Problemas resueltos de sistemas de ecuaciones lineales

Eduardo Liz Marzán

Los problemas que se incluyen en esta colección se han extraído de pruebas parciales y exámenes finales de la asignatura Álgebra lineal de las titulaciones de *Ingeniería de la energía* e *Ingeniería de los recursos mineros y energéticos* en la Universidad de Vigo.

Septiembre de 2020

Índice general

1. Discusión y resolución 5

2. Mínimos cuadrados 13

Capítulo 1
Discusión y resolución

1) Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = -\lambda \\ x + y - z = -\lambda \end{cases}$$

a) Calcular los valores de λ para los que el sistema tiene solución única.
b) Probar que para $\lambda = -1$ el sistema tiene más de una solución y hallar la solución que está en el plano de ecuación $x + y + z = 0$.

Solución:

a) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4$. El sistema tiene solución única cuando $|A| \neq 0$, es decir para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ excepto $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$.

b) Para $\lambda = -1$ la matriz de coeficientes tiene rango 2 y la matriz ampliada también:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas.}$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Eliminando la tercera ecuación y sumando a la segunda la primera, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} -x + 3y + z = -1 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Por tanto las soluciones son los vectores de la forma $(x, 0, x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.
Imponiendo la ecuación $x + y + z = 0$ se tiene $2x - 1 = 0$ y por tanto $x = 1/2$. La solución pedida es el vector $v = (1/2, 0, -1/2)$.

2) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ:

$$\begin{cases} x - y + z = 4\lambda \\ y + z = -4 \\ x + 2z = \lambda^2 \end{cases}$$

a) Probar que el sistema no tiene solución única para ningún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Determinar el valor de λ para el que el sistema tiene al menos una solución.

Solución:

a) La expresión matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ -4 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Hacemos operaciones elementales en la matriz ampliada (primero restamos la primera fila a la tercera y luego la segunda fila a la tercera):

$$\operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & \lambda^2 \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda^2 - 4\lambda \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4\lambda \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{array}\right).$$

Como $\operatorname{rg}(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, el sistema no puede tener solución única.

b) El sistema tiene al menos una solución si y sólo si el rango de A coincide con el rango de $(A|b)$. Es claro que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) \Longleftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2$.

3) Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases}$$

a) Probar que el sistema es compatible indeterminado.
b) Calcular la solución del sistema que es perpendicular al vector $v = (1, 2, 7)$.

Solución:

a) La expresión matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El sistema es compatible indeterminado ya que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -3 & -2\end{array}\right) = 2 < 3 = \text{número de incógnitas.}$$

b) Eliminando la tercera ecuación y restando a la segunda la primera, se obtiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 2 \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2 - 2z. \end{cases}$$

Por tanto las soluciones son los vectores de la forma $(z, 2-2z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.
Para que un vector solución $u = (z, 2-2z, z)$ sea perpendicular a $v = (1,2,7)$, el producto escalar de u por v debe ser cero, es decir:

$$u^t\, v = (z, 2-2z, z)\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow z + 2(2-2z) + 7z = 0 \Longleftrightarrow 4 + 4z = 0 \Longleftrightarrow z = -1.$$

Sustituyendo $z = -1$ en el vector genérico $(z, 2-2z, z)$, obtenemos la solución $u = (-1, 4, -1)$.

4) Se considera el sistema de ecuaciones homogéneo dependiente del parámetro real λ:

$$\begin{cases} (\lambda-1)x + 2y - 2z = 0 \\ (\lambda-2)y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

a) Calcular los valores de λ para los que el sistema tiene más de una solución.
b) Para $\lambda = 0$, calcular la solución (x,y,z) del sistema cuyas coordenadas suman 2.

Solución:

a) La expresión matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinante de la matriz de coeficientes, se obtiene

$$|A| = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$$

y por tanto el sistema tiene más de una solución (es compatible indeterminado) si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

b) Para $\lambda = 0$ el sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como el rango de A es 2, podemos suprimir la primera ecuación, de modo que el conjunto de soluciones es

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} -2y+z=0 \\ x+z=0 \end{matrix} \right\} =$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 2y = -x \right\} = \{(-2y, y, 2y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Como $-2y + y + 2y = 2$, se deduce que $y = 2$ y por tanto la solución buscada es $v = (-4, 2, 4)$.

5) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \beta & 1 \\ \alpha & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar los valores de α y β para que el vector $\mathbf{u} = (0, -1, 1)$ sea solución del sistema y no sea la única solución.

b) Para los valores calculados en el apartado *a*), determinar el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$.

Solución:

a) El vector $\mathbf{u} = (0, -1, 1)$ es solución del sistema si $A\mathbf{u} = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \beta & 1 \\ \alpha & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \beta = 2.$$

La solución no es única cuando el rango de A es 2, es decir, cuando el determinante de A vale cero. Para $\beta = 2$, $|A| = -3 - 3\alpha$, y por tanto $|A| = 0$ para $\alpha = -1$.

b) El conjunto de soluciones es el núcleo de A. Hacemos operaciones elementales en las filas de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_{12}(-2)}{\xrightarrow{F_{32}(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene así el sistema equivalente

$$x - 3y = 0 \quad ; \quad 2y + z = 0.$$

Por tanto,

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 3y \,,\; z = -2y \right\} = \{(3y, y, -2y) \,/\, y \in \mathbb{R}\} = < \{(3,1,-2)\} > .$$

6) Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^3$. Sabiendo que

$$\mathrm{Ker}(A) = <\{(1,1,0),(0,1,-1)\}>$$

y que $v = (2,1,2)$ es solución del sistema $Ax = b$, calcular el valor de γ para que el vector $(3,1,\gamma)$ sea solución del sistema $Ax = b$.

Solución: El conjunto de soluciones del sistema $Ax = b$ es $S = p + \mathrm{Ker}(A)$, donde p es una solución particular y $\mathrm{Ker}(A)$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$. En este caso la solución particular es $v = (2,1,2)$. Por tanto:

$$(3,1,\gamma) \in S \Longleftrightarrow (3,1,\gamma) = (2,1,2) + \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,-1) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3 = 2 + \alpha \Rightarrow \alpha = 1 \\ 1 = 1 + \alpha + \beta \Rightarrow \beta = -1 \\ \gamma = 2 - \beta = 3 \end{cases}$$

7) Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $\mathrm{Ker}(A) = <\{(2,3,1,0)\}>$.

a) Calcular el rango de A.

b) Justificar que el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es compatible para cualquier $b \in \mathbb{R}^3$. ¿Puede ser compatible determinado para algún b?

c) Razonar cuál de las siguientes matrices es la forma escalonada reducida de filas de A:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) El rango de A se obtiene como la diferencia entre el número de incógnitas (número de columnas de A) y el número de soluciones independientes del sistema homogéneo $Ax = 0$, es decir, $\dim(\mathrm{Ker}(A))$. En este caso, $\mathrm{rg}(A) = 4 - 1 = 3$.

b) Como la matriz ampliada $(A|b)$ tiene 3 filas y 5 columnas, su rango no puede ser mayor de 3. Por tanto, $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A) = 3 < 4 =$ número de incógnitas. De aquí se deduce que el sistema es siempre compatible pero nunca compatible determinado.

c) Si denotamos $R = \mathrm{rref}(A)$, el conjunto de soluciones de $Ax = 0$ coincide con el conjunto de soluciones de $Rx = 0$, es decir, $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Ker}(A) = <\{(2,3,1,0)\}>$. Por tanto, $\mathrm{rref}(A) = R_1$ ya que

$$R_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; R_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8) Sea $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que $\mathrm{rg}(M) = 2$, $Mv_1 = b_1$, $Mv_2 = b_2$, se pide:
a) Calcular la dimensión del núcleo de M.
b) Determinar el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $Mx = 0$.

