Problemas resueltos de cálculo en varias variables reales

EDUARDO LIZ MARZÁN

Los problemas que se incluyen en esta colección se han extraído de pruebas parciales y exámenes finales de la asignatura Cálculo I de las titulaciones de *Ingeniería de la energía* e *Ingeniería de los recursos mineros y energéticos* en la Universidad de Vigo, entre los cursos 2013/2014 y 2019/2020.

Consta de 48 problemas resueltos que se han estructurado en 3 bloques: un primer bloque de curvas, vector gradiente y derivadas direccionales, un segundo bloque dedicado a la regla de la cadena y derivación implícita y, finalmente, un bloque de cálculo de extremos libres y extremos condicionados.

Septiembre de 2020

Índice general

Capítulo 1
Curvas, gradiente, derivadas direccionales

1) Un móvil sigue la trayectoria $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t), e^t)$. Calcular el instante t en el que el módulo de la velocidad es mínimo.

Solución: Como el vector de posición es $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t), e^t)$, el vector velocidad es

$$v(t) = r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-e^{-t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)), e^{-t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)), e^t).$$

Denotamos por $g(t)$ el cuadrado del módulo de la velocidad:

$$\begin{aligned} g(t) = \|v(t)\|^2 &= e^{-2t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))^2 + e^{-2t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t))^2 + e^{2t} = \\ &= e^{-2t}(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) + 2\cos(t)\operatorname{sen}(t)) + e^{-2t}(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) - 2\cos(t)\operatorname{sen}(t)) + e^{2t} = \\ &= 2e^{-2t} + e^{2t}. \end{aligned}$$

Para encontrar el instante donde g alcanza el mínimo, derivamos e igualamos a cero:

$$g'(t) = -4e^{-2t} + 2e^{2t} = 0 \iff e^{2t} = 2e^{-2t} \iff e^{4t} = 2 \iff t = \frac{\ln(2)}{4}.$$

Como $g''(t) = 8e^{-2t} + 4e^{2t} > 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, se deduce que $g''(\ln(2)/4) > 0$, y por tanto en ese punto se alcanza el mínimo.

2) En un videojuego una nave de combate se mueve a lo largo de la trayectoria plana

$$r(t) = (5 - t, 21 - t^2),\ t \in [0, 5].$$

a) Obtener la expresión explícita $y = f(x)$ de la trayectoria en el plano XY y representarla gráficamente.

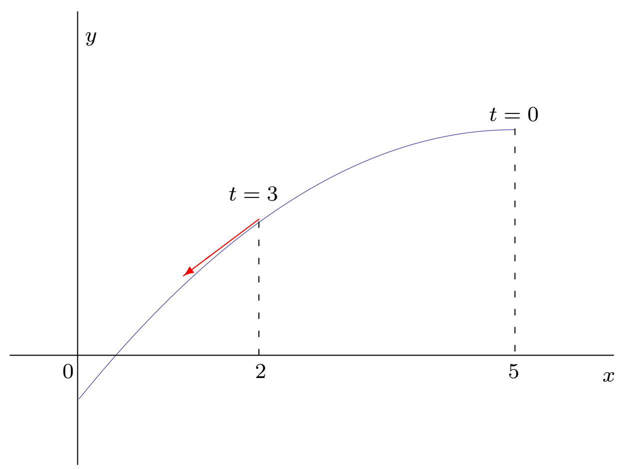
b) Teniendo en cuenta que la nave puede disparar un rayo láser en la dirección del vector tangente $r'(t)$, determinar el instante t en el que la nave debe disparar para que el láser impacte en un objetivo situado en el punto $(0, 0)$.

Solución:

a) Las ecuaciones de la trayectoria son

$$\left.\begin{cases} x = 5 - t \Longrightarrow t = 5 - x \\ y = 21 - t^2 \end{cases}\right\} \Longrightarrow y = 21 - (5 - x)^2 = -x^2 + 10x - 4.$$

Como $x = 5$ para $t = 0$ y $x = 0$ para $t = 5$, la trayectoria es el tramo de la parábola $y = -x^2 + 10x - 4$ para $x \in [0, 5]$. Es un tramo creciente porque $y' = -2x + 10 > 0$ para $x < 5$. Se representa gráficamente en la figura.



b) El vector tangente a la trayectoria es $r'(t) = (-1, -2t)$. La recta que pasa por $r(t)$ y tiene la dirección de $r'(t)$ debe pasar por $(0, 0)$. Por tanto, debe existir $\lambda > 0$ tal que $r(t) + \lambda r'(t) = (0, 0)$:

$$(5 - t, 21 - t^2) + \lambda(-1, -2t) = (0, 0) \Longleftrightarrow \left.\begin{cases} 5 - t = \lambda \\ 21 - t^2 = 2\lambda t \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

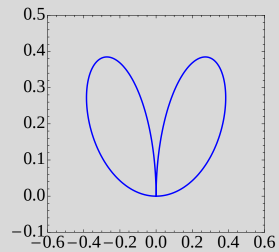
$$\Longrightarrow 21 - t^2 = 2t(5 - t) \Longrightarrow t^2 - 10t + 21 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $t = 3$ y $t = 7$, así que el instante es $t = 3 \in [0, 5]$.
La trayectoria de la curva y el vector tangente se representan en la figura.

3) Se considera la curva $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $r(t) = \big(\operatorname{sen}^2(t)\cos(t), \operatorname{sen}(t)\cos^2(t)\big)$.

a) Probar que la curva pasa por $(0, 0)$ para tres valores de $t \in [0, \pi]$ y calcular los vectores tangente en $(0, 0)$ correspondientes a cada uno de esos valores.

b) Sabiendo que la curva tiene la forma de la figura, justificar si se recorre en sentido horario o antihorario.

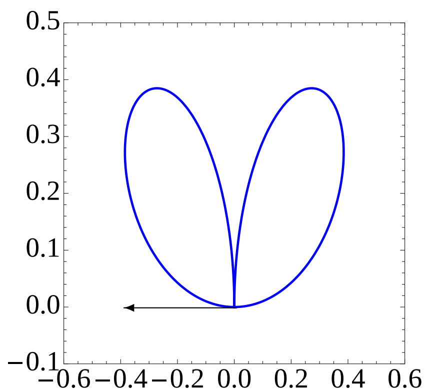


Solución:

a) $r(t) = (0, 0) \iff \big(\operatorname{sen}^2(t)\cos(t), \operatorname{sen}(t)\cos^2(t)\big) = (0, 0)$.
Las soluciones son los valores de $t \in [0, \pi]$ para los cuales $\operatorname{sen}(t) = 0$ o $\cos(t) = 0$, es decir, $t = 0$, $t = \pi/2$ y $t = \pi$.
Como $r'(t) = (2\operatorname{sen}(t)\cos^2(t) - \operatorname{sen}^3(t), \cos^3(t) - 2\cos(t)\operatorname{sen}^2(t))$, los vectores tangente son

$$r'(0) = (0, 1), \quad r'(\pi/2) = (-1, 0) \quad r'(\pi) = (0, -1).$$

b) Teniendo en cuenta que $r'(\pi/2) = (-1, 0)$, es claro que la curva se recorre en sentido horario:



4) Una mosca inicia una trayectoria en línea recta en una habitación desde el punto $P = (3, 9, 4)$ al punto $Q = (5, 7, 3)$. Sabiendo que la temperatura en cada punto (x, y, z) está dada por el campo escalar $T(x, y, z) = xe^{y-z}$, calcular la tasa de cambio de temperatura que experimenta la mosca en el momento que inicia el vuelo.

Solución: La tasa de cambio de temperatura es la derivada direccional del campo T en el punto $P = (3, 9, 4)$ en la dirección del desplazamiento, que viene dada por $PQ = Q - P = (2, -2, -1)$. El vector unitario en esa dirección es $\mathbf{u} = (2/3, -2/3, -1/3)$. El vector gradiente de T es $\nabla T(x, y, z) = \left(e^{y-z}, xe^{y-z}, -xe^{y-z}\right)$. Por tanto, la tasa es

$$D_{\mathbf{u}}T(P) = \nabla T(P) \cdot \mathbf{u} = \left(e^5, 3e^5, -3e^5\right) \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = -\frac{e^5}{3}.$$

5) Se considera el campo escalar

$$f(x, y) = x^2y^3 - 2xy^2.$$

a) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, -3).$$

b) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, -1)$ a la curva definida por la ecuación implícita

$$x^2y^3 - 2xy^2 = -3.$$

Solución:

a) Calculamos el gradiente de f en el punto $(1, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2xy^3 - 2y^2, 3x^2y^2 - 4xy) \Longrightarrow \nabla f(1, -1) = (-4, 7).$$

La ecuación del plano tangente es

$$z + 3 = -4(x - 1) + 7(y + 1) \Longleftrightarrow 4x - 7y + z = 8.$$

b) La curva $x^2y^3 - 2xy^2 = -3$ es la curva de nivel de f que pasa por $(1, -1)$ y por tanto la ecuación de la recta tangente es

$$\nabla f(1, -1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -4(x - 1) + 7(y + 1) = 0 \Longleftrightarrow 4x - 7y = 11.$$

6) Se considera el campo escalar en $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = 1 + \operatorname{sen}(3x + y).$$

a) Calcular los vectores unitarios $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ para los que la tasa de crecimiento de f en la dirección de $\mathbf{u}$ a partir del punto $(0,0)$ es igual a 1.
b) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(\pi/2, -\pi/2, 1)$.

