METODOS NUMERICOS. *Curso 2005-2006.*
E.T.S.I. Minas. *Boletín 1 de prácticas.*

1. Localizar las raíces de la ecuación $F(x) = 0$, para los siguientes casos:
   (a) $F(x) = x + e^x$.
   (b) $F(x) = 0.5 - x + 0.2\, sen(x)$.
   (c) $F(x) = x - tg(x)$.
   (d) $F(x) = x^5 - 3$.
   (e) $F(x) = e^{-x} - sen(x)$.
   (f) $F(x) = log(x) - 1 - \frac{1}{x}$.
2. Sea $F(x) = x^3 - x - 1$.
   (a) Separar las raíces de $F(x) = 0$.
   (b) Construir 5 iterantes del método de dicotomía para aproximar una raíz en alguno de los intervalos obtenidos en el apartado anterior.
3. Sea $F(x) = x - e^{-x}$.
   (a) Separar las raíces de $F(x) = 0$ en intervalos de la forma $[m, m+1]$ con $m \in Z$.
   (b) Determinar cuántos iterantes del método de dicotomía sería teóricamente necesario calcular para obtener la aproximación de una raíz con 6 cifras decimales exactas.

METODOS NUMERICOS. *Curso 2005-2006.*
E.T.S.I. Minas. *Boletín 2 de prácticas.*

1. Se considera la función $F(x) = e^{-3x} + x^2 - 2$.
   (a) Determinar el número exacto de raíces reales que tiene y separarlas en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.
   (b) Encontrar una función y un intervalo tales que el método de iteración funcional simple posea *convergencia global* para aproximar la raíz negativa de menor módulo de la función $F(x)$.
   Partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de iteración funcional simple.
   (c) Encontrar un intervalo tal que el método de Newton-Raphson posea *convergencia global* para aproximar la raíz positiva de mayor módulo de la función $F(x)$.
   Partiendo del iterante inicial $x_0 = 1.5$, obtener dicha raíz con cuatro cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.
2. Separar en intervalos de la forma $[m, m+1]$, con $m \in Z$, las raíces de $F(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ y aproximar las raíces positivas con un error menor que 10^{-5} mediante un algoritmo de iteración funcional simple.
3. Se considera la función $F(x) = 3\,cos(x) - 2\,e^{2x}$, definida en toda la recta real.
   (a) Calcular el número de raíces positivas de F y separarlas en intervalos de la forma $[m, m+1]$, con $m \in N$.
   ¿ Cuántas raíces negativas tiene la ecuación $F(x) = 0$?
   (b) Determinar un intervalo en el cual el método de Newton-Raphson converja globalmente a una raíz positiva de F.
   Partiendo de $x_0 = 0$, calcular dicha raíz con 4 cifras decimales exactas.
   (c) Para calcular la misma raíz positiva de F también se puede utilizar un método de iteración funcional simple.
   Elegir una función y un intervalo adecuados, que permitan demostrar la convergencia global del método.
   Partiendo de $x_0 = 0$, calcular cuántos iterantes son necesarios teóricamente para aproximar dicha raíz con 3 cifras decimales exactas.
4. Calcular, utilizando el método de Newton-Raphson, el valor de la raíz quinta de 3 con un error menor que 10^{-6}.

METODOS NUMERICOS. *Curso 2005-2006.*
E.T.S.I. Minas. *Boletín 3 de prácticas.*

1. Se considera el polinomio $P(x) = 2x^3 - 6x + 1$. Se pide:
   (a) Dar unas buenas cotas para las raíces reales de dicho polinomio.
   (b) Utilizar Sturm para determinar el número exacto de raíces positivas, negativas y complejas no reales de $P(x) = 0$.
   (c) Separar las raíces reales en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

2. Se considera el polinimio $P(x) = x^3 + 4x - 1$.
   (a) Determinar, sin utilizar el método de Sturm, el número exacto de raíces positivas, negativas y complejas no reales que tiene el polinomio.
   (b) Calcular unas buenas cotas superior e inferior de las raíces positivas de dicho polinomio.
   (c) Para calcular una raíz positiva se utilizará el algoritmo de Lin. Encontrar un intervalo adecuado para que dicho algoritmo sea globalmente convergente.
   Partiendo del iterante inicial $x_0 = 0$, aproximar con cinco cifras decimales exactas dicha raíz por el algoritmo de Lin.
   (d) Deducir el valor del módulo de las otras raíces de $P(x) = 0$.