Solución:

a) Como $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y el rango de M es 2, se sigue que $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 3 - \mathrm{rg}(M) = 1$.

b) Como $b_2 = 2b_1$, se obtiene:

$$Mv_2 = b_2 = 2b_1 = 2Mv_1 \Longrightarrow Mv_2 - 2Mv_1 = 0 \Longrightarrow M(v_2 - 2v_1) = 0 \Longrightarrow v_2 - 2v_1 \in \mathrm{Ker}(M).$$

Como $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 1$, el conjunto de soluciones de $Mx = 0$ es

$$\mathrm{Ker}(M) =< \{v_2 - 2v_1\} >=< \{(-3, -3, 0)\} >=< \{(1, 1, 0)\} > .$$

9) Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^3$. Sabiendo que el rango de A es 2 y que los vectores $v_1 = (-1, 2, 1)$ y $v_2 = (2, 1, 3)$ son soluciones del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, se pide:
a) Probar que $\mathrm{Ker}(A) =< \{v_2 - v_1\} >$.
b) Calcular la solución $x = (x_1, x_2, x_3)$ del sistema $Ax = b$ tal que $x_3 = -1$.

Solución:

a) Dado que v_1 y v_2 son soluciones de $Ax = b$, se cumple que $Av_1 = Av_2 = b$. Por tanto,

$$Av_2 - Av_1 = b - b = 0 \Longrightarrow A(v_2 - v_1) = 0 \Longrightarrow v_2 - v_1 \in \mathrm{Ker}(A).$$

Por otra parte, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 2 = 1$, de modo que $v_2 - v_1 = (3, -1, 2)$ genera $\mathrm{Ker}(A)$.

b) El conjunto de soluciones S de $Ax = b$ está determinado por una solución particular y las soluciones del sistema homogéneo, es decir, $\mathrm{Ker}(A)$. Tomando v_2 como solución particular, se tiene:

$$S = v_2 + \mathrm{Ker}(A) = \{v_2 + \lambda(v_2 - v_1) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2, 1, 3) + \lambda(3, -1, 2) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Para que la tercera coordenada sea -1: $x_3 = 3 + 2\lambda = -1 \Longrightarrow \lambda = -2$. Por tanto, la solución buscada es

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3) - 2(3, -1, 2) = (-4, 3, -1).$$

10) Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^3$. Sabiendo que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = b \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Ker}(A) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{array}{r} 3x - y - 4z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\},$$

se pide:

a) Calcular la dimensión y una base de $\mathrm{Ker}(A)$.
b) Calcular las soluciones del sistema $Ax = b$ que tienen módulo $\sqrt{3}$.

Solución:

a) Sustituyendo $y = x$ en las dos primeras ecuaciones se obtiene la ecuación $y = 2z$. Por tanto,

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = 2z\right\} = \{(2z, 2z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\} =< \{(2,2,1)\} > .$$

La dimensión de $\mathrm{Ker}(A)$ es 1 y una base es $\mathcal{B}_1 = \{(2,2,1)\}$.

b) Sabemos por el enunciado y por el apartado *a*) que el vector $(1,-1,1)$ es una solución particular del sistema $Ax = b$ y $\mathrm{Ker}(A) =< \{(2,2,1)\} >$. Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema es

$$S = \{(1,-1,1) + z(2,2,1) \,/\, z \in \mathbb{R}\} = \{(1+2z, -1+2z, 1+z) \,/\, z \in \mathbb{R}\} .$$

Los vectores de S que tienen módulo $\sqrt{3}$ deben cumplir

$$\|(1+2z, -1+2z, 1+z)\|^2 = 3 \Longleftrightarrow (1+2z)^2 + (-1+2z)^2 + (1+z)^2 = 3 \Longleftrightarrow z(9z+2) = 0.$$

Las soluciones pedidas son $(1,-1,1)$ (para $z = 0$) y $(5/9, -13/9, 7/9)$ (para $z = -2/9$).

11) Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^3$ tales que el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es

$$S = \{(1 + \lambda + \mu, 2 - \lambda + 2\mu, \mu) \;/\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} .$$

a) Calcular de forma razonada el rango de la matriz de coeficientes A y el rango de la matriz ampliada $(A|b)$.
b) Estudiar si el vector $v = (1,5,1)$ es solución del sistema $Ax = b$.