Solución:

a) La tasa de crecimiento de f en la dirección de $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a partir del punto $(0,0)$ es la derivada direccional

$$D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 3u_1 + u_2.$$

Por tanto, $D_{\mathbf{u}} f(0,0) = 1 \Longleftrightarrow 3u_1 + u_2 = 1 \Longleftrightarrow u_2 = 1 - 3u_1$.
El vector $\mathbf{u} = (u_1, 1 - 3u_1)$ es unitario si $u_1^2 + (1 - 3u_1)^2 = 1$, que tiene como soluciones $u_1 = 0$ y $u_1 = 3/5$. Por tanto los vectores pedidos son $\mathbf{u} = (0,1)$ y $\mathbf{u} = (3/5, -4/5)$.
b) Como $\nabla f(\pi/2, -\pi/2) = (-3, -1)$, la ecuación del plano tangente en el punto $(\pi/2, -\pi/2, 1)$ es

$$z - 1 = -3(x - \pi/2) - (y + \pi/2) \Longleftrightarrow 3x + y + z = 1 + \pi.$$

7) La temperatura en cada punto (x,y) de una placa está dada por la función

$$T(x,y) = 2x + e^{y^2 - x^2}.$$

Un dispositivo móvil con un termómetro va midiendo la temperatura siguiendo la trayectoria de la curva

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(2t), \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(2t)).$$

a) Calcular la posición y el vector velocidad del móvil en el instante $t = \pi/2$.
b) Calcular la tasa de variación de la temperatura que experimenta el móvil en el instante $t = \pi/2$.
c) Suponiendo que el móvil puede cambiar su trayectoria, calcular el vector unitario que marca la dirección en que debe moverse a partir de $P = r(\pi/2)$ para que la temperatura medida aumente lo más rápido posible.

Solución:

a) Para $t = \pi/2$, se obtiene $r(\pi/2) = (x(\pi/2), y(\pi/2)) = (1,1)$. Por otra parte, el vector velocidad es $r'(t)$, de modo que

$$r'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\cos(t) - 2\cos(2t), \cos(t) + 2\cos(2t)) \Longrightarrow r'(\pi/2) = (2, -2).$$

b) La tasa de variación de temperatura es la derivada del campo escalar T sobre la curva $r(t)$ en $t = \pi/2$. Si denotamos $h(t) = T(r(t))$, se tiene, usando la regla de la cadena,

$$h'(\pi/2) = \nabla T(r(\pi/2)) \cdot r'(\pi/2) = \nabla T(1,1) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El vector gradiente de T es $\nabla T(x,y) = \left(2 - 2xe^{y^2-x^2},\, 2ye^{y^2-x^2}\right)$. Por tanto, $\nabla T(1,1) = (0,2)$ y

$$h'(\pi/2) = (0,2) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4.$$

c) La dirección de máximo crecimiento la determina el gradiente de T en $(1,1)$. Por tanto, el vector unitario que marca esa dirección es $\mathbf{u} = (0,1)$.

8) La temperatura en cada punto (x,y) de un plano viene dada por una función $T(x,y)$.
Sabiendo que la tasa de incremento de la temperatura en el punto $P = (1,1)$ en la dirección de $v_1 = (1,1)$ es $\sqrt{2}$ y en la dirección de $v_2 = (3,4)$ es 1, se pide:

a) Calcular la dirección de máximo incremento de temperatura a partir de P.

b) Calcular la dirección en que debería moverse una hormiga situada en el punto P para no experimentar variación de temperatura.

Solución:

a) La dirección de máximo incremento es la que marca el vector gradiente $\nabla T(1,1)$. Denotemos $(a,b) = \nabla T(1,1)$. La tasa de incremento de temperatura viene dada por la derivada direccional, de modo que se tiene:

$$\sqrt{2} = D_{\mathbf{u_1}} T(1,1) = (a,b) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \Longrightarrow a + b = 2$$

$$1 = D_{\mathbf{u_2}} T(1,1) = (a,b) \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{3a+4b}{5} \Longrightarrow 3a + 4b = 5,$$

donde $\mathbf{u_1} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $\mathbf{u_2} = (3/5, 4/5)$ son los vectores unitarios en las direcciones de v_1 y v_2 respectivamente. Resolviendo el sistema se tiene que $\nabla T(1,1) = (a,b) = (3,-1)$.

b) La hormiga debe moverse en la dirección de la curva de nivel de P, es decir, en la dirección ortogonal al vector $\nabla T(1,1) = (3,-1)$. Por tanto, debe moverse en la dirección de $(1,3)$, siguiendo la recta

$$y - 1 = 3(x-1) \Longleftrightarrow y = 3x - 2.$$

9) Se considera la curva plana definida implícitamente por la ecuación

$$xy = \operatorname{sen}(\pi x^2 + y).$$

Probar que el punto $(x_0, y_0) = (1,0)$ está sobre la curva y calcular la recta tangente a la curva en dicho punto.

Solución: Sustituyendo $x = 1$, $y = 0$, la ecuación se cumple porque $\mathrm{sen}(\pi) = 0$. Por tanto, $(1, 0)$ es un punto de la curva.

La curva implícita es la curva de nivel 0 del campo escalar $F(x, y) = xy - \mathrm{sen}(\pi x^2 + y)$, de modo que la ecuación de la recta tangente es

$$\nabla F(1,0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Como $\nabla F(x, y) = (y - 2\pi x \cos(\pi x^2 + y), x - \cos(\pi x^2 + y))$, se tiene que $\nabla F(1, 0) = (2\pi, 2)$ y la recta tangente es

$$2\pi(x-1) + 2y = 0 \Longleftrightarrow y = -\pi x + \pi.$$

10) Se considera el campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2 - \ln(x - y)$.

a) Hallar el dominio de definición de f y representarlo gráficamente.

b) Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x, y, z) = (2, 1, 5)$.

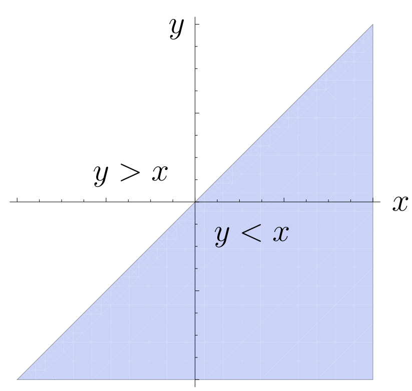
c) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $(x, y) = (2, 1)$ a la curva definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) = 5$.

Solución:

a) Como la función $\ln(x)$ sólo está definida para números positivos, se tiene:

$$(x, y) \in D(f) \Longleftrightarrow x - y > 0 \Longleftrightarrow y < x.$$

Por tanto, el dominio de definición de f es el semiplano bajo la recta $y = x$, que es la región sombreada en la figura.



b) La ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en el punto $(2, 1, 5)$ es

$$z - 5 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \right) \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x-y}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{1}{x-y} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 3.$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es

$$z - 5 = 3(x-2) + 3(y-1) \Longleftrightarrow 3x + 3y - z = 4.$$

c) Teniendo en cuenta que la curva $f(x,y) = 5$ es una curva de nivel de f y por tanto ortogonal al vector gradiente, la ecuación de su recta tangente en el punto $(2,1)$ es

$$\nabla f(2,1)\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (3,3)\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 3(x-2) + 3(y-1) = 0 \Longleftrightarrow x + y = 3.$$

11) Se considera el campo escalar $f(x,y) = y^3 + x^2 y$.

a) Calcular los vectores unitarios $\mathbf{u}$ para los que la derivada direccional de f a partir del punto $P = (3,1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ vale 6.

b) Probar que la curva de nivel $f(x,y) = 10$ pasa por el punto $P = (3,1)$ y calcular la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto P.

c) Calcular el valor del límite

$$\lim_{x\to 3} \frac{2y(x) - x + 1}{\operatorname{sen}(2x-6)},$$

donde $(x, y(x))$ son los puntos de la curva de nivel $f(x,y) = 10$.

Solución:

a) La tasa de crecimiento de f en la dirección de $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a partir del punto $(3,1)$ es la derivada direccional

$$D_{\mathbf{u}} f(3,1) = \nabla f(3,1)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el gradiente de f en P:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy, 3y^2 + x^2) \Longrightarrow \nabla f(3,1) = (6,12).$$

Por tanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(3,1) = (6,12)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 6u_1 + 12u_2,$$

y entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(3,1) = 6 \Longleftrightarrow 6u_1 + 12u_2 = 6 \Longleftrightarrow u_1 = 1 - 2u_2.$$

El vector $\mathbf{u} = (1-2u_2, u_2)$ es unitario si $u_2^2 + (1-2u_2)^2 = 1$, que tiene como soluciones $u_2 = 0$ y $u_2 = 4/5$.
Teniendo en cuenta que $u_1 = 1 - 2u_2$, los vectores unitarios pedidos son $(1,0)$ y $(-3/5, 4/5)$.

b) Como $f(3,1) = 10$, la curva de nivel 10 de f pasa por el punto $P = (3,1)$.

Dado que, como hemos calculado antes, $\nabla f(3,1) = (6,12)$, la ecuación de la recta tangente es

$$\nabla f(3,1)\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 6(x-3)+12(y-1) = 0 \Longleftrightarrow x+2y = 5.$$

c) Como $2y(3)-3+1 = 2-3+1 = 0 = \operatorname{sen}(6-6)$, se trata de una indeterminación del tipo $0/0$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2y(x)-x+1}{\operatorname{sen}(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2y'(x)-1}{2\cos(2x-6)} = \frac{2y'(3)-1}{2}.$$

El valor de $y'(3)$ es el de la pendiente de la recta tangente $x+2y=5$, es decir, $y'(3) = -1/2$, y por tanto

$$\lim_{x\to 3} \frac{2y(x)-x+1}{\operatorname{sen}(x-3)} = \frac{2y'(3)-1}{2} = -1.$$

12) Se considera el campo escalar $F(x,y) = 2xy + x^3$. Encontrar el punto (x_0, y_0, z_0) de la gráfica $z = F(x,y)$ cuyo plano tangente es paralelo al plano $z = x+y$.

Solución:
Las derivadas parciales de F son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y + 3x^2\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x.$$

Por tanto, el plano tangente a la gráfica $z = F(x,y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene la expresión:

$$z - z_0 = \left(2y_0 + 3x_0^2\right)(x-x_0) + 2x_0(y-y_0).$$

Para que sea paralelo al plano $z = x+y$, debe cumplirse que $2y_0 + 3x_0^2 = 2x_0 = 1$. La única solución es $x_0 = 1/2$, $y_0 = 1/8$, para los cuales

$$z_0 = F(1/2, 1/8) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, el punto buscado es $P = (1/2, 1/8, 1/4)$.

13) Se considera el campo escalar en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + y^2 - xy^2 + x^2.$$

Calcular el punto P de la recta $y = x$ para el que la derivada direccional de f en el punto P en la dirección de $(1,1)$ es $2\sqrt{2}$.

