Problemas resueltos de autovalores y autovectores

Eduardo Liz Marzán

Los problemas que se incluyen en esta colección se han extraído de pruebas parciales y exámenes finales de la asignatura Álgebra lineal de las titulaciones de *Ingeniería de la energía* e *Ingeniería de los recursos mineros y energéticos* en la Universidad de Vigo.

Septiembre de 2020

Índice general

Capítulo 1
Autovalores y diagonalización

1) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el espectro de A.
b) Estudiar si A es diagonalizable.

Solución:

a) Desarrollamos el polinomio característico de A teniendo en cuenta que todas las filas suman lo mismo:

$$q_A(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -2 & -3 \\ 2 & -x & -2 \\ 3 & -2 & -1-x \end{vmatrix} \overset{K_{12}(1)}{\underset{K_{13}(1)}{=}} \begin{vmatrix} -x & -2 & -3 \\ -x & -x & -2 \\ -x & -2 & -1-x \end{vmatrix} = (-x) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -x & -2 \\ 1 & -2 & -1-x \end{vmatrix} =$$

$$\overset{F_{21}(-1)}{\underset{F_{31}(-1)}{=}} (-x) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (-x)(2-x)^2.$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 2\}$, con m.a.$(0) = 1$, m.a.$(2) = 2$.

b) A no es diagonalizable porque m.a.$(2) = 2$ y

$$\text{m.g.}(2) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \text{m.a.}(2).$$

2) Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 2 \end{pmatrix},$$

donde c es un parámetro real.

a) Calcular el espectro de M en función de los valores de c.

b) Estudiar para qué valores de c es diagonalizable la matriz M.

Solución:

a) En primer lugar calculamos el polinomio característico de M:

$$q_M(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & c & 2-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ c & 2-x \end{vmatrix} = -x(x^2 - 2x - c).$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 2x - c = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4c}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+c}$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(H) = \{0, 1+\sqrt{1+c}, 1-\sqrt{1+c}\}$.

b) Distinguimos 4 casos:

(i) Si $c < -1$ entonces $1 + c < 0$ y $q_M(x)$ tiene raíces no reales. En este caso, M no es diagonalizable.

(ii) Si $c = -1$ entonces $1 + \sqrt{1+c} = 1 - \sqrt{1+c} = 1$ y $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1, 1\}$.
Calculamos la multiplicidad geométrica de 1:

$$\text{m.g.}(1) = 3 - \mathrm{rg}(M - I) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \text{m.a.}(1) = 2.$$

Por tanto, M no es diagonalizable.

(iii) Es claro que $1 + \sqrt{1+c}$ no puede ser igual a cero. Estudiamos cuándo $1 - \sqrt{1+c} = 0$:

$$1 - \sqrt{1+c} = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1+c} = 1 \Longleftrightarrow 1 + c = 1 \Longleftrightarrow c = 0.$$

Para $c = 0$, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 0, 2\}$. Calculamos la multiplicidad geométrica de 0:

$$\text{m.g.}(0) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \text{m.a.}(0) = 2.$$

Por tanto, M no es diagonalizable.

(iv) Finalmente, M es diagonalizable en el resto de los casos, es decir, si $c \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$, ya que tiene tres autovalores reales de multiplicidad algebraica 1.

3) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Probar que $v = (1, -1, 0)$ es un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = 2$.
b) Calcular el valor de α para el que 2 es el único autovalor de A.
c) Para el valor de α calculado en el apartado *b*), calcular la multiplicidad geométrica de 2. ¿Es A diagonalizable?

Solución:

a) Como

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se deduce que v es un autovector de A asociado al autovalor $\lambda = 2$.

b) Si $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 2, 2\}$, entonces $\mathrm{tr}(A) = 2 + 2 + 2 = 6 = 2 + \alpha$ y por tanto $\alpha = 4$.

c) Para $\alpha = 4$, el único autovalor de A es 2 y

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\mathrm{m.g.}(2) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I) = 3 - 1 = 2$. Como $\mathrm{m.a.}(2) = 3 \neq \mathrm{m.g.}(2)$, A no es diagonalizable.

4) Se considera la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

a) Hallar la matriz M de su expresión matricial $\omega(x) = x^t M x$. Estudiar si ω es degenerada.
b) Calcular los autovalores de M y utilizarlos para clasificar ω.

Solución:

a) La expresión matricial de la forma cuadrática es

$$\omega(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v^t M v.$$

Como el determinante de M es cero, ω es degenerada.

b) Desarrollamos el polinomio característico de M teniendo en cuenta que todas las filas suman lo mismo:

$$q_M(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \overset{K_{12}(1)}{\underset{K_{13}(1)}{=}} \begin{vmatrix} -x & -1 & -1 \\ -x & 2-x & -1 \\ -x & -1 & 2-x \end{vmatrix} = (-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$\overset{F_{21}(-1)}{\underset{F_{31}(-1)}{=}} (-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (-x)(3-x)^2.$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(M) = \{0,3,3\}$ y ω es semidefinida positiva.

5) Probar que la forma cuadrática $\varphi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$ es degenerada y utilizar autovalores para clasificarla.

Solución: La forma cuadrática φ se puede expresar como $\varphi(x) = x^t A_2 x$, donde

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a φ. Como $|A_2| = 0$, φ es degenerada.

El polinomio característico de A_2 es

$$q_{A_2}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \overset{F_{31}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 \\ x-1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \overset{K_{13}(1)}{=} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 2 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-3x) = (1-x)\,x\,(x-3).$$

Por tanto $\mathrm{Sp}(A_2) = \{0,1,3\}$ y φ es semidefinida positiva.