Solución:

a) La solución del sistema se puede escribir como $S = p + \mathrm{Ker}(A) = (1,2,0) + < \{(1,-1,0), (1,2,1)\} >$. Como $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 2$, se deduce que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Por otra parte, como el sistema es compatible (tiene infinitas soluciones), se cumple que $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A) = 1$.

b) Planteando la igualdad $(1,5,1) = (1 + \lambda + \mu, 2 - \lambda + 2\mu, \mu)$, se obtiene que existe una solución $\lambda = -1$, $\mu = 1$. Por tanto, v es solución del sistema.

12) Sea $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y sea $b \in \mathbb{R}^3$ un vector no nulo. Sabiendo que $v_1 = (1, 1, 1)$ es solución del sistema $Mx = b$ y $v_2 = (2, 1, 0)$ es solución del sistema homogéneo $Mx = 0$, razonar brevemente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El rango de M coincide con el rango de la matriz ampliada $(M|b)$.

b) El determinante de M es 0.

c) Si el rango de M es 1 entonces el conjunto de soluciones del sistema $Mx = b$ es una recta de $\mathbb{R}^3$.

d) El vector $v_3 = 2v_1 + v_2$ es solución del sistema $Mx = b$.

Solución:

a) Verdadera: como v_1 es solución, el sistema es compatible y por tanto $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M|b)$.

b) Verdadera: como el sistema homogéneo $Mx = 0$ no tiene solución única $(0, 0, 0)$, el rango de M es menor que 3 y por tanto $|M| = 0$.

c) Falsa: si $\mathrm{rg}(M) = 1$ entonces $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 3 - 1 = 2$ y por tanto el conjunto de soluciones es un plano de $\mathbb{R}^3$.

d) Falsa: $Mv_3 = M(2v_1 + v_2) = 2Mv_1 + Mv_2 = 2b \neq b$. Por tanto, v_3 no es solución del sistema $Mx = b$.

Capítulo 2
Mínimos cuadrados

1) Se consideran los siguientes puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$p_1 = (-1, 1) \quad ; \quad p_2 = (0, 2) \quad ; \quad p_3 = (1, \alpha)\,.$$

a) Calcular el valor de α para que los tres puntos estén alineados.
b) Para $\alpha = -1$, obtener la recta de ajuste de los tres puntos en el sentido de mínimos cuadrados.

Solución:

a) Los puntos están alineados si están sobre la misma recta $y = a + bx$. Primero calculamos la recta que pasa por p_1 y p_2 sustituyendo en la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a + b\cdot(-1) \\ 2 = a + b\cdot 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto la recta es $y = 2 + x$. El punto $p_3 = (1, \alpha)$ está alineado con los otros dos si está sobre esta recta, es decir, $\alpha = 2 + 1 = 3$.

b) Para $\alpha = -1$ resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 1 = a + b\cdot(-1) \\ 2 = a + b\cdot 0 \\ -1 = a + b\cdot 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}.$$

Planteamos el sistema de mínimos cuadrados:

$$M^t M x = M^t B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a = 2 \\ 2b = -2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -1 \end{array}\right.$$

Por tanto la recta de ajuste es $\quad y = \dfrac{2}{3} - x.$

2 Se consideran

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Probar que el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es incompatible.

b) Calcular una solución del sistema $Ax = b$ en el sentido de mínimos cuadrados cuya primera coordenada sea cero.

Solución:

a) Realizando operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada $(A|b)$, tenemos:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{31}(1)}{\overset{F_{21}(-1)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{F_{32}(1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A'|b').$$

Como $\mathrm{rg}(A') = 2 \neq \mathrm{rg}(A'|b') = 3$, el sistema es incompatible.

b) Las soluciones de $Ax = b$ en el sentido de mínimos cuadrados son las soluciones del sistema $A^t Ax = A^t b$, que resulta

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

Como buscamos la solución con $x = 0$, se tiene:

$$\left.\begin{cases} x = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ 3y - z = 2 \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

La solución buscada es $(0, 3/4, 1/4)$.