Solución: Calculamos el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2x^2 - y^2 + 2x, 2y - 2xy).$$

La derivada direccional de f en $P = (\lambda, \lambda)$ en la dirección de $(1,1)$ está definida por

$$D_{\mathbf{u}} f(\lambda,\lambda) = \nabla f(\lambda,\lambda) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 2\lambda, 2\lambda - 2\lambda^2) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{-\lambda^2 + 4\lambda}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto:

$$\frac{-\lambda^2 + 4\lambda}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow -\lambda^2 + 4\lambda = 4 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2.$$

El punto es $P = (2,2)$.

14) Se considera el campo escalar $g(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

a) Hallar el dominio de definición de g.
b) Calcular el vector unitario que marca la dirección de crecimiento más rápido de g a partir de $(1,1)$.
c) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de g en el punto $(1,1,0)$.
d) Estudiar si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

Solución:

a) Como el denominador sólo se anula en $(0,0)$, $D(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y) \neq (0,0)\}$.

b) La dirección de crecimiento más rápido de g la marca el gradiente de g.

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \Longrightarrow \nabla g(1,1) = (1,-1).$$

El vector unitario es $\mathbf{u} = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$.

c) La ecuación del plano tangente viene dada por

$$z - 0 = \nabla g(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = (x-1) - (y-1) = x - y,$$

de modo que el plano tangente es $x - y - z = 0$.

d) Los límites direccionales de g cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ según las rectas $y = \lambda x$ son:

$$\lim_{x\to 0} g(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \lambda^2 x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-\lambda^2)}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}.$$

Como el límite toma distintos valores para los diferentes valores de λ, se puede concluir que no existe el límite de g en $(0,0)$.

Capítulo 2
Regla de la cadena y derivación implícita

1) La longitud a y la anchura b de una lámina rectangular varían con tasas constantes de α metros por segundo y β metros por segundo respectivamente. Denotemos por S la superficie de la lámina y por D su diagonal. Calcular las tasas de variación α y β sabiendo que $S'(t) = -3\ m^2/sg$ y $D'(t) = 0$ en el instante t en el que $a = 2$ y $b = 1$.

Solución:

Las fórmulas para la superficie S y la diagonal D en función de a y b son

$$S = ab \quad ; \quad D = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que $a'(t) = \alpha$, $b'(t) = \beta$, obtenemos:

$$S'(t) = \frac{\partial S}{\partial a}\, a'(t) + \frac{\partial S}{\partial b}\, b'(t) = b\alpha + a\beta,$$

$$D'(t) = \frac{\partial D}{\partial a}\, a'(t) + \frac{\partial D}{\partial b}\, b'(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\beta.$$

Para $a = 2$, $b = 1$, resulta el sistema

$$\alpha + 2\beta = -3$$

$$2\alpha + \beta = 0,$$

cuya única solución es $\alpha = 1\ m/sg$, $\beta = -2\ m/sg$.

2) El radio r de la base de un cono aumenta a una tasa de 0.5 cm/s y su altura h disminuye a una tasa de 1 cm/s. Calcular la relación entre el radio y la altura en el momento en que la tasa de incremento de volumen es nula. (Volumen del cono $= (\pi/3)r^2h$).

Solución:

El volumen está definido por el campo escalar $V(r,h) = (\pi/3)r^2h$.

Como las variables r, h dependen de t, una aplicación de la regla de la cadena proporciona:

$$V'(t) = \frac{\partial V}{\partial r}(r(t), h(t)) \cdot r'(t) + \frac{\partial V}{\partial h}(r(t), h(t)) \cdot h'(t) = \frac{2\pi}{3} r(t)h(t)r'(t) + \frac{\pi}{3} r^2(t)h'(t).$$

Del enunciado sabemos que $r'(t) = 1/2,\ h'(t) = -1$, de modo que, teniendo en cuenta que $r > 0$,

$$V'(t) = \frac{\pi}{3} r(t)h(t) - \frac{\pi}{3} r^2(t) = 0 \Longleftrightarrow r(t) = h(t).$$

Por tanto el radio y la altura deben ser iguales en el instante en que la tasa de incremento de volumen es nula.

3) La longitud x, la anchura y y la altura z de una caja rectangular varían en función del tiempo t. En el instante $t = 1$, las dimensiones son $x = 1$, $y = z = 2$ y las tasas de variación del volumen V, el área de la base A y la superficie total S (incluyendo la tapa) son $V'(1) = 3$, $A'(1) = 2$ y $S'(1) = 7$, respectivamente.
Calcular las tasas de variación $x'(1)$, $y'(1)$, $z'(1)$.

Solución:

Las fórmulas para el volumen V, el área de la base A y la superficie total S son:

$$V(x, y, z) = xyz \quad ; \quad A(x, y) = xy \quad ; S(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Como las variables x, y, z dependen de t, una aplicación de la regla de la cadena proporciona:

$$V'(t) = \frac{\partial V}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial V}{\partial z} z'(t) = yzx'(t) + xzy'(t) + xyz'(t);$$

$$A'(t) = \frac{\partial A}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial A}{\partial y} y'(t) = yx'(t) + xy'(t);$$

$$S'(t) = \frac{\partial S}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial S}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial S}{\partial z} z'(t) = 2(y + z)x'(t) + 2(x + z)y'(t) + 2(x + y)z'(t).$$

Para $t = 1$ se tiene $x = 1$, $y = z = 2$. Sustituyendo:

$$V'(1) = 4x'(1) + 2y'(1) + 2z'(1) = 3;$$

$$A'(1) = 2x'(1) + y'(1) = 2;$$

$$S'(1) = 8x'(t) + 6y'(1) + 6z'(1) = 7.$$

La única solución del sistema es $x'(1) = 1/2$, $y'(1) = 1$, $z'(1) = -1/2$.

4) Se considera el campo vectorial dado por $G(x,y) = (x^2 \ln(xy), e^{x-y}, x^2 y)$.

a) Calcular la matriz jacobiana $DG(1,1)$.

b) Si H es otro campo vectorial cuya matriz jacobiana en $(0,1,1)$ es

$$DH(0,1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

calcular $D(H \circ G)(1,1)$.

Solución:

a) Denotando $G(x,y) = (G_1(x,y), G_2(x,y), G_3(x,y)) = (x^2 \ln(xy), e^{x-y}, x^2 y)$, la matriz jacobiana es la matriz de las derivadas parciales

$$DG(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial G_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial G_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2x\ln(xy) + x & x^2/y \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

En particular, en el punto $(x,y) = (1,1)$, la matriz es

$$DG(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Teniendo en cuenta que $G(1,1) = (0,1,1)$, una aplicación de la regla de la cadena proporciona:

$$D(H \circ G)(1,1) = DH(0,1,1)\, DG(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable y sea $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$, con $t > 0$.

a) Probar que si $F(r(t))$ es constante entonces la dirección de crecimiento más rápido de F en cada punto de la curva es ortogonal a la dirección de avance de la curva.

b) Comprobar la propiedad del apartado anterior para el campo $F(x,y,z) = xy + \dfrac{z^2}{x}$ y la curva $r(t) = (t, -t^2, t^2)$.

Solución:

a) La dirección de crecimiento más rápido de F la marca el gradiente de F, mientras que la dirección de avance de la curva la marca el vector tangente $r'(t)$.

Como $F(r(t)) = K$ para una constante K, una aplicación de la regla de la cadena proporciona la relación $(F(r(t)))' = \nabla F(r(t)) \cdot r'(t) = 0$ y por tanto los vectores $\nabla F(r(t))$ y $r'(t)$ son ortogonales.

b) Para $F(x,y,z) = xy + \dfrac{z^2}{x}$ y la curva $r(t) = (t, -t^2, t^2)$, se tiene que $F(r(t)) = -t^3 + t^3 = 0$. Por otra parte,

$$\nabla F(x,y,z) = \left(y - \frac{z^2}{x^2}, x, \frac{2z}{x}\right) \Longrightarrow \nabla F(r(t)) = (-2t^2, t, 2t).$$

Como $r'(t) = (1, -2t, 2t)$, se tiene:

$$\nabla F(r(t)) \cdot r'(t) = (-2t^2, t, 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = -2t^2 - 2t^2 + 4t^2 = 0.$$

6) En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos sistemas de coordenadas (x,y,z) y (u,v,w), relacionados por las fórmulas

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = y - z \\ w = z - x. \end{cases}$$

Se considera el campo escalar $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido en coordenadas (u,v,w) por la expresión $F(u,v,w) = u \operatorname{sen}(vw)$.

a) Calcular el vector gradiente de F en coordenadas (u,v,w).

b) Probar que para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se cumple que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Solución:

a) El vector gradiente en coordenadas (u,v,w) es

$$\nabla F(u,v,w) = (\partial F/\partial u, \partial F/\partial v, \partial F/\partial w) = (\operatorname{sen}(vw), uw\cos(vw), uv\cos(vw)).$$

b) Usando la regla de la cadena, y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -1,$$

tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial w}$$

Del mismo modo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial w}.$$

Por tanto:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial w} = 0.$$

7) Se considera la superficie parametrizada en la forma

$$(x(u,v), y(u,v)) = \left(e^{2u}\cos(v), e^{3u}\operatorname{sen}(v)\right),$$

con $u \in (-1,1)$, $v \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Sabiendo que el campo de temperaturas sobre los puntos de la superficie está dado por la función $T(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + y + 4xy$, se pide:

a) Calcular los valores de u y v que corresponden al punto $P = (x_0, y_0) = (1,0)$.

b) Hallar las tasas de variación de la temperatura respecto a las variables u y v en el punto P.

