Apuntes de cálculo: integración, sucesiones y series

Eduardo Liz Marzán

Vigo, Octubre de 2020

Índice general

Introducción

Se recogen aquí las notas correspondientes a los temas de cálculo en una variable real que formaban parte de la asignatura "pre-Bolonia" de Cálculo I de Ingeniería de Minas y que complementan de algún modo los apuntes de Cálculo I de los actuales grados de Ingeniería de la Energía e Ingeniería de los Recursos Mineros y Energéticos.

Capítulo 1

Cálculo integral

1.1. Introducción.

Los conceptos más importantes de este capítulo son los de primitiva e integral, íntimamente relacionados gracias al teorema fundamental del cálculo. Aunque clásicamente está ligado al cálculo de áreas, la mayor importancia del cálculo integral viene dada precisamente por su relación con el cálculo de primitivas, el proceso inverso a la derivación. En este tema se introduce el concepto de integral definida para funciones continuas a trozos sin mencionar las sumas de Riemann. Un tratamiento riguroso se puede encontrar en cualquiera de los libros de la bibliografía.

1.2. Primitiva de una función.

El cálculo de primitivas es el proceso inverso al cálculo de derivadas, aunque resulta técnicamente mucho más complicado.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo real I. Se dice que la función $F : I \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de f en I si F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$.

Propiedad. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo real I. Si F y G son dos primitivas de f entonces existe una constante real C tal que $F(x) - G(x) = C$. En particular, si conocemos una primitiva de f entonces cualquier otra primitiva se obtiene de ella sumándole una constante.

Si $F(x)$ es una primitiva de f, se suele decir también que F es una integral de f y se denota por $\int f(x)\,dx$.

Integrales inmediatas. Las primitivas de algunas funciones son muy sencillas teniendo en cuenta las derivadas de las funciones más usuales. Por ejemplo,

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x$.

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|)$.
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)$.
- $\displaystyle\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x)$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \int (1+\operatorname{tg}^2(x))dx = \operatorname{tg}(x)$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x)$.

En la mayoría de las ocasiones resulta muy complicado reconocer a simple vista una primitiva. Las siguientes propiedades son de utilidad:

1. Integral de una suma.
Sean u y v dos funciones. Entonces

$$\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx.$$

2. Fórmula de integración por partes.
Sean u y v dos funciones derivables. Entonces

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Esta fórmula es una consecuencia de la fórmula de la derivada de un producto. Si denotamos $u = u(x)$, $du = u'(x)dx$, la fórmula se suele escribir en forma más breve como

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Ejemplo. Calcular $\displaystyle\int xe^x dx$.

Tomando $u = x$, $dv = e^x dx$, se tiene $du = dx$, $v = \displaystyle\int e^x dx = e^x$. Por tanto,

$$\int xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x.$$

3. Cambio de variable. Si F es una primitiva de f entonces $G(x) = F(u(x))$ es una primitiva de $g(x) = f(u(x))u'(x)$. Esta propiedad se deduce de la regla de la cadena y suele escribir del siguiente modo:

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u(x)).}$$

Casos particulares:

- $\displaystyle\int u^n(x)u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$.
- $\displaystyle\int e^{u(x)}u'(x)dx = e^{u(x)}$.
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln(|u(x)|)$.

En general, la aplicación de este método no resulta tan directa.

Ejemplo. Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos^3(x)}dx$.

Tomando $u = u(x) = \cos x$, se tiene $du = u'(x)dx = -\operatorname{sen}(x)dx$. Así,

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos^3(x)}dx = \int \frac{-1}{2u^3}du = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{u^3}du = \frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2u^2} = \frac{1}{4u^2} = \frac{1}{4\cos^2(x)}.$$

1.3. La integral definida.

Consideremos una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de tal forma que $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. Se define formalmente la integral definida de f en $[a,b]$ como la medida del área encerrada entre la gráfica de f, el eje de abscisas $y = 0$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Se denota por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Por ejemplo, si $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = 2$, $\forall\, x \in [0,3]$, entonces la integral de f en $[0,3]$ es el área de un rectángulo de base 3 y altura 2. Por tanto, $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = 2\cdot 3 = 6$.