6) Se considera la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x,y,z) = 2x^2 + ay^2 + 2z^2 + 2axz,$$

donde a es un parámetro real.

a) Calcular la matriz M asociada a ω.

b) Hallar el espectro de M en función de los valores de a.

c) Determinar los valores de a para los que se cumplen cada una de las siguientes propiedades:

- c.1) ω es no degenerada.
- c.2) ω es definida positiva.
- c.3) ω es semidefinida positiva.

Solución:

a) La expresión matricial de la forma cuadrática es

$$\omega(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}2&0&a\\0&a&0\\a&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v^tMv.$$

b) El polinomio característico de M es

$$q_M(x)=\begin{vmatrix}2-x&0&a\\0&a-x&0\\a&0&2-x\end{vmatrix}=(a-x)\begin{vmatrix}2-x&a\\a&2-x\end{vmatrix}\overset{F_{12}(1)}{=}(a-x)\begin{vmatrix}(2+a-x)&(2+a-x)\\a&2-x\end{vmatrix}=$$

$$=(a-x)(2+a-x)\begin{vmatrix}1&1\\a&2-x\end{vmatrix}=(a-x)(2+a-x)(2-a-x).$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(M)=\{a,2+a,2-a\}$.

c.1) Como $|M|=a(4-a^2)=a(2-a)(2+a)$:

$$\omega \text{ es no degenerada} \iff a(2+a)(2-a)\neq 0 \iff a\neq -2,0,2.$$

c.2) Los menores principales de M son $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=2a$, $\Delta_3=|M|=a(4-a^2)$. Por tanto:

$$\omega \text{ es definida positiva} \iff \left\{\begin{array}{l}2a>0\\ a(4-a^2)>0\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}a>0\\ a^2<4\end{array}\right\} \iff 0<a<2.$$

c.3) La forma cuadrática ω sólo puede ser semidefinida positiva en un caso degenerado, es decir, para $a\in\{-2,0,2\}$.

- Para $a=-2$, $\mathrm{Sp}(M)=\{-2,0,4\}$ y por tanto ω es indefinida.
- Para $a=0$, $\mathrm{Sp}(M)=\{0,2,2\}$ y por tanto ω es semidefinida positiva.
- Para $a=2$, $\mathrm{Sp}(M)=\{2,4,0\}$ y por tanto ω es semidefinida positiva.

En resumen, ω es semidefinida positiva $\iff a=0$ o $a=2$.

7) Se considera la matriz

$$M=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\-2&2&a\end{pmatrix}.$$

a) Calcular los valores de a para los que la forma cuadrática $\omega_1(x)=x^tMx$ es definida positiva.

b) Sin calcular M^{-1}, razonar cuáles son los valores de a para los que la forma cuadrática $\omega_2(x)=x^tM^{-1}x$ es definida positiva.

c) Para $a=-1$:

(i) Calcular una base de $\mathrm{Ker}(M-3I)$, deducir que 3 es un autovalor de M, y calcular su multiplicidad algebraica.

(ii) Hallar razonadamente el espectro de M sin calcular su polinomio característico.

(iii) Determinar los valores singulares de M utilizando que M es simétrica.

Solución:

a) Los menores principales de M son $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = |M| = 3(a-8)$. Por tanto,

$$M \text{ es definida positiva} \Longleftrightarrow a - 8 > 0 \Longleftrightarrow a > 8 \Longleftrightarrow a \in (8, \infty).$$

b) Que M sea definida positiva es equivalente a que todos los autovalores de M sean positivos. Como los autovalores de M^{-1} son los inversos de los autovalores de M, es claro que tienen el mismo signo. Por tanto:

$$M^{-1} \text{ es definida positiva} \Longleftrightarrow M \text{ es definida positiva} \Longleftrightarrow a \in (8, \infty).$$

c) (i) Para $a = -1$, la matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\text{Ker}(M - 3I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = x + 2z\right\} =$$

$$= \{(x, x + 2z, z) \,/\, x, z \in \mathbb{R}\} =< \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\} > .$$

Por tanto, m.g.$(3) = \dim(\text{Ker}(M - 3I)) = 2$, de donde se deduce que 3 es un autovalor de M. Además, como M es simétrica, en particular es diagonalizable. Esto implica que m.a.$(3) =$ m.g.$(3) = 2$.

(ii) Como m.a.$(3) = 2$, podemos escribir $\text{Sp}(M) = \{3, 3, \lambda\}$. Teniendo en cuenta que la traza coincide con la suma de los autovalores, se tiene:

$$\text{tr}(M) = 2 + 2 - 1 = 3 = 3 + 3 + \lambda \Longrightarrow 3 = 6 + \lambda \Longrightarrow \lambda = -3.$$

Por tanto, $\text{Sp}(M) = \{3, -3\}$, con m.a.$(3) = 2$, m.a.$(-3) = 1$.

(iii) Los valores singulares de M son las raíces cuadradas positivas de los autovalores de M^tM. En este caso, como M es simétrica,

$$M^tM = M^2 \Longrightarrow \text{Sp}(M^tM) = \text{Sp}(M^2) = \left\{3^2, 3^2, (-3)^2\right\} = \{9, 9, 9\}.$$

Por tanto, los valores singulares de M son $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{9} = 3$.

8) Se considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

a) Estudiar si B es diagonalizable.
b) Hallar una diagonalización ortogonal de $M = B^tB$.
c) Calcular una raíz cuadrada de $M = B^tB$.