Solución:

a) Sustituyendo $x = 1$, $y = 0$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} e^{2u}\cos(v) = 1 \\ e^{3u}\operatorname{sen}(v) = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene que $v = 0$. Sustituyendo en la primera, tenemos $e^{2u} = 1$ y por tanto $u = 0$.

b) Teniendo en cuenta las expresiones de $T(x,y)$, $x(u,v)$ e $y(u,v)$ y aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (2x - 3 + 4y)2e^{2u}\cos(v) + (2y + 1 + 4x)3e^{3u}\operatorname{sen}(v)$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = (2x - 3 + 4y)e^{2u}(-\operatorname{sen}(v)) + (2y + 1 + 4x)e^{3u}\cos(v).$$

Evaluando en $x = 1$, $y = 0$, $u = v = 0$, tenemos que las tasas de variación de T respecto de u y v en P son, respectivamente:

$$\frac{\partial T}{\partial u}(P) = -2 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial v}(P) = 5.$$

8) Un móvil se aleja de la posición de equilibrio $(0,0,0)$ siguiendo una trayectoria

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1 + \operatorname{sen}(t) - \cos(t), 1 + \operatorname{sen}(2t) - \cos(2t), z(t)).$$

Sabiendo que en el instante $t = \pi/2$ la altura es $z(\pi/2) = 1$, calcular la tasa de variación de la altura $z'(\pi/2)$ para que en ese instante el móvil se aleje del origen a una velocidad de 1 m/s.
Nota: La velocidad a la que se aleja del origen se interpreta como la tasa de cambio de la función $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$ que mide la distancia de $r(t)$ a $(0,0,0)$.

Solución:
Sabemos que $d'(\pi/2) = 1$, para la función $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$.

Usando la regla de la cadena, se tiene:

$$d'(t) = \frac{\partial d}{\partial x}\, x'(t) + \frac{\partial d}{\partial y}\, y'(t) + \frac{\partial d}{\partial z}\, z'(t).$$

Las derivadas parciales de d son:

$$\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ; \quad \frac{\partial d}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ; \quad \frac{\partial d}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

En el instante $t = \pi/2$, la posición del móvil es $r(\pi/2) = (x(\pi/2), y(\pi/2), z(\pi/2)) = (2,2,1)$, de modo que las derivadas parciales en ese punto son

$$\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{\partial d}{\partial y} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{\partial d}{\partial z} = \frac{1}{3}\,.$$

Por otra parte,

$$x(t) = 1 + \operatorname{sen}(t) - \cos(t) \Longrightarrow x'(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t) \Longrightarrow x'(\pi/2) = 1,$$

$$y(t) = 1 + \operatorname{sen}(2t) - \cos(2t) \Longrightarrow y'(t) = 2\cos(2t) + 2\operatorname{sen}(2t) \Longrightarrow y'(\pi/2) = -2.$$

Finalmente:

$$1 = d'(\pi/2) = \frac{2}{3} - 2\,\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\, z'(\pi/2) \Longrightarrow \frac{1}{3}\, z'(\pi/2) = \frac{5}{3} \Longrightarrow z'(\pi/2) = 5.$$

9) Una partícula se mueve siguiendo una curva plana $r(t) = (x(t), y(t))$. Los campos de temperatura y presión atmosférica en cada punto del plano vienen dados, respectivamente, por las funciones

$$T(x,y) = xy + e^{x-y} \quad ; \quad p(x,y) = x^3 + y^3 - \ln(xy^2).$$

a) Calcular la dirección de crecimiento más rápido de la temperatura a partir del punto $(1,1)$.

b) Probar que $(1,1)$ está en la curva de nivel $p(x,y) = 2$ y calcular la ecuación de la recta tangente a dicha curva de nivel en el punto $(1,1)$.

c) Sabiendo que en el instante $t = 1$ la posición de la partícula es $r(1) = (x(1), y(1)) = (1,1)$ y que las tasas de variación de la temperatura y la presión respecto al tiempo en ese instante son $T'(1) = -4$ y $p'(1) = 0$, calcular el vector velocidad $r'(1)$.

Solución:

a) La dirección de crecimiento más rápido la marca el vector gradiente. En este caso:

$$\nabla T(x,y) = \left(y + e^{x-y}, x - e^{x-y}\right) \Longrightarrow \nabla T(1,1) = (2,0)\,.$$

b) Como $p(1,1) = 2$, el punto $(1,1)$ está en la curva de nivel 2 de la función $p(x,y)$.
La ecuación de la recta tangente a la curva de nivel viene dada por:

$$\nabla p(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Como

$$\nabla p(x,y) = \left(3x^2 - \frac{1}{x}, 3y^2 - \frac{2}{y}\right) \Longrightarrow \nabla p(1,1) = (2,1)\,,$$

se obtiene la ecuación

$$2(x-1) + (y-1) = 0 \Longleftrightarrow 2x + y = 3.$$

c) Tenemos que calcular el vector velocidad $r'(1) = (x'(1), y'(1))$.
Aplicando la regla de la cadena a las funciones que definen la temperatura y la presión, y evaluando en $t = 1$, $(x,y) = (1,1)$, tenemos:

$$T'(1) = \frac{\partial T}{\partial x}(1,1)\, x'(1) + \frac{\partial T}{\partial y}(1,1)\, y'(1)$$

$$p'(1) = \frac{\partial p}{\partial x}(1,1)\, x'(1) + \frac{\partial p}{\partial y}(1,1)\, y'(1).$$

Sustituyendo las derivadas parciales y los valores $T'(1) = -4$, $p'(1) = 0$, resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,x'(1) = -4 \\ 2\,x'(1) + y'(1) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'(1) = -2 \\ y'(1) = 4. \end{array}\right.$$

Finalmente, el vector velocidad es

$$r'(1) = (x'(1), y'(1)) = (-2, 4)\,.$$

10) Calcular el plano tangente en el punto $(1,-1,0)$ a la superficie definida implícitamente por la ecuación

$$y^2x - x^2y + x\,\mathrm{sen}(xz) = 2.$$

Solución:

Se considera la función auxiliar

$$F(x,y,z) = y^2x - x^2y + x\,\mathrm{sen}(xz) - 2.$$

Usando derivación implícita:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{-(y^2 - 2xy + \mathrm{sen}(xz) + xz\cos(xz))}{x^2\cos(xz)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = \frac{-(2xy - x^2)}{x^2\cos(xz)}.$$

Para $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -3 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nabla z(x,y) = (-3,3).$$

La ecuación del plano tangente es: $z - 0 = -3(x-1) + 3(y+1) \Longleftrightarrow 3x - 3y + z = 6.$

11) Se considera la superficie $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^3 + y^2 + xyz + e^{xz^2} = 3$$

en un entorno del punto $(1, 1, 0)$.

a) Comprobar que el punto $(1, 1, 0)$ pertenece a la superficie.

b) Calcular la dirección de máximo crecimiento de z a partir del punto $(1, 1)$.

c) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 1, 0)$.

d) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel $z(x, y) = 0$ en el punto $(1, 1)$.

e) Calcular la matriz jacobiana $DG(1, 1)$ del campo vectorial $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $G(x, y) = (y^2\, z(x, y), 2x\, z(x, y))$.

Solución:

a) Para $x = y = 1$, $z = 0$ se cumple la igualdad $x^3 + y^2 + xyz + e^{xz^2} = 3$. Por tanto, $(1, 1, 0)$ pertenece a la superficie.

b) Tomando la función auxiliar $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + xyz + e^{xz^2} - 3 = 0$ y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2 + yz + z^2 e^{xz^2}}{xy + 2xz\, e^{xz^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{2y + xz}{xy + 2xz\, e^{xz^2}}\,.$$

La dirección de máximo crecimiento de z a partir del punto $(1, 1)$ es la del vector gradiente de z en $(1, 1)$, es decir,

$$\nabla z(1, 1) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)\right) = (-3, -2)\,.$$

c) La ecuación del plano tangente a $z = z(x, y)$ en el punto $(1, 1, 0)$ es

$$z - 0 = -3\,(x - 1) - 2\,(y - 1) \quad\Longleftrightarrow\quad 3x + 2y + z = 5\,.$$

d) La recta tangente a la curva de nivel $z(x, y) = 0$ es ortogonal al gradiente en el punto $(1, 1)$, es decir,

$$(-3, -2)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 3x + 2y = 5\,.$$

e) Denotando $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y)) = (y^2\, z(x, y), 2x\, z(x, y))$, la matriz jacobiana es la matriz de las derivadas parciales

$$DG(x, y) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y^2\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) & 2yz + y^2\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \\ 2z + 2x\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) & 2x\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

En particular, en el punto $(x, y) = (1, 1)$, se tiene $z = 0$ y la matriz es

$$DG(1,1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

12) Se considera la superficie $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación

$$xy^2z^3 = 8.$$

a) Usar derivación implícita para calcular las derivadas parciales de z respecto de x y respecto de y.
b) Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto $(1, 1, z(1, 1))$.
c) Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel de la función $z(x, y)$ en el punto $(1, 1)$.

Solución:

a) Tomando la función auxiliar $F(x, y, z) = xy^2z^3 - 8 = 0$ y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y^2z^3}{3xy^2z^2} = \frac{-z}{3x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{2xyz^3}{3xy^2z^2} = \frac{-2z}{3y}.$$

b) Para $x = y = 1$, $z^3 = 8$ y por tanto $z = 2$. Sustituyendo en las expresiones calculadas en el apartado anterior, se tiene:

$$\nabla z(1,1) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(1,1), \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\right) = (-2/3, -4/3).$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente a $z = z(x, y)$ en el punto $(1, 1, 2)$ es

$$z - 2 = \frac{-2}{3}(x-1) - \frac{4}{3}(y-1) \iff 2x + 4y + 3z = 12.$$

c) La recta tangente a la curva de nivel $z(x, y) = 2$ en el punto $(1, 1)$ es ortogonal al vector $\nabla z(1, 1)$. Por tanto:

$$(-2/3, -4/3)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + 2y = 3 \Longleftrightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

En consecuencia, la pendiente de la recta es $m = -1/2$.

13) Sabiendo que la expresión $2x+(x+2)\,\mathrm{sen}(y) = ze^z$ define implícitamente una función diferenciable $z = g(x, y)$, se pide:
a) Probar que $g(0, \pi) = 0$.
b) Calcular la derivada direccional de g en el punto $(0, \pi)$ en la dirección de $\mathbf{u} = (2, 1)$.