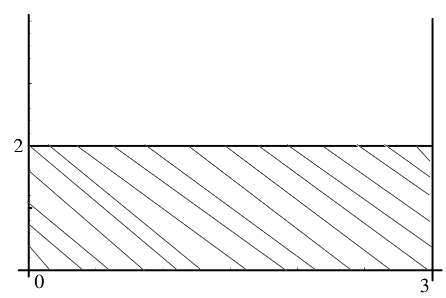

Figura 1.1: Integral de la función $f(x) = 2$ en $[0,3]$.

A continuación definimos la integral definida en el caso general en que f toma valores positivos y negativos en $[a,b]$. En primer lugar se definen la parte positiva f^+ y la parte negativa

f^- de f:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Estas dos funciones toman valores mayores o iguales que cero y se verifica que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx.$$

Por tanto, la integral de f en $[a, b]$ representa la diferencia entre el área que encierra la parte de la gráfica de f situada por encima del eje x y la que encierra la parte situada por debajo de éste. Por ejemplo, $\displaystyle\int_0^2 x - 1\, dx = 0$, ya que los dos triángulos de la figura 1.2 tienen la misma área.

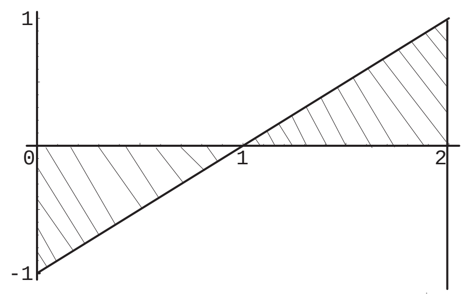

Figura 1.2: Integral de la función $f(x) = x - 1$ en $[0, 2]$.

Propiedades. De esta definición se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

1. Linealidad:
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Monotonía:
$$f(x) \leq g(x),\ \forall\, x \in [a, b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3. Integral y valor absoluto:
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

4. Aditividad: Si $a < c < b$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

1.4. El teorema fundamental del cálculo.

El resultado principal de esta sección establece la relación entre la integral definida y el cálculo de primitivas. Empezamos con un resultado previo.

Teorema 1.1 (Teorema de la media integral) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe un punto $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Demostración. Sean

$$m = \min\{f(x) \,/\, x \in [a,b]\} \quad ; \quad M = \max\{f(x) \,/\, x \in [a,b]\}.$$

Teniendo en cuenta que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a,b]$, y usando la propiedad de monotonía, se tiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Longrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Recordemos que el teorema de los valores intermedios garantiza que la función continua f toma todos los valores entre m y M. Por tanto, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

El resultado se obtiene multiplicando por $(b-a)$ la igualdad anterior. □

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se llama **integral indefinida** de f en $[a,b]$ a la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \; \forall\, x \in [a,b].$$

Teorema 1.2 (Teorema fundamental del cálculo) *Si F es la integral indefinida de f en $[a,b]$ entonces $F'(x) = f(x), \forall\, x \in [a,b]$, es decir, F es una primitiva de f en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $x \in [a,b)$. Veamos que $F'(x^+) = f(x)$. En efecto:

$$F'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Por el teorema de la media integral:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi_h),\; \xi_h \in [x, x+h] \Longrightarrow F'(x^+) = \lim_{h\to 0^+} f(\xi_h) = f(x).$$

Del mismo modo se prueba que $F'(x^-) = f(x)$, $\forall\, x \in (a,b]$. □

Corolario 1.1 (Regla de Barrow) *Si G es una primitiva de f en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demostración. Como la integral indefinida es una primitiva de f, existe una constante real C tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Por tanto,

$$G(b) - G(a) = \left(\int_a^b f(x)dx + C\right) - \left(\int_a^a f(x)dx + C\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

La regla de Barrow es una herramienta eficaz para el cálculo de áreas.

Ejemplo. Hallar el área encerrada entre la gráfica de la parábola $y = x^2$ y el eje x entre $x = -1$ y $x = 1$. Como $F(x) = x^3/3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$, se tiene:

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 x^2 dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

1.5. Integrales impropias.

Hasta el momento hemos considerado integrales de funciones continuas definidas en un intervalo $[a,b]$. En algunos caso, el concepto de integral se puede extender a funciones definidas en intervalos no acotados.

Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Entonces podemos definir $\int_a^b f(x)dx$ para cada número real $b > a$. Diremos que f es integrable en $[a,\infty)$ si existe el límite cuando b tiende a infinito de esas integrales. Este límite se llama **integral impropia** de f en $[a,\infty)$ y se denota por:

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

Si el límite es un número real, diremos que la integral impropia es convergente. Si es infinito, diremos que la integral impropia es divergente.

Ejemplo. La integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

En efecto, si $\alpha > 1$ entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to\infty} \left(\left.\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^b \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Si $\alpha < 1$ el mismo argumento prueba que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \infty$, ya que

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \lim_{b\to\infty}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \infty.$$

Finalmente, si $\alpha = 1$ entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln(x)]_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln(b) - \ln(1)) = \infty.$$

El concepto de integral impropia se define de forma análoga para funciones continuas definidas en un intervalo $(-\infty, b]$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.}$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces también se puede definir la integral impropia de f en $\mathbb{R}$ si existen $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ y $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$.

Si ambas son convergentes entonces diremos que la integral impropia de f en $\mathbb{R}$ es convergente. Además:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx.}$$

Ejemplo.

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}(x)]_a^0\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(x)]_0^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(b) - \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Resultados de comparación.

Muchas veces resulta difícil calcular la primitiva de una función para determinar si la correspondiente integral impropia es convergente. En algunos casos es posible resolver este problema utilizando resultados de comparación.

Criterio 1. Sean $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y positivas. Entonces:

1. Si $f(x) \le g(x)$, $\forall\, x \in [a, \infty)$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también converge.

2. Si $f(x) \ge g(x)$, $\forall\, x \in [a, \infty)$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo. La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente ya que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, $\forall\, x \in [1,\infty)$ y la integral impropia de e^{-x} en $(1,\infty)$ es convergente:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\big]_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-1}-e^{-b}\right) = \frac{1}{e}.$$

A diferencia de lo que ocurre con la función e^{-x}, encontrar una primitiva de e^{-x^2} es una tarea muy complicada.

Criterio 2. Sean $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y positivas tales que existe $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$. Entonces:

1. Si $l \in (0,\infty)$ entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge.
2. Si $l = 0$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también converge.
3. Si $l = \infty$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo. La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+x^3}{1+x^6}dx$ es convergente ya que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ converge y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2+x^3)/(1+x^6)}{1/x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^6}{1+x^6} = 2.$$

Convergencia absoluta.

Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f no es positiva, los criterios anteriores no se pueden aplicar directamente. Sin embargo, sí que se pueden aplicar a la función $|f(x)|$. Teniendo en cuenta que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, se deduce que si $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ es convergente entonces también lo es $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ y además

$$\boxed{\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx.}$$

Por ejemplo, como

$$\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2},\ \forall\, x \geq 1$$

y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge, se deduce que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx$ es convergente y además

$$\left|\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}dx\right| \leq \int_1^\infty \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\right|dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Observación. Se dice que la integral impropia $\int_a^\infty f(x)dx$ es **absolutamente convergente** si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ es convergente.

Integrales impropias de segunda especie.

Sea $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no acotada. Supongamos que existe $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$. Si el límite es finito, diremos que la integral impropia de segunda especie $\int_a^b f(x)dx$ es convergente. Si el límite es infinito, se dice que la integral impropia es divergente.

Del modo análogo se define la integral impropia de f en $[a, b)$ si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua no acotada y existe $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$.

Ejemplos.

1. Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Claramente f no está acotada ya que $\lim_{x\to 0^+} (1/x) = \infty$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to 0^+} (\ln(1) - \ln(c)) = \infty.$$

Por tanto, la integral impropia $\int_0^1 (1/x)dx$ es divergente.

2. Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$. Como antes, f no está acotada ya que $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

$$\int_0^1 \ln(x)dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \ln(x)dx = \lim_{c\to 0^+} \left(x(\ln(x) - 1)]_c^1 \right) = -1 - \lim_{c\to 0^+} c(\ln(c) - 1) = -1.$$

Por tanto, la integral impropia $\int_0^1 \ln(x)dx$ es convergente.