Solución:

a) El polinomio característico de B es $q_B(x) = |B - xI| = x^2 + 3$. Como las raíces de $x^2 + 3 = 0$ no son reales, la matriz B no es diagonalizable.

b) La matriz M es

$$M = B^t B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $q_B(x) = x^2 - 10x + 9$ y sus raíces son $\lambda_1 = 9$ y $\lambda_2 = 1$. La diagonalización ortogonal de M es $M = PDP^t$, con D diagonal y P ortogonal. Además,

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P = (u_1 | u_2) \,,$$

donde u_1 es un autovector unitario asociado a $\lambda_1 = 9$ y u_2 es un autovector unitario asociado a $\lambda_2 = 1$. Como $V(9) = \mathrm{Ker}(M - 9I) =< \{(1,1)\} >$ y $V(1) = \mathrm{Ker}(M - I) =< \{(-1,1)\} >$, podemos tomar

$$u_1 = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \; u_2 = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right),$$

de modo que

$$P = (u_1 | u_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

c) Teniendo en cuenta que

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

una raíz cuadrada de M es

$$M^{1/2} = PD^{1/2}P^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -\alpha & 2 & -\alpha \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Calcular los autovalores de A.

b) Estudiar si A es diagonalizable en cada uno de los siguientes casos:

(i) $\alpha = 0$.

(ii) $\alpha = -2$.

c) Para $\alpha = 1$:

(i) Clasificar la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\omega(x) = x^t A x$.

(ii) Calcular los valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y dos vectores unitarios $u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $A = \lambda_1 u_1 u_1^t + \lambda_2 u_2 u_2^t$.

Solución:

a) Teniendo en cuenta que todas las columnas de A suman lo mismo, el polinomio característico de A es:

$$q_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} \alpha - x & -1 & 0 \\ -\alpha & 2-x & -\alpha \\ 0 & -1 & \alpha - x \end{vmatrix} \underset{F_{13}(1)}{\overset{F_{12}(1)}{=}} \begin{vmatrix} -x & -x & -x \\ -\alpha & 2-x & -\alpha \\ 0 & -1 & \alpha - x \end{vmatrix} = (-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 2-x & -\alpha \\ 0 & -1 & \alpha - x \end{vmatrix}$$

$$\underset{K_{31}(-1)}{\overset{K_{21}(-1)}{=}} (-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 2+\alpha-x & 0 \\ 0 & -1 & \alpha - x \end{vmatrix} = (-x)(2+\alpha-x)(\alpha-x).$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2+\alpha, \alpha\}$.

b) (i) Para $\alpha = 0$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\}$, con m.a.$(0) = 2$, m.a.$(2) = 1$. A es diagonalizable porque

$$\text{m.g.}(0) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 = \text{m.a.}(0).$$

(ii) Para $\alpha = -2$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -2\}$, con m.a.$(0) = 2$, m.a.$(-2) = 1$. A no es diagonalizable porque

$$\text{m.g.}(0) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \text{m.a.}(0).$$

c) Para $\alpha = 1$, la matriz es simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Como $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3, 0\}$, la forma cuadrática ω es semidefinida positiva.

(ii) La descomposición espectral de A es $A = u_1 u_1^t + 3u_2 u_2^t + 0u_3 u_3^t$. Por tanto $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Los vectores u_1 y u_2 son vectores unitarios de $\mathrm{Ker}(A - I)$ y $\mathrm{Ker}(A - 3I)$, respectivamente.

$$\mathrm{Ker}(A - I) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0,\ z = -x\right\} =< \{(1, 0, -1)\} \Longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(A - 3I) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = z,\ y = -2z\right\} =< \{(1, -2, 1)\} \Longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

10) Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica de la que se sabe lo siguiente:

- $4 \in \mathrm{Sp}(A)$ y su subespacio propio es $V(4) = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x = y,\ z = t\right\}$.
- La traza de A es 6 y su determinante es 16.

a) Calcular la multiplicidad geométrica de 4 y determinar el espectro de A.

b) Clasificar las formas cuadráticas $\omega_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ y $\omega_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definidas por $\omega_1(v) = v^t A v$ y $\omega_2(v) = v^t A^2 v$ respectivamente.

c) Hallar los valores singulares de A.

Solución:

a) La dimensión de $V(4)$ es igual a 4 menos el número de ecuaciones linealmente independientes que lo definen. Por tanto:

$$\text{m.g.}(4) = \dim(V(4)) = 4 - 2 = 2.$$

De aquí se deduce que $\text{m.a.}(4) \geq 2$ y por tanto $\text{Sp}(A) = \{4, 4, \lambda, \mu\}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ya que A es simétrica). Dado que la traza de A es la suma de sus autovalores y el determinante es el producto de los autovalores, se obtiene:

$$\text{tr}(A) = 8 + \lambda + \mu = 6 \Longrightarrow \lambda + \mu = -2 \quad ; \quad |A| = 16\lambda\,\mu = 16 \Longrightarrow \lambda\,\mu = 1,$$

de donde se deduce que $\lambda = \mu = -1$ y $\text{Sp}(A) = \{4, 4, -1, -1\}$.

b) Clasificamos usando los autovalores:

$$\text{Sp}(A) = \{4, 4, -1, -1\} \Longrightarrow \omega_1 \text{ es indefinida y no degenerada.}$$

$$\text{Sp}(A^2) = \{16, 16, 1, 1\} \Longrightarrow \omega_2 \text{ es definida positiva.}$$

c) Como $A^tA = A^2$, $\text{Sp}(A^tA) = \text{Sp}(A^2) = \{16, 16, 1, 1\}$ y los valores singulares de A son

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{16} = 4\,,\ \sigma_3 = \sigma_4 = \sqrt{1} = 1.$$

11) Sean $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ y $M = A^tA$. Sabiendo que

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad M\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\quad M\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}\ ,$$

se pide:

a) Calcular los autovalores de M y sus correspondientes subespacios propios.
b) Hallar las matrices P y D de una diagonalización ortogonal de M y determinar M.
c) Hallar los valores singulares de A.