3. Se considera el polinomio $P(x) = x^4 - x - 4$.
   (a) Calcular unas buenas cotas superiores e inferiores de las raíces reales positivas y negativas de dicho polinomio.
   (b) Determinar el número exacto de raíces reales y complejas que tiene y separar las raíces reales en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.
   (c) Encontrar un intervalo tal que el método de Newton-Raphson posea *convergencia global* para aproximar una raíz negativa del polinomio.
   Partiendo del iterante inicial $x_0 = -1.5$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de Newton-Raphson.
   (d) Encontrar un intervalo tal que el método de iteración funcional simple posea *convergencia global* para aproximar una raíz positiva del polinomio.
   Partiendo del iterante inicial $x_0 = 1.5$, obtener dicha raíz con tres cifras decimales exactas por el método de iteración funcional simple.
   (e) Utilizando los apartados anteriores aproximar el módulo de las otras raíces del polinomio.

4. Se considera el polinomio $P(x) = 2x^3 + 8x^2 + 8x + 1$.
   (a) Contestar *razonadamente* a las siguientes preguntas:
   ¿Tiene $P(x)$ raíces reales positivas?
   ¿Tiene $P(x)$ raíces complejas no reales?
   (b) Obtener unas *buenas* cotas inferior y superior para las raíces negativas de $P(x)$.
   (c) Demostrar, por Boudan-Fourier, que $P(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $(-1, 0)$.
   (d) Para calcular dicha raíz se utiliza el algoritmo de Lin. Describir la sucesión que se obtiene por dicho método y demostrar su convergencia global en un intervalo real adecuadamente elegido.
   Utilizando el algoritmo de Lin, y partiendo de $x_0 = 0$, aproximar la raíz con tres cifras decimales exactas

   decimales exactas

1. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & \beta \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde α y β son parámetros reales. Se desea resolver un sistema $Ax = b$ por un método iterativo clásico.

   (a) Construir la matriz del método de Gauss-Seidel y probar que dicho método es convergente si y sólo si $\mid \alpha + \beta \mid < 6$.

   (b) Para $\alpha = \beta = 0$ estudiar la convergencia del método de Jacobi.

2. Discutir según los valores del parámetro real ε la convergencia del método de Gauss-Seidel para sistemas con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizar estos resultados para garantizar la convergencia de dicho método al resolver el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 0.5\,x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 0.5\,x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 0.5\,x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

u otro equivalente.

3. El método de Richardson se define utilizando un parámetro real positivo α de la forma siguiente:

$$x_0 \quad \text{arbitrario},$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k), \quad k \geq 0.$$

   (a) Determinar si el método de Richardson se basa en una descomposición de $A = M - N$. Obtener la matriz y el vector del método.

   (b) Si A es simétrica y definida positiva, demostrar que una condición necesaria y suficiente para la convergencia del método es que:

$$\alpha < \frac{2}{\rho(A)}.$$

   En este caso comprobar que la sucesión converge a la solución del sistema $Ax = b$.

   (c) Para el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

   probar que el método de Richardson es convergente con $\alpha = \frac{1}{5}$.

4. Se considera el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

   (a) Construir la matriz del método de Jacobi J.
   (b) Calcular $|| J ||_\infty$ y $|| J ||_1$.
   (c) Estudiar la convergencia del método de Jacobi.
   (d) Calcular los 3 primeros iterantes a partir de $x_0 = (0, 0, 0)$.

5. Sea el sistema $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinar los valores de ω para los cuales el método de relajación resulta convergente.
   (b) Construir a partir de $x_0 = (1, 1, 1)$ los cuatro primeros iterantes para el método de Gauss-Seidel.
   (c) Construir la matriz J del método de Jacobi y estudiar la convergencia de dicho método.