En los cálculos de este ejemplo se ha utilizado el método de integración por partes para calcular una primitiva de $\ln(x)$ y la regla de L'Hôpital para determinar el límite de la expresión $c(\ln(c) - 1)$ cuando c tiende a cero por la derecha.

Capítulo 2

Sucesiones

2.1. Introducción.

Hasta el momento hemos visto los temas del análisis en una variable más importantes en la comprensión de fenómenos continuos, como las leyes del movimiento o la ley de enfriamiento. Existen otros procesos en los que las magnitudes involucradas se miden sólo cada cierto tiempo. Se llaman procesos discretos y aparecen en campos muy variados como la economía o la biología, pero además son muy importantes para aproximar fenómenos continuos difíciles de analizar directamente. El concepto más importante en el estudio de fenómenos discretos es el de sucesión. En este tema se introducen algunas propiedades y criterios de convergencia.

2.2. Sucesiones convergentes y divergentes.

Una aplicación $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número natural n un número real $x(n)$ proporciona una **sucesión** de números reales $x(0), x(1), x(2), \dots$.

En general denotaremos $x_n = x(n)$ para cada número natural n e identificaremos la sucesión con el conjunto $\{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. La denotaremos por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}$.

En muchas ocasiones la sucesión $\{x_n\}$ está definida por un término general. Por ejemplo, $x_n = 1/(n+1)$ es el término general de la sucesión $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$.

En otros casos, la sucesión está definida por recurrencia y no es sencillo determinar el término general. Por ejemplo, consideremos la célebre sucesión de Fibonacci construida a partir de $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ por la recurrencia $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Los primeros términos son $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = x_1 + x_0 = 2$, $x_3 = x_2 + x_1 = 3$, $x_4 = x_3 + x_2 = 5$, ...

Límites.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite $x \in \mathbb{R}$ o que converge a x si los términos de la sucesión se aproximan a x cuando n tiende a infinito. Se denota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Formalmente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow [\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.]$$

Si una sucesión tiene límite $x \in \mathbb{R}$ diremos que es **convergente**. Se deduce fácilmente de la definición que si una sucesión de números reales es convergente entonces su límite es único.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite infinito si para todo número real $M > 0$ todos los términos de la sucesión salvo una cantidad finita son mayores que M. Formalmente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Longleftrightarrow [\forall\, M > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow x_n > M.]$$

Análogamente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longleftrightarrow [\forall\, M > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow x_n < -M.]$$

Las sucesiones con límite $\pm\infty$ se llaman sucesiones **divergentes**.

Diremos que una sucesión está **acotada** si existen dos números reales a, b tales que $a \leq x_n \leq b\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Es fácil probar que todas las sucesiones convergentes están acotadas y las divergentes no lo están.

Observación. Existen sucesiones que no son convergentes ni divergentes. Por ejemplo,

$$\{\cos(n\pi)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}.$$

2.3. Cálculo de límites.

Empezamos esta sección enunciando algunas propiedades útiles para el cálculo de límites.

1. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda x_n) = \lambda x$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

   d) Si $y \neq 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / y_n) = x/y$.

   Las propiedades (a), (b) y (c) se pueden generalizar al caso de sucesiones divergentes, teniendo en cuenta las relaciones formales $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$ y $\lambda \cdot \infty = \infty$ si $\lambda > 0$.

2. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $x \in I$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

   Casos particulares:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} = e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)} = e^x$.

   b) Si $x > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(x_n) = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = \ln(x)$, *c)* Si $x > 0$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ entonces $\lim_{n\to\infty} (x_n^{y_n}) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)} = x^y$.

3. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que existe $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (l puede ser $\pm\infty$). Entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = l$.

   Ejemplo: $\lim_{n\to\infty} \ln(n)/n = 0$, ya que, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x\to\infty} \ln(x)/x = \lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

4. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales. Si $\{x_n\}$ está acotada y $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Por ejemplo, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n)/n = 0$.

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

6. **Criterio del cociente:** Sea $\{x_n\}$ una sucesión de términos positivos (es suficiente que exista un $N > 0$ tal que $x_n > 0$, $\forall\, n \geq N$). Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$.

   - Si $l < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
   - Si $l > 1$ (puede ser ∞) entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

   Si $l = 1$ el criterio no permite calcular el límite.