3) Determinar el plano de ecuación $ax + by + cz = 1$ que mejor ajusta los siguientes puntos de $\mathbb{R}^3$ en el sentido de mínimos cuadrados:

$$P_1 = (1, 0, 0)\,,\ P_2 = (0, 1, 1)\,,\ P_3 = (-1, 0, 1)\,,\ P_4 = (0, -1, 2)\,.$$

Solución:

Imponiendo que los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 estén sobre el plano, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} a = 1 \\ b + c = 1 \\ -a + c = 1 \\ -b + 2c = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}.$$

Para hallar el plano que ajusta mejor los datos en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $A^t Ax = A^t B$, que resulta

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La única solución del sistema es $a = b = \dfrac{2}{5}$, $c = \dfrac{4}{5}$, y por tanto el plano es

$$\frac{2}{5}\,x + \frac{2}{5}\,y + \frac{4}{5}\,z = 1.$$

4) Paula y Andrés se pesan en una báscula por separado y el resultado es 20 Kg y 45 Kg, respectivamente. A continuación se pesan juntos y el resultado es 80 Kg. Ante la perplejidad de los chicos, su tío matemático estima los pesos de Paula y Andrés minimizando el error en el sentido de mínimos cuadrados. ¿Qué pesos aproximados obtiene?

Solución:

Denotemos por x el peso de Paula y por y el peso de Andrés. Las 3 pesadas se escriben como:

$$\left\{\begin{array}{r} x = 20 \\ y = 45 \\ x + y = 80 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 20 \\ 45 \\ 80 \end{pmatrix}}_{b}.$$

El sistema claramente es incompatible. Las soluciones de $Ax = b$ en el sentido de mínimos cuadrados son las soluciones del sistema $A^t Ax = A^t b$, que resulta

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 125 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 100 \\ x + 2y = 125 \end{array}\right.$$

La única solución del sistema es $(x, y) = (25, 50)$, así que el peso aproximado de Paula es $x = 25$ Kg y el de Andrés es $y = 50$ Kg.

5) Se consideran los puntos $(2, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, \alpha)$.

a) Calcular el valor de α para que los puntos estén sobre un mismo plano de ecuación $ax+by+cz = 1$.

b) Para $\alpha = 0$, usar el método de mínimos cuadrados para hallar la ecuación del plano $ax + by + cz = 1$ que pase más cerca de los 4 puntos.

Solución:

a) Imponiendo que los tres primeros puntos cumplan la ecuación del plano $ax + by + cz = 1$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2a + b + c = 1 \\ -a + c = 1 \\ a = 1, \end{cases}$$

cuya única solución es $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$. Por tanto, el plano es $x - 3y + 2z = 1$.

Para que $(0, 1, \alpha)$ esté en el mismo plano, debe cumplirse que $0 - 3 + 2\alpha = 1$, es decir, $\alpha = 2$.

b) Para $\alpha = 0$, tenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + b + c = 1 \\ -a + c = 1 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{d}.$$

El sistema $Cx = d$ es incompatible. Las soluciones de $Cx = d$ en el sentido de mínimos cuadrados son las soluciones del sistema $C^tCx = C^td$, que resulta

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La única solución del sistema es $(a, b, c) = (0, 2/3, 2/3)$, así que la ecuación del plano es

$$\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 1.$$

6) Se desea ajustar a una cónica de ecuación $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ la siguiente tabla de datos experimentales:

x	-1	0	1	2
y	1	2	1	0

a) Probar que los datos no están sobre ninguna cónica definida por esa ecuación.
b) Hallar la cónica de ecuación $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ que mejor ajuste los datos en el sentido de mínimos cuadrados.

Solución:

a) Imponiendo que los puntos $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,1)$ y $(2,0)$ estén sobre la gráfica de la cónica, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} a+b-c &= 1 \\ 4b &= 1 \\ a+b+c &= 1 \\ 4a &= 1 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{z}.$$

El sistema $Ax = z$ es incompatible porque $\mathrm{rg}(A) = 3 \neq 4 = \mathrm{rg}(A|z)$. En consecuencia, los datos no están sobre ninguna cónica definida por la ecuación $ax^2 + by^2 + cxy = 1$.