6. Sea $A \in M_{n\times n}(R)$ una matriz simétrica y definida positiva con radio espectral $\rho(A) = \alpha$. Sea $b \in R^n$. Para resolver el S.E.L. $Ax = b$ se define el siguiente algoritmo iterativo:

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ \alpha\, y^k = Ax^k - b, \\ 3\,x^{k+1} = 3\,x^k - 2\,y^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

   (a) Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$
   (b) Comprobar que el método corresponde a una descomposición de $A = M - N$.
   (c) Demostrar la convergencia del método iterativo.
   (d) En caso de convergencia, demostrar que la sucesión $\{x_k\}$ converge a la solución del sistema $Ax = b$.
   ¿A qué converge la sucesión $\{y_k\}$?

7. Se considera el S.E.L. $Ax = b$ con $A \in M_{n\times n}(R)$ simétrica y definida positiva, y $b \in R^n$.
   Para resolver el sistema se propone el siguiente algoritmo iterativo dependiente del parámetro real $\alpha > 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 \quad \text{arbitrario}, \\ y^k = (I - A)x^k + b, \\ x^{k+1} = \alpha\, y^k + (1 - \alpha)\, x^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

   (a) Escribir el algoritmo en la forma clásica: $x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$
   (b) Demostrar que corresponde a una descomposición de $A = M - N$.
   (c) ¿Para qué valores del parámetro α es convergente el algoritmo?
   (d) En caso de convergencia, demostrar que la sucesión $\{x_k\}$ converge a la solución del sistema $Ax = b$.
   ¿A qué converge la sucesión $\{y_k\}$?

1. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Aproximar el autovalor dominante de A por el método de la potencia iterada, mediante el cálculo de los vectores $u^1, u^2, u^3, \ldots, u^6$ de la sucesión, tomando como vector inicial $u^0 = (1, -1, 1)$. Dar una aproximación de un autovector de A asociado a dicho autovalor.

   (b) Calcular el polinomio característico de A por el método de Hyman. Teniendo en cuenta que $\lambda_1 = 1$ es un autovalor de A, calcular el espectro de A de forma exacta. Deducir de lo obtenido por el método de Hyman un autovector de A asociado a λ_1.

2. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Calcular, mediante el método de Rayleigh, una aproximación del mayor autovalor de A con 3 cifras decimales exactas, tomando como término inicial $u^0 = (1, 1, 1)$.

3. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Sabiendo que 2 es una primera aproximación de un autovalor de A, mejorar dicha aproximación por el método de la potencia inversa, mediante el cálculo de los términos u^1, u^2, u^3, u^4 de la sucesión, tomando como término inicial $u^0 = (1, 1, 1)$. Calcular un autovector asociado. (Todos los sistemas lineales que aparezcan deberán resolverse por el método LU).

   Utilizar el método de deflacción de Hotelling para determinar el resto de los autovalores de A.

4. Calcular por Hyman el polinomio característico de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Explicar cómo utilizar el método de Householder-Hyman para calcular el determinante de cualquier matriz. Aplicar dicho proceso para calcular el determinante de la matriz tridiagonal simétrica de orden 4 dada por:

$$a_{ii} = 2, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

$$a_{i+1,i} = -1, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

6. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular una sucesión de Sturm relativa al polinomio característico de A. Utilizarla para:

(a) Demostrar que A es definida positiva.

(b) Separar los autovalores de A en intervalos de la forma $(m, m+1)$, con $m \in Z$.

7. Transformar en Hessenberg superior la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Tridiagonalizar la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Sea $f(x) = sen(x)$. Sean $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{\pi}{6}$. Calcular:
   (a) El polinomio de Lagrange para $f(x)$ relativo a los nodos $x_0,\ x_1,\ x_2$.
   (b) El polinomio de Taylor para $f(x)$ de grado 3 relativo a x_0.
   (c) El polinomio de Hermite para $f(x)$ relativo a los nodos $x_0,\ x_1$.
2. Sea $f(x) = 2^x$. Sean $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4$. Calcular:
   (a) El polinomio de Lagrange para $f(x)$ relativo a los nodos $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.
   (b) El polinomio de Taylor para $f(x)$ de grado 3 relativo al punto x_0.
   (c) El polinomio de Hermite para $f(x)$ relativo a los nodos $x_0,\ x_1$.
3. Calcular el polinomio $p_2(x)$ de grado menor o igual que 2 que interpola la función $f(x) = cos(\frac{x}{2})$ en los puntos $-\pi,\ 0,\ \pi$.