   Ejemplo: si $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ \infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

   Si $a \leq -1$ la sucesión $\{a^n\}$ no tiene límite. Finalmente, si $a = 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$.

2.4. Límites superior e inferior.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Se llama **subsucesión** de $\{x_n\}$ a cualquier sucesión obtenida tomando infinitos elementos de $\{x_n\}$ sin alterar su orden.

Por ejemplo, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$, tomando solamente los términos pares se obtiene la subsucesión $\{2^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{1, 2^2, 2^4, \dots\}$.

Se dice que l es un **límite de oscilación** de la sucesión $\{x_n\}$ si es el límite de alguna subsucesión de $\{x_n\}$. Por ejemplo, 1 y -1 son límites de oscilación de la sucesión

$$\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

ya que la sucesión de términos pares $\{2k/(2k+1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 1 y la de términos impares $\{-(2k+1)/(2k+2)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a -1.

Si una sucesión es convergente a x entonces su único límite de oscilación es x.

Se llama **límite superior** de la sucesión $\{x_n\}$ al mayor de sus límites de oscilación y **límite inferior** al menor de ellos. En el ejemplo anterior,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -1 \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Propiedades: Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

1. $\{x_n\}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
2. $\{x_n\}$ está acotada superiormente si y sólo si $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$, y está acotada inferiormente si y sólo si $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.

2.5. Sucesiones recursivas.

Se llama sucesión recursiva a aquella en la que el término x_n se define en función de los anteriores. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci es una sucesión de recurrencia en la que cada término se define en función de los dos anteriores.

Las recurrencias más sencillas son aquellas en las que cada término se define en función del anterior a partir de un término inicial $x_0 \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, la sucesión definida a partir de $x_0 = 1$ por la recurrencia $x_{n+1} = (1 - x_n)^2$ proporciona los términos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0, \ldots$

La principal dificultad para estudiar la convergencia de estas sucesiones está en que en general no es posible encontrar la expresión del término general x_n en función de n. De hecho, el problema más complicado es probar la existencia de límite, ya que su determinación se reduce al cálculo de puntos fijos, según prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.1 *Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida a partir de x_0 por la recurrencia $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ y f es continua entonces $x = f(x)$. Es decir, si la sucesión es convergente entonces su límite es un punto fijo de f.*

Demostración. Si $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ entonces $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ y por tanto:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x).$$

□

Hay varios métodos para probar que una sucesión recurrente es convergente. El criterio más sencillo se aplica cuando la función f que define la recurrencia es estrictamente creciente.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ es **creciente** si $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Análogamente, $\{x_n\}$ es **decreciente** si $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente. Para funciones monótonas se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2 *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

Corolario 2.1 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua estrictamente creciente en (a, b) tal que $f(a), f(b) \in [a, b]$. Entonces:*

1. *f tiene un punto fijo en $[a, b]$.*

2. *Para cada $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $\{x_n\}$ definida a partir de x_0 por la recurrencia $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, es monótona y converge a un punto fijo de f en $[a, b]$. Además, $\{x_n\}$ es creciente si $x_1 > x_0$ y es decreciente si $x_1 < x_0$.*

Ejemplo: Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n e^{1-x_n}, n \geq 0. \end{cases}$$

La función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{1-x}$ satisface:

- $f(0) = 0 \in [0, 1]$.
- $f(1) = 1 \in [0, 1]$.
- $f'(x) = (1 - x)e^{1-x} > 0\,,\ \forall\, x \in (0, 1) \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente en $(0, 1)$.

Por el corolario anterior, la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y converge a un punto fijo de f en $[0, 1]$. Como $x_1 = f(x_0) = f(1/2) = \sqrt{e}/2 > 1/2 = x_0$, la sucesión es creciente.

Por otra parte, $f(x) = x \Longleftrightarrow xe^{1-x} = x \Longleftrightarrow x(1-e^{1-x}) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ o $x = 1$. Dado que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y los únicos posibles límites son 0 y 1, necesariamente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Capítulo 3

Series

3.1. Introducción.

El concepto de serie está relacionado con un problema muy antiguo de las Matemáticas: ¿es posible que la suma de infinitos términos positivos dé como resultado un número finito? La respuesta es afirmativa y sólo hay que definir correctamente el concepto de "suma infinita". En este capítulo se introducen las definiciones, propiedades básicas y algunos criterios de convergencia de series, con especial atención a las series de potencias.

