ se define el siguiente algoritmo iterativo:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ y^k = b - Ax^k, \\ x^{k+1} = x^k - \beta\, y^k, \qquad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

(a) Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1}=Bx^k+c, \quad k=0,1,2,\dots$

(b) Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A=M-N$.

(c) Calcular, en función de los autovalores de A, para qué valores de β es convergente el método iterativo.

(d) En caso de convergencia, demostrar que la sucesión $\{x_k\}$ converge a la solución del sistema $Ax=b$.

¿ A qué converge la sucesión $\{y_k\}$?

149. Explicar cual es el objetivo del algoritmo LR aplicado a una matriz $A\in M_{n\times n}(R)$.

¿ Es un algoritmo directo o iterativo ?

Explicar paso a paso en que consiste el algoritmo LR y dar un resultado de convergencia para el método.

Se considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular los 3 primeros términos de la sucesión que se obtiene al aplicar el algoritmo LR a la matriz A.

150. Se considera la función $F(x)=3\,cos(x)-2\,e^{2x}$, definida en toda la recta real.

(a) Calcular el número de raíces positivas de F y separarlas en intervalos de la forma $[m,m+1]$, con $m\in N$.

¿ Cuántas raíces negativas tiene la ecuación $F(x)=0$?

(b) Determinar un intervalo en el cual el método de Newton-Raphson converja globalmente a una raíz positiva de F.

Partiendo de $x_0=0$, calcular dicha raíz con 4 cifras decimales exactas.

(c) Para calcular la misma raíz positiva de F también se puede utilizar un método de iteración funcional simple.

Elegir una función y un intervalo adecuados, que permitan demostrar la convergencia global del método.

Partiendo de $x_0=0$, calcular cuántos iterantes son necesarios teóricamente para aproximar dicha raíz con 3 cifras decimales exactas.

151. Se discretiza, con paso $h = \dfrac{1}{N}$, el intervalo $[0,1]$ mediante los nodos equiespaciados:

$$x_n = nh, \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

(a) A partir de la fórmula regresiva para la derivada primera:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h}$$

obtener las fórmulas regresivas para las derivadas de segundo, tercero y cuarto orden.

(b) Se considera la ecuación diferencial:

$$y'(x) + y(x) = x + 1, \qquad 0 \le x \le 1; \qquad\qquad y(0) = 1.$$

Aproximando las derivadas por las fórmulas regresivas, obtener la ecuación en diferencias de primer orden correspondiente a la ecuación diferencial.

Calcular la solución de la ecuación en diferencias, esto es, las aproximaciones $y_n \simeq y(x_n)$.

(c) Teniendo en cuenta que:

$$sen(3) = \int_0^3 cos(x)\, dx$$

determinar el número m de subintervalos necesarios para calcular una aproximación de $sen(3)$, mediante una fórmula de Simpson compuesta, con 4 cifras decimales exactas.

Calcular dicho valor aproximado de $sen(3)$.

152. Se considera el S.E.L. $Ax = b$ con $A \in M_{n\times n}(R)$ simétrica y definida positiva.

Para resolver el sistema se propone el siguiente algoritmo iterativo dependiente del parámetro real $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ y^k = (I - A)x^k + b, \\ x^{k+1} = \alpha\, y^k + (1-\alpha)\, x^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(a) Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Demostrar que corresponde a una descomposición de $A = M - N$.

(c) ¿Para qué valores del parámetro α es convergente el algoritmo?

(d) En caso de convergencia, demostrar que la sucesión $\{x_k\}$ converge a la solución del sistema $Ax = b$.

¿ A qué converge la sucesión $\{y_k\}$?

153. Entre los métodos utilizados para el cálculo de los autovalores de una matriz $A \in M_{n\times n}(R)$ se encuentra el algoritmo QR.

¿ Es un algoritmo directo o iterativo ?

Detallar qué nos proporciona exactamente el algoritmo QR.

Explicar paso a paso en que consiste el algoritmo QR y dar un resultado de convergencia para el método.

Se considera la matriz triangular superior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Describir lo que se obtiene al aplicar el algoritmo QR a la matriz A.

154. Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + x - 8$.

(a) Calcular unas buenas cotas superiores e inferiores de las raíces reales positivas y negativas de dicho polinomio.