Solución:

a) Como $M = A^tA \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, de las propiedades del enunciado se obtiene que $\text{Sp}(M) = \{1, 4\}$, con $\text{m.a.}(1) = 2$, $\text{m.a.}(4) = 1$. Los subespacios propios son

$$V(1) =< \{(1,0,1), (0,1,1)\} >\ , \quad V(4) =< \{(-1,-1,1)\} >\ .$$

b) Como $\text{Sp}(M) = \{1, 1, 4\}$, la matriz D es

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

Los vectores columna de la matriz ortogonal $P = (u_1|u_2|u_3)$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de M asociados a los autovalores en el mismo orden en el que aparecen en la matriz D. Para determinarlos, aplicaremos el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Comenzamos por $V(1)$. Si denotamos $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ entonces los dos primeros vectores columna u_1, u_2 de la matriz P se calculan del siguiente modo:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)$$

$$\tilde{u_2} = v_2 - (v_2^t u_1)u_1 = (-1/2, 1, 1/2) \quad ; \quad u_2 = \frac{\tilde{u_2}}{\|\tilde{u_2}\|} = \left(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right).$$

El vector u_3 resulta de normalizar el vector $v_3 = (-1,-1,1)$ que genera $V(4)$, es decir,

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right).$$

Finalmente,

$$P = (u_1|u_2|u_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

La matriz M se determina usando la diagonalización ortogonal:

$$M = PDP^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los autovalores de A^tA.
En este caso, $\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$.

12) Se considera la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que C tiene rango 1 y razonar que $\mathrm{Sp}(C) = \{6,0,0\}$.
b) Encontrar un vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $C = 6\mathbf{u}\mathbf{u}^t$.

Solución:

a) Es claro que $\mathrm{rg}(C) = 1$ porque todas sus filas son proporcionales. De aquí se deduce que $0 \in \mathrm{Sp}(C)$ y además $\mathrm{m.g.}(0) = \dim(\mathrm{Ker}(C)) = 3 - \mathrm{rg}(C) = 2$. Como C es simétrica, $\mathrm{m.a.}(0) = \mathrm{m.g.}(0) = 2$. Denotando por λ al autovalor restante, se tiene que $\mathrm{tr}(C) = 1+1+4 = 0+0+\lambda$ y por tanto $\lambda = 6$. Finalmente, $\mathrm{Sp}(C) = \{6,0,0\}$.

b) Como C es simétrica, admite una descomposición espectral $C = 6u_1\,u_1^t + 0u_2\,u_2^t + 0u_3\,u_3^t$, donde u_1, u_2, u_3 son vectores unitarios. El vector unitario buscado es $\mathbf{u} = u_1$ y se obtiene como un autovector unitario asociado al autovalor 6. Por tanto, debemos calcular una base de

$$\mathrm{Ker}(C - 6I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Haciendo operaciones elementales por filas, se obtiene el sistema equivalente:

$$\mathrm{Ker}(C-6I)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,\begin{array}{c}x=-y\\ z=-2y\end{array}\right\}=\{(y,-y,2y)\,/\,y\in\mathbb{R}\}=<\{(1,-1,2)\}>.$$

Finalmente,

$$\mathbf{u}=\frac{(1,-1,2)}{\|(1,-1,2)\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2).$$

13) Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

a) Calcular los autovalores de A.
b) Hallar una diagonalización ortogonal de A.
c) Clasificar la forma cuadrática $\omega:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $\omega(x)=x^tAx$.
d) Calcular los valores singulares de A.

Solución:

a) El polinomio característico de A es

$$q_A(x)=|A-xI|=\begin{vmatrix}-x&1&1\\1&-x&1\\1&1&-x\end{vmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que todas las columnas suman $2-x$, las propiedades de los determinantes permiten obtener fácilmente que $q_A(x)=(2-x)(-1-x)^2$ y por tanto $\mathrm{Sp}(A)=\{2,-1,-1\}$.

b) Como A es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existen dos matrices D, P, con D diagonal, P ortogonal y $A=PDP^t$. La matriz diagonal es

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Para construir la matriz $P=(u_1|u_2|u_3)$, calculamos bases ortonormales de $V(2)$ y $V(-1)$.
En primer lugar,

$$V(2)=\mathrm{Ker}(A-2I)=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x=y=z\big\}=<\{(1,1,1)\}>,$$

de modo que $u_1=\dfrac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\left(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right)$.