3.2. Series de números reales.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ una sucesión de números reales. La suma $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ de los n primeros términos se llama suma parcial n-ésima de la sucesión. Se llama **serie** asociada a $\{x_n\}$ a la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

Ejemplo: Si $\{x_n\} = \{1/2^n\} = \{1/2, 1/2^2, 1/2^3, \dots\}$ entonces $s_1 = 1/2$, $s_2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$, $s_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$. En general,

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1/2 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Denotaremos por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a la serie asociada a $\{x_n\}$.

Convergencia.

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **convergente** si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente, es decir, si existe $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = s$. Dicho límite se llama suma de la serie y se denota $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

En el ejemplo anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Por tanto la serie es convergente y su suma es 1.

Si $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **divergente**.

Por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = 1$, $\forall\, n \geq 1$ proporciona la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cuya sucesión de sumas parciales es $\{s_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ es divergente.

Series geométricas. El ejemplo usado antes es una de las pocas series cuya suma se puede calcular fácilmente. En general, si a es un número real, llamaremos serie geométrica de razón a a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Es sencillo probar que dicha serie es convergente si $|a| < 1$ y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}.$$

Observación. El carácter convergente de una serie no varía si prescindimos de una cantidad finita de téminos, pero sí varía la suma en el caso de que sea convergente. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Propiedades:

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ son convergentes entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ también es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)$ también es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

3. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente entonces necesariamente $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

   Esta propiedad es útil para concluir que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no puede ser convergente si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)/n)$ no puede ser convergente porque $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-1)/n = 1 \neq 0$. El hecho de que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ no garantiza que la serie sea convergente. Como veremos a continuación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ es divergente a pesar de que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

3.3. Series de términos positivos. Criterios de convergencia.

En esta sección consideraremos series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de términos positivos, es decir, $x_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$.

I. Criterio de la integral.

Sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

a) f es decreciente.

b) $f(x) > 0$, $\forall\, x > 1$.

Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y sólo si la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

Además, en caso de que sean convergentes, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Aplicación: Por comparación con la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} (1/x^{\alpha})\, dx$, se deduce del criterio de la integral que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \in (0,1]$.

Por ejemplo, la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente, mientras que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es convergente y además, como $\displaystyle\int_1^{\infty} 1/x^2 dx = 1$, se cumplen las desigualdades

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

II. Criterios de comparación.

Como en el caso de las integrales impropias, consideraremos dos tipos de criterios de comparación: uno directo y otro por paso al límite.

Criterio 1. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq 1$. Entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y además $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2(n)/3^n$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

Criterio 2. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

a) Si $l \in (0,\infty)$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $l = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

c) $l = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Por ejemplo, consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-\sqrt{n})/(n^2+n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+1} = 1 > 0,$$

se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}$ diverge.

III. Criterio del cociente.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Entonces:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

IV. Criterio de la raíz.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Entonces:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

3.4. Convergencia absoluta.

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente.

Teniendo en cuenta la desigualdad triangular, se tiene el siguiente resultado:

Propiedad. Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Esta propiedad permite aplicar los criterios de convergencia para series de términos positivos a series arbitrarias. En particular, tenemos la siguiente generalización del criterio del cociente:

Criterio del cociente generalizado.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de números reales. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$. Entonces:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no converge.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

Observación: se puede formular un criterio similar usando el criterio de la raíz con $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$.

En algunos casos es posible probar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a pesar de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es divergente.

Criterio de Leibniz.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de términos positivos decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ es convergente.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente ya que la sucesión $\{1/n\}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Sin embargo, la serie no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que, como hemos visto, es divergente.