Solución:

a) Para $x = 0$, $y = \pi$, se tiene: $0 + 2\operatorname{sen}(\pi) = ze^z \Longrightarrow ze^z = 0 \Longrightarrow z = 0$.

b) Consideramos la función auxiliar $G(x, y, z) = 2x + (x + 2)\operatorname{sen}(y) - ze^z$.
Derivando implícitamente la expresión $G(x, y, z) = 0$ se obtiene:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial G/\partial x}{\partial G/\partial z} = \frac{2 + \operatorname{sen}(y)}{(z+1)e^z}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\partial G/\partial y}{\partial G/\partial z} = \frac{(x+2)\cos(y)}{(z+1)e^z}.$$

Para $x = 0$, $y = \pi$, $z = 0$, se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2.$$

Finalmente, la derivada direccional es:

$$D_{\mathbf{u}}g(0, \pi) = \nabla g(0, \pi) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (2, -2)\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

14) Se considera la superficie $z = z(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación

$$3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 - 3yz = 15.$$

a) Probar que $z(1, 1) = 2$.
b) Calcular la dirección de crecimiento más rápido de la función $z(x, y)$ a partir del punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
c) Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel $z(x, y) = 2$ en el punto $(1, 1)$.

Solución:

a) Sustituyendo $x = y = 1$, se obtiene

$$3z - 1 + 2z^3 - 3z = 15 \Longrightarrow z^3 = 8 \Longrightarrow z = 2.$$

b) La dirección de crecimiento más rápido la marca

$$\nabla z(1, 1) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)\right).$$

Se considera la función auxiliar $G(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 - 3yz - 15$. Derivando implícitamente, tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial G/\partial x}{\partial G/\partial z} = \frac{-6xz + 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 - 3y} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\partial G/\partial y}{\partial G/\partial z} = \frac{2x^2y + 3z}{3x^2 + 6z^2 - 3y}.$$

Sustituyendo en $x = y = 1$, $z = 2$, se tiene que $\nabla z(1, 1) = (-5/12, 4/12)$.

c) La ecuación de la recta tangente a la curva de nivel es:

$$\nabla z(1, 1)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \frac{-5}{12}(x - 1) + \frac{4}{12}(y - 1) = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}.$$

La pendiente de la recta es 5/4.

15) En $\mathbb{R}^3$ se considera la curva $r(x) = (x, y(x), z(x))$ definida implícitamente por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - xy = \pi^2 \\ x\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) = \pi. \end{cases}$$

Sabiendo que la curva pasa por el punto $r(0) = (0, 0, \pi)$, calcular el vector tangente $r'(0)$.

Solución:
Como $r(x) = (x, y(x), z(x))$, el vector tangente es $r'(x) = (1, y'(x), z'(x))$, de modo que

$$r'(0) = (1, y'(0), z'(0)).$$

Para calcular $y'(0)$ y $z'(0)$ usamos derivación implícita. Consideramos las funciones auxiliares

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - \pi^2\,, \quad G(x, y, z) = x\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) - \pi.$$

Escribiendo $y = y(x)$, $z = z(x)$ y se tienen los diagramas de dependencias:

Aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} y'(x) + \dfrac{\partial F}{\partial z} z'(x) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y} y'(x) + \dfrac{\partial G}{\partial z} z'(x) = 0. \end{cases}$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \cos(y) - z\,\mathrm{sen}(x),\ \frac{\partial G}{\partial y} = -x\,\mathrm{sen}(y) + \cos(z),\ \frac{\partial G}{\partial z} = -y\,\mathrm{sen}(z) + \cos(x).$$

Para $x = 0$, $y = 0$, $z = \pi$, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2\pi, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial G}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial G}{\partial z} = 1,$$

con lo que el sistema es

$$\begin{cases} 2\pi z'(0) = 0 \\ 1 - y'(0) + z'(0) = 0. \end{cases}$$

La solución es $y'(0) = 1$, $z'(0) = 0$ y por tanto

$$r'(0) = (1, y'(0), z'(0)) = (1, 1, 0).$$

Capítulo 3
Cálculo de extremos

1) Calcular y clasificar los puntos críticos del campo escalar en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + y^2 - xy^2 + x^2.$$

Solución: Para determinar los puntos críticos, calculamos el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (2x^2 - y^2 + 2x, 2y - 2xy).$$

Por tanto,

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 2x = 0 \\ 2y - 2xy = 0. \end{cases}$$

Como $2y - 2xy = 2y(1-x) = 0 \Longleftrightarrow y = 0$ o $x = 1$, distinguimos dos casos:

- Para $y = 0$, se obtiene la ecuación $2x^2 + 2x = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = -1$.
- Para $x = 1$, se obtiene la ecuación $4 - y^2 = 0$, cuyas soluciones son $y = 2$ e $y = -2$.

Por tanto, se obtienen 4 puntos críticos $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (-1,0)$, $P_3 = (1,2)$ y $P_4 = (1,-2)$.

Calculamos la matriz hessiana de f:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4x+2 & -2y \\ -2y & 2-2x \end{pmatrix}.$$

Evaluando en cada uno de los puntos críticos, tenemos:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},\ Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando los menores principales, se obtiene que $Hf(0,0)$ es definida positiva y el resto son indefinidas no degeneradas. Por tanto, f alcanza un mínimo local en P_1 y puntos de silla en P_2, P_3 y P_4.

2) Calcular los puntos críticos del campo escalar en $\mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$. y clasificarlos (mínimos, máximos, puntos de silla).

Solución: Para determinar los puntos críticos, calculamos el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x).$$

Por tanto,

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x^2/3 \\ y^2 = 3x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x^2/3 \\ x^4 = 27x \end{array} \right\}$$

Como $x^4 = 27x \Longleftrightarrow x(x^3 - 27) = 0$, se deduce que $x = 0$ o $x = 3$. Por tanto, utilizando que $y = x^2/3$, se obtienen los puntos críticos $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (3,3)$.

Calculamos la matriz hessiana de f:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $\Delta_1 = 6x$, $\Delta_2 = 36xy - 81$.

- Para $P_1 = (0,0)$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -81$. $Hf(P_1)$ es indefinida y f tiene en P_1 un punto de silla.
- Para $P_2 = (3,3)$, $\Delta_1 = 18 > 0$, $\Delta_2 = 243 > 0$. $Hf(P_2)$ es es definida positiva y f alcanza en P_2 un mínimo local.

3) La temperatura de un gas en cada punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ viene dada por la expresión

$$T(x,y,z) = x^3y - 3xy + 2y^3 - z^3.$$

a) Calcular la tasa de variación $\rho(x,y,z)$ de T en la dirección del vector $\mathbf{u} = (1,-1,1)$ a partir de cada punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Determinar los puntos críticos de la función $\rho(x,y,z)$ calculada en el apartado anterior y estudiar si alguno de ellos es un máximo local o un mínimo local.

Solución:

a) La tasa de variación de T en la dirección de $\mathbf{u}$ es la derivada direccional

$$D_{\mathbf{u}}T(x,y,z) = \nabla T(x,y,z) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(3x^2y - 3y, x^3 - 3x + 6y^2, -3z^2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(3x^2y - 3y - x^3 + 3x - 6y^2 - 3z^2\right) := \rho(x,y,z).$$

b) Para simplificar, consideramos la función

$$F(x,y,z)=\sqrt{3}\,\rho(x,y,z)=3x^2y-3y-x^3+3x-6y^2-3z^2,$$

que evidentemente tiene los mismos puntos críticos que ρ. Buscamos los puntos que anulan el gradiente de F:

$$\nabla F(x,y,z)=(\partial F/\partial x,\partial F/\partial y,\partial F/\partial z)=(0,0,0)\Longleftrightarrow\begin{cases}6xy-3x^2+3=0\\ 3x^2-3-12y=0\\ -6z=0\end{cases}$$

La tercera ecuación proporciona $z=0$. Sumando las dos primeras se obtiene:

$$6xy-12y=0\Longleftrightarrow y(6x-12)=0\Longleftrightarrow\begin{cases}y=0\\ \text{ó}\\ x=2\end{cases}$$

- Para $y=0$, la primera ecuación da $x^2=1$. Por tanto $x=\pm1$, de donde se obtienen los puntos críticos $P_1=(1,0,0)$ y $P_2=(-1,0,0)$.
- Para $x=2$, la primera ecuación da $12y=9$. Por tanto $y=3/4$, de donde se obtiene el punto crítico $P_3=(2,3/4,0)$.

Estudiamos el carácter de los puntos críticos analizando la matriz hessiana:

$$HF(x,y,z)=\begin{pmatrix}F_{xx}&F_{xy}&F_{xz}\\ F_{yx}&F_{yy}&F_{yz}\\ F_{zx}&F_{zy}&F_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6y-6x&6x&0\\ 6x&-12&0\\ 0&0&-6\end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en los puntos críticos:

$$HF(1,0,0)=\begin{pmatrix}-6&6&0\\ 6&-12&0\\ 0&0&-6\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\varDelta_1=-6<0\\ \varDelta_2=36>0\\ \varDelta_3=-216<0\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{Definida negativa.}$$

$$HF(-1,0,0)=\begin{pmatrix}6&-6&0\\ -6&-12&0\\ 0&0&-6\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\varDelta_1=6>0\\ \varDelta_2=-108<0\\ \varDelta_3=648>0\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{Indefinida.}$$

$$HF(2,3/4,0)=\begin{pmatrix}-15/2&12&0\\ 12&-12&0\\ 0&0&-6\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\varDelta_1=-15/2<0\\ \varDelta_2=-54<0\\ \varDelta_3=324>0\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{Indefinida.}$$

Por tanto, ρ alcanza un máximo local en $P_1=(1,0,0)$, mientras que en P_2 y P_3 tiene dos puntos de silla.

4) Se considera el campo escalar en $\mathbb{R}^2$ dado por $f(x,y) = y^2x - yx^2 + xy$. Calcular los puntos críticos de f y estudiar si son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de silla.

Solución:

Como f es diferenciable, los puntos críticos son aquellos en los que se anula el gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy + y = 0 \Longleftrightarrow y(y-2x+1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y - 2x + 1 = 0 \end{cases} \\ 2xy - x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x(2y - x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - x + 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Para $y = 0$ se obtiene en la segunda ecuación $x = 0$ o $x = 1$.
- Para $x = 0$ se obtiene en la primera ecuación $y = 0$ o $y = -1$.
- Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

cuya única solución es $x = 1/3$, $y = -1/3$.