A continuación calculamos una base ortonormal del subespacio propio $V(-1)$.

$$V(-1)=\mathrm{Ker}(A+I)=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+y+z=0\big\}=\{(x,y,-x-y)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\}=$$
$$=<\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}>=<\{v_2,v_3\}>.$$

Aplicamos el procedimiento de Gram-Schmidt para transformar la base $\{v_2,v_3\}$ de $V(-1)$ en una base ortonormal $\{u_2,u_3\}$:

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \left(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}\right);$$

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \left(v_3^t\, u_2\right) u_2 = (0,1,-1) - (1/2,0,-1/2) = (-1/2,1,-1/2);$$

$$u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \left(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}\right).$$

La matriz ortogonal es

$$P = (u_1|u_2|u_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

c) Como $\mathrm{Sp}(A) = \{2,-1,-1\}$, la forma cuadrática ω es indefinida y no degenerada.

d) Los valores singulares de A son las raíces cuadradas positivas de los autovalores de A^tA. Como A es simétrica, $\mathrm{Sp}(A^tA) = \mathrm{Sp}(A^2) = \{4,1,1\}$ y por tanto los valores singulares de A son $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$.

14) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que el polinomio característico de A es $q_A(x) = (1-x)^2\,(2-x)$.
b) Probar que A es diagonalizable si y sólo si $a = 0$.
c) Para $a = 0$:
(*i*) Hallar dos matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$, con D diagonal.
(*ii*) Probar que $\sigma = 1$ es un valor singular de A.

Solución:

a) Desarrollando el polinomio característico, se tiene:

$$q_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & a & a \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(2-x) - a - a(1-x) + a(2-x) = (1-x)^2(2-x).$$

b) Del apartado anterior se deduce que $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2\}$, con m.a.$(1) = 2$ y m.a.$(2) = 1$.
Como el autovalor 2 es simple, la matriz A es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ m.g.$(1) =$ m.a.$(1) = 2$.

$$\text{m.g.}(1) = 3 - \mathrm{rg}(A - I) = 2 \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A-I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Longleftrightarrow a = 0.$$

c) (*i*) Para $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Como

$$V(1) = \mathrm{Ker}(A - I) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + z = 0\right\} = \{(x,y,-x) \,/\, x,y \in \mathbb{R}\} =< \{(1,0,-1),(0,1,0)\} >,$$

$$V(2) = \mathrm{Ker}(A - 2I) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 0,\ y + z = 0\right\} = \{(0,y,-y) \,/\, y \in \mathbb{R}\} =< \{(0,1,-1)\} >,$$

podemos tomar

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;,\; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Los valores singulares de A son las raíces cuadradas positivas de los autovalores de A^tA. Por tanto:

$$1 \text{ es valor singular de } A \Longleftrightarrow 1 \in \mathrm{Sp}(A^tA) \Longleftrightarrow |A^tA - I| = 0.$$

Lo comprobamos:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A^tA - I| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

15) Sea $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matriz no diagonalizable con todos sus autovalores reales.

a) Razonar que $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda, \lambda, \mu\}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Calcular el determinante de M sabiendo que la traza de M es 4, la traza de M^2 es 6 y 1 no es autovalor de M.

Solución:

a) Si M tuviese 3 autovalores reales distintos entonces sería diagonalizable. Por tanto, al menos uno debe tener multiplicidad algebraica mayor que 1 y $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda, \lambda, \mu\}$.

b) Como $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda, \lambda, \mu\} \Longrightarrow \mathrm{Sp}(M^2) = \{\lambda^2, \lambda^2, \mu^2\}$ y la traza es la suma de los autovalores, se tiene que

$$\mathrm{tr}(M) = 2\lambda + \mu = 4 \quad ; \quad \mathrm{tr}(M^2) = 2\lambda^2 + \mu^2 = 6.$$

Despejando μ en la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, tenemos:

$$2\lambda^2 + (4 - 2\lambda)^2 = 6\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 6 \Longrightarrow 3\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $\lambda = 1$ y $\lambda = 5/3$. Como 1 no es autovalor de M, la única solución posible es $\lambda = 5/3$, $\mu = 2/3$.

Por tanto, $\mathrm{Sp}(M) = \left\{\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right\} \Longrightarrow |M| = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{27}.$

Capítulo 2
Funciones de matrices

1) Se considera la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular los autovalores de H y estudiar si es diagonalizable.
b) Calcular una raíz cuadrada de H.
c) Sean σ_1 y σ_2 los valores singulares de H. Probar, sin calcularlos, que $\sigma_1\sigma_2 = 1$.

Solución:

a) En primer lugar calculamos el polinomio característico de H:

$$q_H(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(H) = \{1\}$, con m.a.$(1) = 2$.
Como m.g.$(1) = 2 - \mathrm{rg}(H - I) = 2 - 1 = 1 \neq$ m.a.(1), la matriz H no es diagonalizable.

b) Para calcular una raíz cuadrada de H, definimos la función $f(x) = \sqrt{x}$, de modo que $H^{1/2} = f(H)$. El conjunto de valores de f sobre H es

$$V_{f,H} = \{f(1), f'(1)\}.$$

Dado que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, se tiene que $f(1) = 1,\ f'(1) = 1/2$.
Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx$ tal que

$$r(1) = a + b = f(1) = 1 \quad , \quad r'(1) = b = f'(1) = 1/2.$$

La única solución es $a = b = 1/2$ y por tanto $r(x) = (1/2)(1 + x)$. Finalmente,

$$H^{1/2} = f(H) = r(H) = \frac{1}{2}(I + H) = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

c) Los valores singulares de H son las raíces cuadradas positivas de los autovalores λ_1, λ_2 de H^tH. Como el determinante es el producto de los autovalores se deduce que

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 = \lambda_1\lambda_2 = |H^tH| = |H^t|\,|H| = |H|^2 = 1 \Longrightarrow \sigma_1\sigma_2 = 1.$$

2) Se considera la matriz
$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar el espectro de B y estudiar si B es diagonalizable.
b) Hallar una raíz cuadrada de B.
c) Calcular la traza y el determinante de B^n para cualquier número entero positivo n.