3.5. Series de potencias.

Se llama **serie de potencias** con coeficientes $\{a_n\}_{n\geq 0}$ centrada en x_0 a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Las series de potencias se pueden considerar como una generalización de los polinomios ("de grado infinito"). Una serie de potencias define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que es convergente. Este conjunto se llama intervalo de convergencia de la serie y en general es un intervalo centrado en x_0. El siguiente resultado es una consecuencia del criterio del cociente generalizado:

Teorema 3.1 Supongamos que existe $l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

a) Si l es un número real positivo entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es absolutamente convergente para $x \in (x_0-r, x_0+r)$, donde $r = 1/l$ se llama **radio de convergencia** de la serie. Fuera del intervalo cerrado $[x_0-r, x_0+r]$ la serie es divergente y en los extremos puede ser convergente o divergente.

b) Si $l = \infty$ entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sólo converge para $x = x_0$ (se dice que el radio de convergencia es cero).

c) Si $l = 0$ entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ (se dice que el radio de convergencia es infinito).

Observación: se puede formular un resultado completamente análogo usando el criterio de la raíz, con $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Derivación e integración de series de potencias.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie de potencias convergente en el intervalo (x_0-r, x_0+r). Entonces se puede definir la función $f : (x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Esta función tiene las siguientes propiedades:

1. f es derivable en (x_0-r, x_0+r) y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n(x-x_0)^{n-1}$.

2. f es integrable y además una primitiva de f es

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

<u>Ejemplo:</u> Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es convergente para $x \in (-1,1)$ y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}.$$

Si denotamos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,,\ \forall\, x \in (-1,1).$$

Series de Taylor.

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ de un número real x_0. Entonces se puede calcular el polinomio de Taylor de cualquier orden $k \geq 1$:

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Si consideramos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, con $a_n = f^{n)}(x_0)/n!$ y r es el radio de convergencia de esta serie entonces se puede definir la función

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \forall\, x \in (x_0-r, x_0+r). \tag{3.1}$$

Dado que $f(x) = p_k(x) + r_k(x)$, donde

$$r_k(x) = \frac{f^{k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1},$$

con ξ_x entre x_0 y x, si $\lim\limits_{k\to\infty} r_k(x) = 0$, $\forall\, x \in (x_0-r, x_0+r)$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} (f(x) - p_k(x)) = \lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0$$

y por tanto

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} p_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \forall\, x \in (x_0-r, x_0+r). \tag{3.2}$$

Es decir, f es precisamente la función g definida en (3.1). La expresión (3.2) se llama **desarrollo en serie de Taylor** de la función f centrado en x_0.

Ejemplo 1: El desarrollo en serie de Taylor de la función e^x centrado en $x_0 = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, veamos primero que el radio de convergencia de la serie es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Longrightarrow r = \infty.$$

Ahora probamos que $\lim\limits_{k\to\infty} r_k(x) = 0, \; \forall\, x \in \mathbb{R}$. Como $f^{k)}(x) = e^x, \; \forall\, k \geq 0, \; \forall\, x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$|r_k(x)| = \left| \frac{f^{k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!} \right| |x|^{k+1} = \left| \frac{e^{\xi_x}}{(k+1)!} \right| |x|^{k+1} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Usando el criterio del cociente para la convergencia de sucesiones, se prueba que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{|x|}|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{k\to\infty} |r_k(x)| = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2: El desarrollo en serie de Taylor de la función $\ln(1+x)$ centrado en $x_0 = 0$ es

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

En este caso se obtiene directamente usando la fórmula de integración de una serie de potencias.

Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x), \; \forall\, x \in (-1,1)$, se puede definir la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

Una primitiva de $f(x) = 1/(1+x)$ es $F(x) = \ln(1+x)$. Por otra parte, usando la expresión anterior:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Como dos primitivas de la misma función se diferencian en una constante, necesariamente existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + C.$$

La constante C se determina evaluando los dos miembros de la igualdad en $x = 0$:

$$0 = \ln(1+0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} + C = C.$$

Finalmente, tomando $k = n + 1$, se obtiene:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \; \forall\, x \in (-1, 1).$$

Referencias

Agunos libros donde buscar más información, incluidas las demostraciones que faltan

- Gerald L. Bradley y Karl J. Smith, "Cálculo de una variable, Volumen I", Ed. Prentice Hall, 1998.
- Juan de Burgos, "Cálculo infinitesimal de una variable", Ed. Mc Graw-Hill, 1994.
- Serge Lang, "Cálculo", Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
- James Stewart, "Cálculo. Conceptos y contextos", 3a. ed., Thompson, 2006.