Por tanto, los puntos críticos son $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ y $(1/3,-1/3)$.

Estudiamos su carácter analizando la matriz hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & 2y-2x+1 \\ 2y-2x+1 & 2x \end{pmatrix}.$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Las tres primeras matrices son indefinidas y la cuarta es definida positiva. Por tanto f tiene puntos de silla en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,-1)$ y alcanza en $(1/3,-1/3)$ un mínimo local.

5) Probar que los puntos $(\pi/2, \pi/2)$ y $(3\pi/2, \pi/2)$ son puntos críticos del campo escalar

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) - \cos(x+y).$$

Estudiar si corresponden a máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

Solución:

Los puntos críticos cumplen la ecuación $\nabla f(x,y) = (0,0)$. En este caso,

$$\nabla f(x,y) = (\cos(x) + \operatorname{sen}(x+y), \cos(y) + \operatorname{sen}(x+y)).$$

Como $\cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$ y $\text{sen}(\pi) = \text{sen}(2\pi) = 0$, se cumple que

$$\nabla f(\pi/2, \pi/2) = \nabla f(3\pi/2, \pi/2) = (0, 0).$$

Para clasificarlos calculamos la matriz Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\text{sen}(x) + \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ \cos(x+y) & -\text{sen}(y) + \cos(x+y) \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $\text{sen}(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi) = -1$, se obtiene:

$$Hf(\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $\Delta_1 = -2$ y $\Delta_2 = 3$. Por tanto, $Hf(\pi/2, \pi/2)$ es definida negativa y f alcanza en $(\pi/2, \pi/2)$ un máximo local.

Por otra parte, dado que $\text{sen}(\pi/2) = 1$, $\cos(2\pi) = 1$ y $\text{sen}(3\pi/2) = -1$, se obtiene:

$$Hf(3\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $\Delta_1 = 2$ y $\Delta_2 = -1$. Por tanto, $Hf(3\pi/2, \pi/2)$ es indefinida y f tiene en $(3\pi/2, \pi/2)$ un punto de silla.

6) Calcular la distancia mínima entre las rectas r_1 y r_2 dadas en forma paramétrica por las siguientes ecuaciones:

$$r_1 = \{P + x\,\mathbf{u} \,/\, x \in \mathbb{R}\},$$

$$r_2 = \{Q + y\,\mathbf{v} \,/\, y \in \mathbb{R}\},$$

donde $P = (1, 1, 1)$, $Q = (-1, 0, -2)$, $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$.

Nota: La distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^3$ está definida por la fórmula

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Solución: Sustituyendo los valores de $P, Q, \mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, se tiene:

$$r_1 = \{(1 + x, 1 - x, 1) \,/\, x \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad r_2 = \{(-1 + 2y, 0, -2 + y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}.$$

La distancia entre un punto de r_1 y otro de r_2 es

$$d((1 + x, 1 - x, 1), (-1 + 2y, 0, -2 + y)) = \sqrt{(2 + x - 2y)^2 + (1 - x)^2 + (3 - y)^2}.$$

Tomamos como función objetivo a minimizar el cuadrado de la distancia, es decir,

$$g(x, y) = (2 + x - 2y)^2 + (1 - x)^2 + (3 - y)^2.$$

Calculamos los puntos críticos de g:

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2+4x-4y=0 \\ -14-4x+10y=0 \end{cases}$$

La única solución del sistema es $x = 3/2$, $y = 2$.

Veamos que se trata de un mínimo analizando la matriz hessiana:

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 24 > 0$. Por tanto $Hg(3/2,2)$ es definida positiva y g alcanza en $(3/2,2)$ un mínimo local.

La distancia mínima entre las dos rectas es

$$d = \sqrt{g(3/2,2)} = \sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{3/2}.$$

7) Determinar los puntos críticos del campo escalar $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + 3z - 3\ln(x+y+z)$ y clasificarlos (máximos locales, mínimos locales o puntos de silla).

Solución: Las derivadas parciales de F son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - \frac{3}{x+y+z} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - \frac{3}{x+y+z} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3 - \frac{3}{x+y+z}.$$

Los puntos críticos son los que anulan el gradiente de F, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

De este modo, se obtienen 4 puntos críticos:

$$x = y = 1 \Longrightarrow z = -1 \Longrightarrow P_1 = (1,1,-1);$$

$$x = 1\ ,\ y = -1 \Longrightarrow z = 1 \Longrightarrow P_2 = (1,-1,1);$$

$$x = -1\ ,\ y = 1 \Longrightarrow z = 1 \Longrightarrow P_3 = (-1,1,1);$$

$$x = y = -1 \Longrightarrow z = 3 \Longrightarrow P_4 = (-1,-1,3).$$

Para clasificar los puntos críticos, analizamos la matriz hessiana.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x + \frac{3}{(x+y+z)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y + \frac{3}{(x+y+z)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{3}{(x+y+z)^2};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{3}{(x+y+z)^2}.$$

Teniendo en cuenta que en todos los puntos críticos se cumple que $x+y+z = 1$, la matriz hessiana es

$$HF(P_i) = \begin{pmatrix} 6x+3 & 3 & 3 \\ 3 & 6y+3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \ i = 1,2,3,4,$$

de modo que los menores principales son

$$\Delta_1 = 6x+3 \quad ; \quad \Delta_2 = (6x+3)(6y+3) - 9 \quad ; \quad \Delta_3 = |HF(P_i)| = 108\,xy.$$

Evaluamos los menores principales en cada uno de los puntos críticos:

- Para $P_1 = (1,1,-1)$, $\Delta_1 = 9 > 0$, $\Delta_2 = 72 > 0$, $\Delta_3 = 108 > 0 \Longrightarrow HF(P_1)$ es definida positiva y F alcanza en P_1 un mínimo local.
- Para $P_2 = (1,-1,1)$, $\Delta_1 = 9 > 0$, $\Delta_2 = -36 < 0$, $\Delta_3 = -108 < 0 \Longrightarrow HF(P_2)$ es indefinida y F presenta en P_2 un punto de silla.
- Para $P_3 = (-1,1,1)$, $\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -36 < 0$, $\Delta_3 = -108 < 0 \Longrightarrow HF(P_3)$ es indefinida y F presenta en P_3 un punto de silla.
- Para $P_4 = (-1,-1,3)$, $\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 108 > 0 \Longrightarrow HF(P_4)$ es indefinida y F presenta en P_4 un punto de silla.

8) Se considera el campo escalar $F(x,y) = (1-x)(1-y)e^{1-x-y}$.

a) Calcular el vector gradiente de F en cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Determinar los puntos críticos de F y clasificarlos (máximos locales, mínimos locales o puntos de silla).

c) Determinar el punto de la recta $y = -x$ para el cual la tasa de variación de F en la dirección del vector $(2,-1)$ es mínima.

Solución:

a) Calculando las derivadas parciales de F y simplificando, obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-2)(1-y)e^{1-x-y} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = (y-2)(1-x)e^{1-x-y}.$$

El gradiente de F en (x,y) es $\nabla F(x,y) = e^{1-x-y}\left((x-2)(1-y),(y-2)(1-x)\right).$

b) Los puntos críticos son los que anulan el gradiente de F, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \ \text{ o } \ y = 1 \\ (y-2)(x-1) = 0 \Longleftrightarrow y = 2 \ \text{ o } \ x = 1. \end{cases}$$

De este modo, se obtienen sólo 2 puntos críticos: $P_1 = (1,1)$ y $P_2 = (2,2)$.

Para clasificar los puntos críticos, analizamos la matriz hessiana. Las derivadas parciales de orden dos son:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (3-x)(1-y)e^{1-x-y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (3-y)(1-x)e^{1-x-y} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = (2-x)(2-y)e^{1-x-y}\,.$$

La matriz hessiana en un punto (x, y) es

$$HF(x,y) = e^{1-x-y} \begin{pmatrix} (3-x)(1-y) & (2-x)(2-y) \\ (2-x)(2-y) & (3-y)(1-x) \end{pmatrix}.$$

Evaluando en los puntos críticos, se obtiene:

$$HF(1,1) = e^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad HF(2,2) = e^{-3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- La matriz $HF(1,1)$ es indefinida y F tiene en $P_1 = (1,1)$ un punto de silla.
- La matriz $HF(2,2)$ es definida negativa y F alcanza en $P_2 = (2,2)$ un máximo local.

c) La tasa de variación de F en la dirección del vector $(2,-1)$ en un punto $(x,-x)$ de la recta $y = -x$ viene dada por

$$D_{\mathbf{u}}F(x,-x) = \nabla F(x,-x) \cdot \frac{(2,-1)}{\|(2,-1)\|} = \frac{e}{\sqrt{5}} \left((x-2)(1+x), (-x-2)(1-x)\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e}{\sqrt{5}} \big(2(x^2-x-2) - (x^2+x-2)\big) = \frac{e}{\sqrt{5}} (x^2 - 3x - 2).$$

El valor de x que hace mínima la derivada direccional se obtiene derivando la función $h(x) = x^2 - 3x - 2$ e igualando a cero:

$$h'(x) = 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 3/2.$$

Como $h''(3/2) = 2 > 0$, la función h alcanza un mínimo en $x = 3/2$ y el punto de la recta $y = -x$ que buscamos es $(3/2, -3/2)$.

9) Se considera el campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - x^2y^2\,,$$

definido sobre el conjunto compacto D delimitado por la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

a) Calcular y clasificar los extremos relativos de f en el interior de D.

b) Calcular los posibles extremos relativos de f sobre la elipse utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

c) Calcular los extremos absolutos de f en D.

Solución:

a) Como f es diferenciable, los puntos críticos son aquellos en los que se anula el gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 18x - 2xy^2 = 0 \Longleftrightarrow 2x(9-y^2) = 0 \\ 8y - 2yx^2 = 0 \Longleftrightarrow 2y(4-x^2) = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación proporciona las soluciones $x = 0$, $y = \pm 3$, mientras que la segunda ecuación se cumple para $y = 0$ ó $x = \pm 2$.