Solución:

a) Desarrollamos el polinomio característico de B por la última columna:

$$q_B(x) = \begin{vmatrix} -1-x & -1 & 0 \\ 4 & 3-x & 0 \\ -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} -1-x & -1 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-2x+1) = (1-x)^3.$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$, con m.a.$(1) = 3$.
La matriz B no es diagonalizable porque

$$\text{m.g.}(1) = 3 - \mathrm{rg}(M - I) = 3 - 2 = 1 \neq 3 = \text{m.a.}(1).$$

b) Definimos la función $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, de modo que $B^{1/2} = f(B)$. El conjunto de valores de f sobre B es
$$V_{f,B} = \{f(1), f'(1), f''(1)\}.$$
Dado que $f(x) = x^{1/2}$, $f'(x) = (1/2)x^{-1/2}$, $f''(x) = (-1/4)x^{-3/2}$, se tiene que

$$f(1) = 1 \quad , \quad f'(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad f''(1) = \frac{-1}{4}.$$

Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que

$$\begin{cases} r(1) = a + b + c = f(1) = 1 \\ r'(1) = b + 2c = f'(1) = \dfrac{1}{2} \\ r''(1) = 2c = f''(1) = \dfrac{-1}{4}. \end{cases}$$

La única solución del sistema es $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{-1}{8}$. Por tanto:

$$r(x) = a + bx + cx^2 = \frac{1}{8}(3 + 6x - x^2).$$

Finalmente
$$B^{1/2} = f(B) = r(B) = \frac{1}{8}(3I + 6B - B^2) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 16 & 16 & 0 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

c) Como $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 1, 1\}$, se tiene que $\mathrm{Sp}(B^n) = \{1^n, 1^n, 1^n\} = \{1, 1, 1\}$ para cualquier número entero positivo n. Por tanto,
$$\mathrm{tr}(B^n) = 1 + 1 + 1 = 3 \quad , \quad |B^n| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

3) *a*) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de rango 1. Probar que $\det(\cos(A)) = \cos(\mathrm{tr}(A))$.
b) Hallar la matriz $\cos(A)$ para
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & \pi \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Como $\mathrm{rg}(A) = 1$, 0 es un autovalor de A y $\mathrm{m.g.}(0) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$. Como la suma de los autovalores es la traza de A, se tiene que $\mathrm{Sp}(A) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \mathrm{tr}(A)\}$. Por otra parte,
$$\mathrm{Sp}(\cos(A)) = \{\underbrace{\cos(0), \cos(0), \ldots, \cos(0)}_{n-1}, \cos(\mathrm{tr}(A))\} = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}, \cos(\mathrm{tr}(A))\}.$$

Utilizando que el determinante de una matriz es el producto de sus autovalores, se obtiene:
$$\det(\cos(A)) = 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \cos(\mathrm{tr}(A)) = \cos(\mathrm{tr}(A)).$$

b) Definimos la función $f(x) = \cos(x)$, de modo que $\cos(A) = f(A)$.
Como $\mathrm{rg}(A) = 1$ y $\mathrm{tr}(A) = \pi$, se obtiene inmediatamente que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 0, \pi\}$. El conjunto de valores de f sobre A es
$$V_{f,A} = \{f(0), f'(0), f(\pi)\}.$$

Dado que $f'(x) = -\,\mathrm{sen}(x)$, se tiene que $f(0) = \cos(0) = 1$, $f'(0) = -\,\mathrm{sen}(0) = 0$, $f(\pi) = \cos(\pi) = -1$. Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que
$$\left.\begin{cases} r(0) = a = f(0) = 1 \\ r'(0) = b = f'(0) = 0 \\ r(\pi) = a + b\pi + c\pi^2 = f(\pi) = -1 \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -\dfrac{2}{\pi^2} \end{cases}$$

Por tanto $r(x) = a + bx + cx^2 = 1 - \dfrac{2x^2}{\pi^2}$ y se tiene:
$$\cos(A) = f(A) = r(A) = I - \frac{2}{\pi^2}\, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\pi^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pi^2 & \pi^2 & \pi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Estudiar si A es diagonalizable

b) Calcular la matriz $f(A)$, donde $f(x) = \ln(x)$.

Solución:

a) El polinomio característico de A es

$$q_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3,$$

y por tanto $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, con m.a.(1)=3. Como

$$\text{m.g.}(1) = \dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = 3 - \mathrm{rg}(A-I) = 3 - 2 = 1 \neq \text{m.a.}(1),$$

A no es diagonalizable.

b) El conjunto de valores de f sobre A es

$$V_{f,A} = \{f(1), f'(1), f''(1)\} .$$

Dado que $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, se tiene que

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1.$$

Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que

$$r(1) = a + b + c = f(1) = 0, \quad r'(1) = b + 2c = f'(1) = 1, \quad r''(1) = 2c = f''(1) = -1.$$

La única solución es $a = -3/2$, $b = 2$, $c = -1/2$, y por tanto

$$r(x) = \frac{-3}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2.$$

Finalmente,

$$f(A) = r(A) = \frac{-3}{2}I + 2A - \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

5) Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el rango y la traza de A y deducir que 0 es el único autovalor de A.
b) Estudiar si A es diagonalizable.
c) Calcular la matriz e^A.
d) Hallar los valores singulares de A.