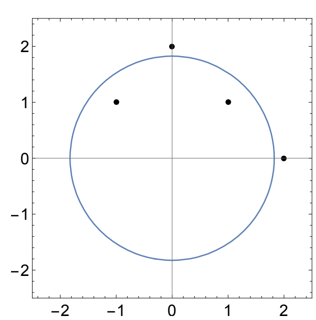
b) Para hallar la cónica que ajusta mejor los datos en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $A^tAx = A^tz$, que resulta

$$\begin{pmatrix} 18 & 2 & 0 \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única solución del sistema es $a = b = \dfrac{3}{10}$, $c = 0$, y por tanto la cónica buscada tiene por ecuación

$$\frac{3}{10}\,x^2 + \frac{3}{10}\,y^2 = 1.$$

Esta es la ecuación de una circunferencia centrada en $(0,0)$, que se representa junto con los datos en la figura.



7) Se considera un cobertizo de base cuadrada con vértices

$$P_1 = (0,0,0),\ P_2 = (1,0,0),\ P_3 = (1,1,0),\ P_4 = (0,1,0)\,.$$

Se desea construir un techo plano con alturas en los vértices $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 4$, respectivamente.

a) Probar que no es posible resolver el problema

b) Determinar la altura que debe tener el techo en cada vértice para que el error sea mínimo en el sentido de mínimos cuadrados.

Indicación: La ecuación del plano del techo debe ser de la forma $z = ax + by + c$.

Solución:

a) Imponiendo que los puntos $Q_1 = (0,0,1)$, $Q_2 = (1,0,1)$, $Q_3 = (1,1,2)$ y $Q_4 = (0,1,4)$ estén en el plano de ecuación $z = ax + by + c$, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} c &= 1\\ a + c &= 1\\ a + b + c &= 2\\ b + c &= 4 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&1\\ 1&1&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 4 \end{pmatrix}}_{z}.$$

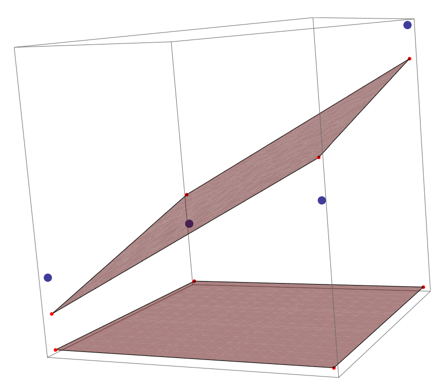
El sistema $Ax = z$ es incompatible porque $\mathrm{rg}(A) = 3 \neq 4 = \mathrm{rg}(A|z)$. En consecuencia, no es posible construir un techo plano que pase por Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4.

b) Para hallar el plano que ajusta mejor los puntos en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $A^t Ax = A^t z$, que resulta

$$\begin{pmatrix} 2&1&2\\ 1&2&2\\ 2&2&4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 6\\ 8 \end{pmatrix}$$

La única solución del sistema es $a = -1$, $b = 2$, $c = \dfrac{3}{2}$, y por tanto el plano buscado tiene por ecuación

$$z = -x + 2y + \frac{3}{2}.$$



Así, las alturas buscadas son:

$$P_1 = (0,0,0) \mapsto z_1^* = \frac{3}{2}\,, \quad P_2 = (1,0,0) \mapsto z_2^* = \frac{1}{2}\,,$$

$$P_3 = (1,1,0) \mapsto z_3^* = \frac{5}{2}\,, \quad P_4 = (0,1,0) \mapsto z_4^* = \frac{7}{2}\,.$$

La base cuadrada y el techo plano se representan junto con los datos en la figura.

8) En un sistema de control automático la variable de salida $y(t)$ en cada instante t depende de los valores de la variable de entrada x en el instante t y en un instante anterior $t-1$, según la relación lineal

$$y(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t-1). \qquad (*)$$

Se hacen varias medidas, obteniéndose para los valores de entrada

$$x(0) = 1,\ x(1) = 1,\ x(2) = 2,\ x(3) = 0$$

los valores de salida

$$y(1) = 2,\ y(2) = 2,\ y(3) = 1.$$

a) Usar el método de mínimos cuadrados para aproximar de modo óptimo los coeficientes a_0 y a_1 de la expresión (*).

b) Usar el resultado del apartado *a)* para predecir el valor de $y(4)$ si $x(4) = 7$.