(b) Determinar el número exacto de raíces positivas, negativas y complejas que tiene y separarlas en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(c) Encontrar un intervalo tal que el método de Newton-Raphson posea *convergencia global* para aproximar la raíz positiva de mayor módulo del polinomio P .

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 1$, obtener dicha raíz con cuatro cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.

(d) Se considera el nuevo polinomio $T(x) = P(x) + \alpha$, donde α es un número real.

Determinar para qué valores de α se puede asegurar que el polinomio T no tiene raíces positivas. Para esos valores, ¿tiene raíces negativas?

155. (a) Se plantea el siguiente problema de interpolación:

Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:

$$p(0) = 1, \qquad p''(1) = 6, \qquad p''(0) = 1, \qquad p'''(2) = 6.$$

¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? Justificar la respuesta y, en caso de tener solución, calcularla.

(b) Responder a las cuestiones del apartado (a) para el nuevo problema de interpolación:

Hallar un polinomio $q(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:

$$q(0) = 1, \qquad q''(1) = 6, \qquad q''(0) = 0, \qquad q'''(2) = 6.$$

(c) En el intervalo $[0, 2]$ se definen los nodos equiespaciados $x_k = \frac{k}{2}, \quad k = 0, \ldots, 4$. Se considera la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico:

$$f'(1) \simeq \sum_{k=0}^{4} A_k f(x_k).$$

Calcular los coeficientes $A_k, \quad k = 0, \ldots, 4$.

(d) En el intervalo $[0, 2]$ se definen los nuevos nodos $y_j = j, \quad j = 0, 1, 2$. Se considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_0^1 f(x)\, dx \simeq \sum_{j=0}^{2} B_j f(y_j).$$

Calcular los coeficientes $B_j, \quad j = 0, 1, 2$.

156. Sea la función continua $F : [0, 1] \subset R \to R$, tal que $F(0).F(1) < 0$.

Se considera la ecuación $F(x) = 0$ con una única raíz en el intervalo $[0, 1]$. Calcularemos dicha raíz por el *método de cuatricotomía :*

La idea del método es construir una sucesión de intervalos $\{[a_k, b_k]\}$ a partir del intervalo inicial $[a_0, b_0] = [0, 1]$. Para ello se subdivide el intervalo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ en cuatro subintervalos de igual longitud y se elige como $[a_k, b_k]$ aquel subintervalo tal que F tome en sus extremos signos opuestos.

Llamaremos x_k al punto medio del intervalo $[a_k, b_k]$, esto es, $\quad x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

(a) Demostrar que la sucesión $\{x_k\}$ es convergente.

(b) Probar que su límite es la raíz de $F(x) = 0$.

(c) Dar una estimación del error cometido al aproximar la raíz exacta por el iterante x_k en función del número de iteraciones k.

157. Se considera la función $F(x) = e^{-3x} + x^2 - 2$.

(a) Determinar el número exacto de raíces reales que tiene y separarlas en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

(b) Encontrar un intervalo tal que el método de Newton-Raphson posea *convergencia global* para aproximar la raíz positiva de mayor módulo de la función $F(x)$.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 1.5$, obtener dicha raíz con cuatro cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.

(c) Encontrar una función y un intervalo tales que el método de iteración funcional simple posea *convergencia global* para aproximar la raíz negativa de menor módulo de la función $F(x)$.

Partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de iteración funcional simple.

158. (a) Se discretiza, con paso $h = \dfrac{1}{N}$, el intervalo $[0, 1]$ mediante los nodos equiespaciados:

$$x_n = nh, \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Se considera la ecuación diferencial:

$$y'(x) - 2y(x) = 2, \qquad 0 \le x \le 1; \qquad\qquad y(0) = 0.$$

Aproximando la derivada por la *fórmula regresiva* correspondiente, obtener la ecuación en diferencias de primer orden asociada a la ecuación diferencial.

Calcular la solución de la ecuación en diferencias, esto es, las aproximaciones $y_n \simeq y(x_n)$.

(b) Teniendo en cuenta que:

$$\log(3) = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$$

determinar el número m de subintervalos necesarios para calcular una aproximación de $\log(3)$, mediante una *fórmula de Simpson compuesta*, con 3 cifras decimales exactas.

Calcular dicho valor aproximado de $\log(3)$.

Finalmente, determinar el número r de subintervalos que serían necesarios para calcular una aproximación de $\log(3)$, mediante una *fórmula del trapecio compuesta*, también con 3 cifras decimales exactas.