   Acotar el error cometido al aproximar la función f por p_2 en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Sea $p_n(x)$ el polinomio de Lagrange que interpola la función $f(x) = e^x$ en los nodos $x_i = \frac{i}{n},\ i = 0, \ldots, n$. Calcular para qué valores de n se puede asegurar que $\mid f(x) - p_n(x) \mid < 10^{-6}, \quad \forall x \in [0, 1]$.
5. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y los nodos $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$.

   Calcular el único polinomio de grado 3 que interpola $f(x)$ en los nodos $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ utilizando la fórmula de Newton-Gregory regresiva. Acotar el error de interpolación en el intervalo $[2, 3]$.
6. Calcular numéricamente $\sqrt{2}$ interpolando la función $f(x) = 2^x$ en los nodos $-1, 0, 1, 2$ mediante las fórmulas de Newton-Gregory progresiva y regresiva. Acotar el error cometido con tal aproximación.
7. Calcular el spline $S(x)$ de orden 1 que en los puntos $0,\ 1,\ 2,\ 3$ vale, respectivamente, $2,\ 1,\ 1,\ -1$.
8. Calcular el spline cúbico natural $S(x)$ que en los puntos $0,\ 1,\ 2,\ 3$ vale, respectivamente, $-6,\ 0,\ 2,\ 3$.

   Calcular el polinomio de Lagrange $p_3(x)$ correspondiente a los mismos datos y compararlo con $S(x)$.
9. Se plantea el siguiente problema de interpolación: Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:
   $$p(x_0) = -1, \qquad p(x_1) = 0, \qquad p''(x_0) = -2, \qquad p''(x_1) = 4.$$
   ¿Tiene solución única el problema de interpolación cualesquiera que sean los puntos reales x_0 y x_1?

   Para el caso en que $x_0 = 0,\ x_1 = 1$, calcular la solución, en caso de que exista.
10. (a) Se plantea el siguiente problema de interpolación: Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 2 tal que:
    $$p'(0) = 1, \qquad p''(1) = 2, \qquad p'(2) = 3.$$
    ¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? En caso de tener solución, calcularla.

    (b) Responder a las cuestiones del apartado (a) para el nuevo problema de interpolación: Hallar un polinomio $q(x)$ de grado menor o igual que 2 tal que:
    $$q'(0) = -1, \qquad q''(1) = 2, \qquad q'(2) = 3.$$
11. Se plantea el siguiente problema de interpolación: Hallar un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que 3 tal que:
    $$p(0) = 1, \qquad p'(1) = 2, \qquad p'(2) = 5, \qquad p'''(1) = 6.$$
    ¿Existe solución de este problema? ¿Es única? En caso afirmativo, calcular $p(x)$.

1. Calcular los coeficientes A_i de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:
$$f'''(0) \simeq A_0 f(0) + A_1 f(-h) + A_2 f(h) + A_3 f(-2h) + A_4 f(2h),$$
siendo h un número real conocido.

2. Calcular los coeficientes A_i de la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:
$$f''(0) \simeq A_0 f(0) + A_1 f(-h) + A_2 f(-2h) + A_3 f(h) + A_4 f(2h),$$
siendo h un número real conocido.

3. Obtener los coeficientes A_i de la fórmula de derivación de tipo interpolatorio polinómico siguiente:
$$f'(x_0) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_0 + h) + A_2 f(x_0 + 2h) + A_3 f(x_0 - h) + A_4 f(x_0 - 2h),$$
siendo x_0 y h dos números reales conocidos.

4. Calcular numéricamente $log(2)$ evaluando, mediante las fórmulas de Poncelet, Trapecio y Simpson, la integral:
$$log(2) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$
Estimar el error cometido con cada una de las aproximaciones.

5. Determinar el número m de subintervalos del intervalo $[0, 1]$ suficiente para obtener con 4 cifras decimales exactas el valor de:
$$log(2) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$
utilizando las fórmulas compuestas de:

   (a) Trapecio,

   (b) Simpson.

6. Calcular los coeficientes A_i de la fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico siguiente:
$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \simeq A_0 f(h) + A_1 f(2h) + A_2 f(-h) + A_3 f(-2h),$$
siendo h un número real conocido.