Por tanto, los puntos críticos son $(0,0)$, $(2,3)$, $(-2,3)$, $(2,-3)$, $(-2,-3)$. Es inmediato comprobar que sólo $(0,0)$ está en el interior de D.
Estudiamos su carácter analizando la matriz hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 8-2x^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Como $Hf(0,0)$ es definida positiva, f alcanza en $(0,0)$ un mínimo local.

b) La función objetivo es $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - x^2y^2$. La restricción se puede escribir como $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Así, la ecuación de multiplicadores es:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(9-y^2) = \lambda 2x \\ 2y(4-x^2) = \lambda 8y \end{cases}$$

Juntando este sistema con la restricción $x^2 + 4y^2 = 4$, tenemos las siguientes opciones:

- $x = 0$, $y = \pm 1$, que proporciona los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$.
- $y = 0$, $x = \pm 2$, que proporciona los puntos $(2,0)$ y $(-2,0)$.
- $9 - y^2 = \lambda = 1 - x^2/4 \Longrightarrow 4y^2 = 32 + x^2 = 4 - x^2 \Longrightarrow x^2 = -14$. No hay soluciones reales.

c) Evaluando f en los posibles extremos obtenemos que el mínimo global es $f(0,0) = 0$ y el máximo global es $f(2,0) = f(-2,0) = 36$.

10) Se considera el campo escalar $F(x,y,z) = z^2 - 2xy$.

a) Calcular los puntos críticos de F y estudiar si son máximos, mínimos o puntos de silla.

b) Analizar si F alcanza en el punto $P = (1,1,0)$ un extremo local condicionado a la restricción $2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$. En caso afirmativo, indicar si es un máximo o un mínimo local.

Solución:

a) Los puntos críticos de $F(x,y,z) = z^2 - 2xy$ son los que anulan el gradiente. Como

$$\nabla F(x,y,z) = (-2y, -2x, 2z) = (0,0,0) \Longleftrightarrow x = y = z = 0,$$

el único punto crítico es $Q = (0,0,0)$.
La matriz hessiana de F es

$$H = HF(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son

$$\Delta_1 = 0 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad ; \quad \Delta_3 = |H| = -8 < 0,$$

por lo que la matriz $HF(Q)$ es indefinida y Q es un punto de silla para F.

b) Para que F alcance en el punto $P = (1,1,0)$ un extremo local condicionado a la restricción $g(x,y,z) = 2x^3 + 2y^3 + z^3 = 4$, debe cumplirse la condición

$$\nabla F(1,1,0) = \lambda \nabla g(1,1,0)$$

para algún número $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\nabla g(x,y,z) = (6x^2, 6y^2, 3z^2)$, se tiene:

$$\nabla F(1,1,0) = \lambda \nabla g(1,1,0) \Longleftrightarrow (-2,-2,0) = \lambda(6,6,0) \Longleftrightarrow 6\lambda = -2 \Longleftrightarrow \lambda = -1/3.$$

Para saber si es un máximo o un mínimo local, analizamos la función

$$G(x,y,z) = F(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = F(x,y,z) + \frac{1}{3}g(x,y,z) = z^2 - 2xy + \frac{1}{3}(2x^3 + 2y^3 + z^3).$$

Ya sabemos que $\nabla G(1,1,0) = 0$. Calculamos la matriz hessiana $HG(1,1,0)$. Como $\nabla G(x,y,z) = \nabla F(x,y,z) + \frac{1}{3}\nabla g(x,y,z) = (-2y + 2x^2, -2x + 2y^2, 2z + z^2)$:

$$HG(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x & -2 & 0 \\ -2 & 4y & 0 \\ 0 & 0 & (2+2z) \end{pmatrix} \Longrightarrow HG(1,1,0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$\Delta_1 = 4 > 0 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad ; \quad \Delta_3 = |HG(1,1,0)| = 24 > 0.$$

Como todos los menores principales son positivos, la matriz $HG(P)$ es definida positiva y por tanto F alcanza en P un mínimo local sujeto a la restricción $g(x,y,z) = 4$.

11) Se considera el campo escalar $F(x,y,z) = y + 2z$ definido sobre la elipse C intersección del plano $2x + z = 4$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 17$.

a) Justificar que F alcanza el máximo y el mínimo globales en C.

b) Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos globales de F en C.

Solución:

a) La elipse C es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ y F es una función continua, por lo que la existencia del máximo y el mínimo globales de F en C está garantizada.

b) Tenemos que encontrar los extremos de la función $F(x,y,z) = y + 2z$ sujetos a las restricciones

$$g_1(x,y,z) = 2x + z - 4 = 0 \quad ; \quad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 17 = 0\,.$$

Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange, en los puntos de extremo deben existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\nabla F(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z)$. Por tanto:

$$\nabla F(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z) \Longleftrightarrow (0,1,2) = \lambda(2,0,1) + \mu(2x,2y,0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda + 2\mu x = 0 \\ 2\mu y = 1 \\ \lambda = 2 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ 2\mu y = 1 \\ 2\mu x = -4 \end{array} \right\}$$

De las 2 últimas ecuaciones se deduce que $x = -4y$.
Sustituyendo en la ecuación $x^2 + y^2 = 17$, tenemos $y^2 = 1$ y por tanto $y = \pm 1$.
Finalmente, utilizando la restricción $z = 4 - 2x$, obtenemos:

$$y = 1 \Longrightarrow x = -4,\ z = 12 \quad ; \quad y = -1 \Longrightarrow x = 4,\ z = -4.$$

Por tanto, los puntos de extremo son $P_1 = (-4,1,12)$ y $P_2 = (4,-1,-4)$.
Como $F(P_1) = 25$, $F(P_2) = -9$, el campo F alcanza su máximo global en C en el punto P_1 y su mínimo global en el punto P_2.

12) Se considera el campo escalar $f(x,y,z,t) = (x+z)(y+t)$ definido sobre el conjunto

$$D = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}.$$

a) Justificar que f alcanza los valores máximo y mínimo globales sobre el conjunto D.
b) Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular los valores máximo y mínimo de f en D y los puntos donde se alcanzan.

Solución:

a) Como el conjunto D es compacto y f es continua, se alcanzan los valores máximo y mínimo globales de f en D.
b) La función objetivo es $f(x,y,z,t) = (x+z)(y+t)$ y la restricción se puede escribir como

$$g(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1 = 0.$$

La ecuación de de multiplicadores de Lagrange es:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \Longleftrightarrow (y+t, x+z, y+t, x+z) = \lambda(2x,2y,2z,2t) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y + t = 2\lambda x = 2\lambda z \\ x + z = 2\lambda y = 2\lambda t \end{array} \right.$$

Distinguimos dos casos:

Caso 1: $\lambda = 0$.
En este caso, $y + t = x + z = 0$ y por tanto $f(x, y, z, t) = (x + z)(y + t) = 0$.

Caso 2: $\lambda \neq 0$.
En este caso $x = z$, $y = t$, y por tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} y + t = 2y = 2\lambda x \\ x + z = 2x = 2\lambda y \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{y}{x} = \lambda = \frac{x}{y} \Longrightarrow y^2 = x^2 \Longrightarrow y = \pm x.$$

Por tanto, hay dos posibilidades:
(I) $y = x = z = t$.
Juntando esta condición con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ se obtiene

$$4x^2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pm 1}{2}.$$

Esto proporciona los puntos $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $P_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

(II) $y = t = -x$, $z = x$.
Como antes, de la restricción $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ se obtiene

$$4x^2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pm 1}{2}.$$

Esto proporciona los puntos $P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ y $P_4 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Finalmente, como $f(P_1) = f(P_2) = 1$, $f(P_3) = f(P_4) = -1$, el máximo global es 1 y el mínimo global es -1.

13) Se considera el campo escalar $G(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 1$ definido sobre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Justificar que G alcanza los valores máximo y mínimo globales sobre la esfera.
b) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular dichos valores máximo y mínimo y los puntos donde se alcanzan.

Solución:

a) La función $G(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 1$ es continua y la esfera es un conjunto compacto, lo que garantiza que se alcanzan el máximo y el mínimo globales.
b) Para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, tomamos como función objetivo $G(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 1$ y como restricción $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

En los puntos donde se alcanzan los extremos deben existir valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\nabla G(x, y, z) = \lambda \nabla H(x, y, z)$, es decir:

$$\nabla G(x,y,z) = \lambda \nabla H(x,y,z) \iff (2x,-4y,0) = \lambda(2x,2y,2z) \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2\lambda x \\ -4y = 2\lambda y \\ 0 = 2\lambda z \end{array} \right\}$$

Distinguimos dos casos:

Caso 1: $\lambda = 0$. De las dos primeras ecuaciones se obtiene que $x = y = 0$. Utilizando la restricción, se deduce que $z^2 = 1$, y por tanto $z = \pm 1$. Por tanto, obtenemos los posibles extremos $Q_1 = (0,0,1)$, $Q_2 = (0,0,-1)$.

Caso 2: $\lambda \neq 0$. En este caso se deduce de la tercera ecuación que $z = 0$ y de las dos primeras que $x = 0$ o $y = 0$. (Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ entonces $1 = \lambda = -2$, lo que no es posible.)
Por tanto, hay dos posibilidades:

- Si $x = z = 0$, la restricción proporciona $y = \pm 1$. De aquí obtenemos los puntos $Q_3 = (0,1,0)$ y $Q_4 = (0,-1,0)$.
- Si $y = z = 0$, la restricción proporciona $x = \pm 1$, lo que proporciona los posibles extremos $Q_5 = (1,0,0)$ y $Q_6 = (-1,0,0)$.

Evaluamos G en los posibles extremos:

$$G(Q_1) = G(Q_2) = 1 \quad ; \quad G(Q_3) = G(Q_4) = -1 \quad ; \quad G(Q_5) = G(Q_6) = 2.$$

El máximo global del campo G sobre la esfera es 2 y se alcanza en los puntos $Q_5 = (1,0,0)$ y $Q_6 = (-1,0,0)$. El mínimo global es -1 y se alcanza en los puntos $Q_3 = (0,1,0)$ y $Q_4 = (0,-1,0)$.

14) Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange para calcular el valor máximo del producto de dos números reales x e y tales que $x^3 + y^3 = 16$. Se debe justificar que el resultado obtenido corresponde a un máximo.