Solución:

a) Es inmediato comprobar que $\mathrm{rg}(A) = 1$ y $\mathrm{tr}(A) = 0$. Por tanto, $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, con m.a.$(0) = 3$.

b) A no es diagonalizable porque m.a.$(0) = 3$ y m.g.$(0) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 2 \neq$ m.a.(0).

c) Definimos la función $f(x) = e^x$, de modo que $e^A = f(A)$. El conjunto de valores de f sobre A es
$$V_{f,A} = \{f(0), f'(0), f''(0)\}.$$

Dado que $f''(x) = f'(x) = f(x) = e^x$, se tiene que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$.

Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que
$$\begin{cases} r(0) = a = f(0) = 1 \\ r'(0) = b = f'(0) = 1 \\ r''(0) = 2c = f''(0) = 1. \end{cases}$$

La única solución del sistema es $a = 1$, $b = 1$, $c = 1/2$ y por tanto
$$r(x) = a + bx + cx^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Finalmente
$$e^A = f(A) = r(A) = I + A + \frac{1}{2}\, A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Los valores singulares de A son las raíces cuadradas positivas de los autovalores de A^tA. En este caso,
$$A^tA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Se comprueba de nuevo que $\mathrm{rg}(A^tA) = 1$ y $\mathrm{tr}(A^tA) = 18$. Por tanto $\mathrm{Sp}(A^tA) = \{0, 0, 18\}$ y los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

6) Se considera la matriz
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular los autovalores de C. ¿Es C diagonalizable?
b) Calcular la matriz $f(C)$, donde $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.
c) Probar que la traza de C coincide con la traza de C^{-1} sin calcular C^{-1}.

Solución:

a) Desarrollamos el polinomio característico de C usando que todas las filas suman lo mismo:

$$q_C(x) = |C - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & -2 & 2-x \end{vmatrix} \overset{K_{12}(1)}{\underset{K_{13}(1)}{=}} \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 1 \\ 1-x & -1-x & 1 \\ 1-x & -2 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1-x & 1 \\ 1 & -2 & 2-x \end{vmatrix} \overset{F_{21}(-1)}{\underset{F_{31}(-1)}{=}} (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3.$$

Por tanto, $\operatorname{Sp}(C) = \{1\}$, con m.a.$(1) = 3$.
Calculamos la multiplicidad geométrica de 1. Como

$$C - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que m.g.$(1) = \dim(\operatorname{Ker}(C - I)) = 3 - \operatorname{rg}(C - I) = 3 - 1 = 2$.
Por tanto, m.g.$(1) = 2 \neq$ m.a.$(1) = 3$, de donde se deduce que la matriz C no es diagonalizable.

b) El conjunto de valores de f sobre C es

$$V_{f,C} = \{f(1), f'(1), f''(1)\}.$$

Dado que $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$, $f''(x) = -\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)$, obtenemos

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = -\pi, \quad f''(1) = 0.$$

Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que

$$\begin{aligned} r(1) &= f(1) \\ r'(1) &= f'(1) \\ r''(1) &= f''(1). \end{aligned}$$

Como $r(1) = a + b + c$, $r'(1) = b + 2c$ y $r''(1) = 2c$, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= -\pi \\ 2c &= 0. \end{aligned}$$

La única solución es $a = \pi$, $b = -\pi$, $c = 0$, y por tanto $r(x) = \pi(1 - x)$. Finalmente,

$$f(C) = r(C) = \pi(I - C) = \begin{pmatrix} -\pi & 2\pi & -\pi \\ -\pi & 2\pi & -\pi \\ -\pi & 2\pi & -\pi \end{pmatrix}.$$

c) Como los autovalores de C^{-1} son los inversos de los autovalores de C y $\mathrm{Sp}(C) = \{1, 1, 1\}$, se tiene que $\mathrm{Sp}(C^{-1}) = \{1, 1, 1\}$ y por tanto

$$\mathrm{tr}(C^{-1}) = 1 + 1 + 1 = 3 = \mathrm{tr}(C).$$

7) Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Estudiar si M es diagonalizable.
b) Calcular la matriz exponencial e^M.
c) Calcular los valores singulares de M.

Solución:

a) En primer lugar calculamos el polinomio característico de M:

$$q_M(x) = \begin{vmatrix} 2 - x & 1 \\ -4 & -2 - x \end{vmatrix} = x^2.$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$, con m.a.$(0) = 2$.
Como m.g.$(0) = 2 - \mathrm{rg}(M) = 2 - 1 = 1 \neq$ m.a.(0), la matriz M no es diagonalizable.

b) Para calcular la matriz exponencial de M, definimos la función $f(x) = e^x$, de modo que $e^M = f(M)$. El conjunto de valores de f sobre M es

$$V_{f,M} = \{f(0), f'(0)\}.$$

Dado que $f'(x) = f(x) = e^x$, se tiene que $f(0) = f'(0) = 1$.
Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx$ tal que

$$r(0) = a = f(0) = 0 \quad , \quad r'(0) = b = f'(0) = 1.$$

Así, $a = b = 1$ y por tanto $r(x) = 1 + x$. Finalmente,

$$e^M = f(M) = r(M) = I + M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Los valores singulares de M son las raíces cuadradas positivas de los autovalores de M^tM. En este caso:

$$M^tM = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$|M^tM - xI| = \begin{vmatrix} 20-x & 10 \\ 10 & 5-x \end{vmatrix} = x^2 - 25x = x(x-25).$$

Por tanto, $\mathrm{Sp}(M^tM) = \{25, 0\}$ y los valores singulares de M son $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$, $\sigma_2 = 0$.