Solución:

a) Imponiendo que se cumpla la relación (*) para $t = 1, 2, 3$, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} 2 = y(1) = a_0x(1) + a_1x(0) = a_0 + a_1 \\ 2 = y(2) = a_0x(2) + a_1x(1) = 2a_0 + a_1 \\ 1 = y(3) = a_0x(3) + a_1x(2) = 0a_0 + 2a_1 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Para aproximar los coeficientes en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $A^tAx = A^tb$, que resulta:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5a_0 + 3a_1 = 6 \\ 3a_0 + 6a_1 = 6. \end{cases}$$

La única solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}.$$

b) Utilizando el resultado del apartado *a)*, se tiene:

$$y(4) = a_0x(4) + a_1x(3) \approx \frac{6}{7}x(4) + \frac{4}{7}x(3) = \frac{6}{7}\cdot 7 + \frac{4}{7}\cdot 0 = 6.$$

9) En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas r_1 y r_2 dadas en forma paramétrica por las siguientes ecuaciones:

$$r_1) \quad (x,y,z) = P + \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$r_2) \quad (x,y,z) = Q + \mu v,\ \mu \in \mathbb{R},$$

donde $P = (1,1,1)\,,\ Q = (-1,0,-2)\,,\ u = (1,-1,0)\,,\ v = (2,0,1)$.
Las rectas se cortan si existen valores de λ y μ para los cuales $P + \lambda u = Q + \mu v$.

a) Plantear el problema de encontrar un punto de corte de r_1 y r_2 como un sistema de ecuaciones lineales.
b) Probar que las rectas r_1 y r_2 no se cortan.
c) Utilizar el método de mínimos cuadrados para calcular los puntos P_1 y Q_1 de las rectas r_1 y r_2 que están más próximos.
d) Usar el resultado del apartado anterior para calcular la distancia mínima entre las rectas r_1 y r_2.

Solución:

a) Imponiendo que se cumpla la relación $P + \lambda u = Q + \mu v$, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$P + \lambda u = Q + \mu v \iff (1+\lambda, 1-\lambda, 1) = (-1+2\mu, 0, -2+\mu) \iff \begin{cases} \lambda - 2\mu = -2 \\ \lambda = 1 \\ \mu = 3. \end{cases}$$

b) Las rectas no se cortan porque el sistema es incompatible: sustituyendo $\lambda = 1$, $\mu = 3$ en la primera ecuación queda $-5 = -2$, que es falso.

c) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Para aproximar los valores de λ y μ en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $A^t A x = A^t b$, que resulta:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\lambda - 2\mu = -1 \\ -2\lambda + 5\mu = 7. \end{cases}$$

La única solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De este modo, los puntos más próximos son

$$P_1 = P + (3/2)u = (5/2, -1/2, 1) \quad ; \quad Q_1 = Q + 2v = (3,0,0).$$

d) Utilizando el resultado del apartado anterior, se tiene que la distancia mínima entre r_1 y r_2 es $d(P_1, Q_1) = \|Q_1 - P_1\| = \|(1/2, 1/2, -1)\| = \sqrt{3/2}$.

10) Se sabe teóricamente que la trayectoria $f(t)$ de un dispositivo mecánico en función del tiempo t debe cumplir las siguientes condiciones iniciales:

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad f''(0) = 3.$$

Se ha obtenido experimentalmente una trayectoria de la forma

$$f(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + 3\,\mathrm{sen}(t).$$

a) Probar que no existe ningún par de valores reales (α, β) para los que la función obtenida experimentalmente cumpla las condiciones iniciales.

b) Encontrar los valores de α y β y la expresión correspondiente de la trayectoria para que el error al verificar las condiciones iniciales sea mínimo en el sentido de mínimos cuadrados.