8) Se considera la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el espectro de C y estudiar si C es diagonalizable.
b) Calcular la matriz C^{2019}.

Solución:

a) Desarrollando el polinomio característico de C, se tiene:

$$q_C(x) = x^2(1-x) \Longrightarrow \mathrm{Sp}(C) = \{0, 0, 1\}.$$

Como $\mathrm{m.g.}(0) = 3 - \mathrm{rg}(C) = 3 - 2 = 1 \neq 2 = \mathrm{m.a.}(0)$, la matriz C no es diagonalizable.

b) Para calcular C^{2019}, definimos la función $f(x) = x^{2019}$, de modo que $C^{2019} = f(C)$. El conjunto de valores de f sobre C es

$$V_{f,C} = \{f(0), f'(0), f(1)\}.$$

Dado que $f(x) = x^{2019}$ y $f'(x) = 2019\,x^{2018}$, se tiene que $f(0) = f'(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que

$$r(0) = a = f(0) = 0, \quad r'(0) = b = f'(0) = 0, \quad r(1) = a + b + c = f(1) = 1.$$

La única solución es, $a = b = 0$, $c = 1$ y por tanto $r(x) = x^2$. Finalmente,

$$C^{2019} = f(C) = C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular los autovalores de A.
b) Estudiar si A es diagonalizable.
c) Calcular, si es posible, un vector unitario v tal que $Av = v$.
d) Determinar un polinomio $r(x)$ de grado 2 tal que $r(A) = A^{1/2}$ y calcular $A^{1/2}$.

Solución:

a) El polinomio característico de A es

$$q_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} -3-x & 2 & 1 \\ -4 & 3-x & 1 \\ -5 & 3 & 2-x \end{vmatrix} \overset{K_{12}(1)}{\underset{K_{13}(1)}{=}} \begin{vmatrix} -x & 2 & 1 \\ -x & 3-x & 1 \\ -x & 3 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 3 & 2-x \end{vmatrix} \overset{K_{31}(-1)}{=} (-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3-x & 0 \\ 1 & 3 & 1-x \end{vmatrix} = (-x)(1-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (-x)(1-x)^2.$$

Por tanto $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 1, 0\}$.

b) Como

$$\text{m.g.}(1) = \dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = 3 - \mathrm{rg}(A-I) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq \text{m.a.}(1),$$

la matriz A no es diagonalizable.

c) Se cumple que $Av = v$ si v es un autovector asociado al autovalor 1. Calculamos $V(1)$:

$$V(1) = \mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{21}(-1)}{\underset{F_{31}(-1)}{=}} \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{13}(-2)}{=} \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y \,,\; z = 2x \right\} = < \{(1, 1, 2)\} > .$$

Por tanto, podemos tomar $v = \dfrac{(1,1,2)}{\|(1,1,2)\|} = \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}\right)$.

d) Definimos la función $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, de modo que $f(A) = A^{1/2}$.

El conjunto de valores de f sobre A es $V_{f,A} = \{f(1), f'(1), f(0)\}$.
Debemos encontrar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que $V_{f,A} = V_{r,A}$. Teniendo en cuenta que $r'(x) = b + 2cx$ y $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, obtenemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(1) = a + b + c = f(1) = 1 \\[2mm] r'(1) = b + 2c = f'(1) = \dfrac{1}{2} \\[2mm] r(0) = a = f(0) = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\[2mm] b = \dfrac{3}{2} \\[2mm] c = \dfrac{-1}{2}. \end{array} \right.$$

Por tanto, $r(x) = \dfrac{3}{2}\,x - \dfrac{1}{2}\,x^2 \Longrightarrow A^{1/2} = f(A) = r(A) = \dfrac{1}{2}(3A - A^2)$.
Finalmente,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ -7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{1/2} = \frac{1}{2}(3A - A^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -7 & 5 & 2 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

10) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular el determinante de A y probar que 0 es autovalor de A.
b) Probar que $(0, 1, -1)$ es autovector de A y calcular el autovalor correspondiente.
c) Utilizar los apartados anteriores para deducir que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 0, 1\}$.
d) Calcular la matriz exponencial e^A.

Solución:

a) El determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{K_{21}(-2)}{\underset{K_{31}(-2)}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Como el determinante de A es el producto de sus autovalores, necesariamente $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

b) Como

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

se deduce que $(0, 1, -1)$ es autovector de A asociado al autovalor 1.

c) Como 0 y 1 son autovalores de A y su traza es 1, el otro autovalor debe ser 0 también, de modo que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 0, 1\}$.

d) Para calcular e^A, definimos la función $f(x) = e^x$, de modo que $e^A = f(A)$.
El conjunto de valores de f sobre A es $V_{f,A} = \{f(0), f'(0), f(1)\}$.
Dado que $f(x) = f'(x) = e^x$, se tiene que $f(0) = f'(0) = 1$ y $f(1) = e$.

Tenemos que determinar un polinomio $r(x) = a + bx + cx^2$ tal que

$$r(0) = a = f(0) = 1, \quad r'(0) = b = f'(0) = 1, \quad r(1) = a + b + c = f(1) = e.$$

La única solución es, $a = b = 1$, $c = e - 2$ y por tanto $r(x) = 1 + x + (e - 2)x^2$.
Finalmente,

$$e^A = f(A) = I + A + (e - 2)A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & -e - 2 & -2e - 2 \\ 1 & e + 1 & 2e + 1 \end{pmatrix}.$$