Solución:

a) Si $f(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t} + 3\,\mathrm{sen}(t)$, entonces

$$f'(t) = \alpha e^t + 2\beta e^{2t} + 3\cos(t) \quad ; \quad f''(t) = \alpha e^t + 4\beta e^{2t} - 3\,\mathrm{sen}(t).$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = \alpha + \beta = 1 \\ f'(0) = \alpha + 2\beta + 3 = 0 \\ f''(0) = \alpha + 4\beta = 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -3 \\ \alpha + 4\beta = 3 \end{array}\right\}$$

El sistema no tiene solución. Las dos primeras ecuaciones proporcionan $\alpha = 5$, $\beta = -4$, que obviamente no cumplen la tercera ecuación.

b) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Para encontrar los valores de α y β que minimizan el error en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $M^t M x = M^t b$, que resulta:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La única solución del sistema es $\alpha = -2$, $\beta = 1$, de modo que la expresión de la trayectoria es

$$f(t) = -2e^t + e^{2t} + 3\,\mathrm{sen}(t).$$

11) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ x + y - 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Probar que no hay soluciones del sistema en el subespacio

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y = 0\right\}.$$

b) Calcular el vector de U que mejor aproxima la solución del sistema en el sentido de mínimos cuadrados.

Solución:

a) Si $(x, y, z) \in U$ entonces $x + y = 0$. Junto con la primera ecuación $x - y = 0$, se obtiene que $x = y = 0$. Sustituyendo en las dos últimas ecuaciones, se tiene $2z = 1$, $-2z = 2$, lo que es imposible. Por tanto, no puede haber ninguna solución del sistema en U.

b) Los vectores de U cumplen la condición $x + y = 0$. Sustituyendo la condición $y = -x$ en el sistema, se obtiene:

$$\left\{\begin{aligned} 2x &= 0 \\ x + 2z &= 1 \\ -2z &= 2 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Para encontrar los valores de x y z que minimizan el error en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $M^t M x = M^t b$, que resulta:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La única solución del sistema es $x = 1/3$, $z = -1/3$, de modo que el vector de U que mejor aproxima la solución del sistema en el sentido de mínimos cuadrados es

$$v = (x, -x, z) = (1/3, -1/3, -1/3).$$

12) Dados dos números reales x e y, se consideran los puntos $P = (x, x, 1)$ y $Q = (y, -y, x + 4)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Probar que no existen valores de x e y para los cuales $P = Q$.

b) Plantear la igualdad $P = Q$ como un sistema de ecuaciones lineales y utilizar el método de mínimos cuadrados para calcular los valores de x e y para los cuales la distancia entre P y Q es la menor posible.

Solución:

a) La igualdad $P = Q$ conduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x = y \\ x = -y \\ x + 4 = 1 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene que $x = y = 0$, que no cumple la tercera ecuación.

b) La expresión matricial del sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ x = -3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Para encontrar los valores de x e y que minimizan el error en el sentido de mínimos cuadrados, planteamos el sistema $M^t M x = M^t b$, que resulta:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La única solución del sistema es $x = -1$, $y = 0$, de modo que los puntos son $P = (-1, -1, 1)$ y $Q = (0, 0, 3)$.

13) Un servicio meteorólogico indica que las lluvias que se esperan para el martes y el miércoles suman 13 litros por metro cuadrado, otro dice que el martes caerán 9 litros más que el miércoles y la previsión de un tercer servicio es que el martes lloverá el doble que el miércoles. Suponiendo que los tres servicios tienen igual fiabilidad, utilizar el método de mínimos cuadrados para estimar cuántos litros por metro cuadrado caerán el martes y cuántos el miércoles.

Solución:

Denotemos por x la estimación del número de litros por metro cuadrado que caerán el martes y por y la de los litros que caerán el miércoles. Las previsiones conducen al sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 13 \\ x = y + 9 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 13 \\ x - y = 9 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}.$$

El sistema $Ax = b$ es incompatible. Las soluciones de $Ax = b$ en el sentido de mínimos cuadrados son las soluciones del sistema $A^t A x = A^t b$, que resulta

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La única solución del sistema es $(x, y) = (10, 4)$, así que la estimación es que caerán 10 litros por metro cuadrado el martes y 4 litros el miércoles.