Solución:

La función objetivo es $f(x,y) = xy$ y la restricción se puede escribir como

$$g(x,y) = x^3 + y^3 - 16 = 0.$$

La ecuación de de multiplicadores de Lagrange es:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \iff (y,x) = \lambda(3x^2, 3y^2) \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 3\lambda x^2 \\ x = 3\lambda y^2 \end{array} \right.$$

Si $x = 0$ o $y = 0$ se obtiene el punto $(x,y) = (0,0)$, que claramente no cumple la restricción. Por tanto, podemos suponer que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Despejando en las dos ecuaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{y}{x^2} = 3\lambda = \frac{x}{y^2} \Longrightarrow y^3 = x^3 \Longrightarrow y = x.$$

Juntando esta condición con la restricción $x^3 + y^3 = 16$ se obtiene

$$2x^3 = 16 \Longrightarrow x^3 = 8 \Longrightarrow x = 2.$$

El único punto que cumple la ecuación de multiplicadores es $P = (2,2)$. Para este punto,

$$3\lambda = \frac{x}{y^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{6}.$$

Para probar que corresponde a un máximo, consideramos la función auxiliar

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = xy - \frac{1}{6}\left(x^3 + y^3 - 16\right).$$

El punto $P = (2,2)$ es un punto crítico de F. Calculamos la matriz hessiana $HF(P)$:

$$\nabla F(x,y) = \left(y - \frac{x^2}{2}, x - \frac{y^2}{2}\right) \Longrightarrow HF(x,y) = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -y \end{pmatrix} \Longrightarrow HF(2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales son $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$. Por tanto, $HF(P)$ es definida negativa y el punto $P = (2,2)$ corresponde a un máximo de f restringido a la condición $x^3 + y^3 = 16$.

Finalmente, el valor máximo del producto es $f(2,2) = 4$.

15) Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange para calcular los valores máximo y mínimo que puede alcanzar la función $f(x,y,z) = x + z$ en la elipse intersección del plano $x + y + z = 0$ con el elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 33$.

Solución:

La elipse es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$ y f es una función continua, por lo que la existencia del máximo y el mínimo globales de f sobre la elipse está garantizada.

La función objetivo es $f(x,y,z) = x + z$ y las restricciones se pueden escribir como

$$g_1(x,y,z) = x + y + z = 0 \quad ; \quad g_2(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 33 = 0\,.$$

Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange, en los puntos de extremo deben existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z)$. Por tanto:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z) \Longleftrightarrow (1,0,1) = \lambda(1,1,1) + \mu(4x,6y,2z) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda + 4\mu x = 1 \\ \lambda + 6\mu y = 0 \\ \lambda + 2\mu z = 1 \end{array} \right\}$$

De las ecuaciones 1 y 3 se deduce que $4\mu x = 2\mu z$ y por tanto $\mu = 0$ o $z = 2x$.
Si $\mu = 0$ entonces de las dos primeras ecuaciones se obtiene la contradicción $1 = \lambda = 0$.

Sustituyendo $z = 2x$ en la ecuación $x + y + z = 0$, se obtiene $y = -3x$.
Finalmente, utilizando la restricción $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 33$, obtenemos:

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 2x^2 + 27x^2 + 4x^2 = 33 \Longrightarrow 33x^2 = 33 \Longrightarrow x = \pm 1.$$

Para $x = 1$ se obtiene que $y = -3$, $z = 2$; para $x = -1$ se obtiene que $y = 3$, $z = -2$. Por tanto, los puntos donde se alcanzan los extremos son $P_1 = (1, -3, 2)$ y $P_2 = (-1, 3, -2)$.

Como $f(P_1) = f(1, -3, 2) = 3$ y $f(P_2) = f(-1, 3, -2) = -3$, la función f alcanza su máximo global en la elipse en el punto P_1 y su mínimo global en el punto P_2.

16) Se considera el campo escalar $F(x, y, z) = \ln(x) + \ln(y) + 9\ln(z)$ definido sobre el octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ correspondiente a $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange para probar que F tiene un único extremo local y estudiar si se trata de un máximo o un mínimo.

Solución: La función objetivo es $F(x, y, z) = \ln(x) + \ln(y) + 9\ln(z)$ y la restricción se puede escribir como

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0.$$

La ecuación de de multiplicadores de Lagrange es:

$$\nabla F(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{9}{z}\right) = \lambda(2x, 2y, 2z) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = 2x\lambda \\ \dfrac{1}{y} = 2y\lambda \\ \dfrac{9}{z} = 2z\lambda \end{cases}$$

Despejando $1/\lambda$ en las tres ecuaciones se obtiene que $2x^2 = 2y^2 = 2z^2/9$. Como $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, se deduce que $x = y = z/3$.

Juntando esta condición con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ se obtiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{z^2}{9} + \frac{z^2}{9} + z^2 = 11 \Longrightarrow \frac{11z^2}{9} = 11 \Longrightarrow z = 3.$$

El único punto que cumple la ecuación de multiplicadores es $Q = (1, 1, 3)$. Para este punto, el valor de λ es

$$\lambda = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Para estudiar si se trata de un máximo o un mínimo, consideramos la función auxiliar

$$G(x, y, z) = F(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = F(x, y, z) - \frac{1}{2} g(x, y, z)$$

Usando que el gradiente de G es

$$\nabla G(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} - x, \frac{1}{y} - y, \frac{9}{z} - z\right),$$

se obtiene la matriz hessiana:

$$HG(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 - 1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - 1/y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - 9/z^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow HG(1, 1, 3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $HG(1,1,3)$ es definida negativa, el punto $Q=(1,1,3)$ corresponde a un máximo local de F en la región considerada.

17) Se considera el campo escalar $F(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2+4xz$ definido sobre la región compacta $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+2z^2\leq 1\right\}$.
Calcular el máximo y el mínimo globales de F sobre D y los puntos donde se alcanzan (utilizar el método de multiplicadores de Lagrange para calcular los posibles extremos en la frontera de D).

Solución:

En primer lugar calculamos los puntos críticos de F en el interior de D.

$$\nabla F(x,y,z)=(2x+4z,-2y,4z+4x)=(0,0,0)\Longleftrightarrow x=y=z=0.$$

El único punto crítico de F en el interior de D es $P_1=(0,0,0)$.

A continuación utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange para calcular los posibles extremos en la frontera de D.

La función objetivo es $F(x,y,z)$ y la restricción es $G(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-1=0$.

La ecuación de multiplicadores $\nabla F(x,y,z)=\lambda\nabla G(x,y,z)$ proporciona el sistema

$$\begin{cases} 2x+4z=2\lambda x\\ -2y=2\lambda y\\ 4x+4z=4\lambda z.\end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que $2y(\lambda+1)=0$ y por tanto $\lambda=-1$ o $y=0$.

<u>Caso 1:</u> Si $\lambda=-1$ entonces las ecuaciones 1 y 3 se transforman en

$$\left.\begin{cases} 2x+4z=-2x\\ 4x+4z=-4z\end{cases}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{cases} 4x+4z=0\\ 4x+8z=0\end{cases}\right\}\Longleftrightarrow x=z=0.$$

Usando la restricción se deduce que $y^2=1$ y por tanto $y=\pm1$. Esto proporciona los puntos $P_2=(0,1,0)$ y $P_3=(0,-1,0)$.

<u>Caso 2:</u> Supongamos que $y=0$. Multiplicando la primera ecuación por $2z$ y la segunda por x, tenemos:

$$4xz+8z^2=4\lambda xz=4x^2+4xz\Longrightarrow x^2=2z^2.$$

Sustituyendo $y=0$, $x^2=2z^2$ en la ecuación $x^2+y^2+2z^2=1$, se obtiene $4z^2=1$ y por tanto $z=\pm1/2$, $x=\pm1/\sqrt{2}$. Se obtienen de aquí los puntos

$$P_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,0\,,\frac{1}{2}\right)\,,\ P_5=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,0\,,\frac{-1}{2}\right)\,,\ P_6=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,,0\,,\frac{1}{2}\right)\,,\ P_7=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,,0\,,\frac{-1}{2}\right).$$

Evaluamos F en cada uno de los puntos obtenidos:

$$F(0,0,0) = 0$$

$$F(0,1,0) = F(0,-1,0) = -1$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,\frac{-1}{2}\right) = 1+\sqrt{2}$$

$$F\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,\frac{-1}{2}\right) = 1-\sqrt{2}.$$

El mínimo global de F es -1 y se alcanza en P_2 y P_3, mientras que su máximo global es $1+\sqrt{2}$ y se alcanza en P_4 y P_7.

18) Se considera el campo escalar $f(x,y) = x^2 + y^4 - y^2 + 2xy$.

a) Calcular los puntos críticos de f y clasificarlos (máximos locales, mínimos locales, puntos de silla).

b) Comprobar que el punto $(1,1)$ cumple la ecuación de multiplicadores de Lagrange para la función objetivo f sujeta a la restricción $x^4+y^4 = 2$ y calcular el multiplicador correspondiente. Estudiar si $(1,1)$ es un máximo local o un mínimo local de f sujeto a la restricción $x^4+y^4 = 2$.

Solución:

a) Calculamos los puntos donde se anula el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow (2x+2y, 4y^3-2y+2x) = (0,0) \Longleftrightarrow \left.\begin{cases} y = -x \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4y(y^2-1) = 0. \end{cases}$$

Las soluciones de $4y(y^2-1) = 0$ son 0, 1 y -1. Como $x = -y$, se obtienen los puntos críticos $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,-1)$ y $P_3 = (-1,1)$.

La matriz hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12y^2-2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en los puntos críticos:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad Hf(1,-1) = Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

$Hf(0,0)$ es indefinida y por tanto $P_1 = (0,0)$ es un punto de silla. $Hf(1,-1) = Hf(-1,1)$ es definida positiva y por tanto f alcanza en P_2 y P_3 sendos mínimos locales.

b) La función objetivo es f y la restricción se puede escribir como

$$h(x,y) = x^4 + y^4 - 2 = 0.$$

La ecuación de de multiplicadores de Lagrange es:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \Longleftrightarrow \big(2x+2y, 4y^3-2y+2x\big) = \lambda(4x^3, 4y^3) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+2y = 4\lambda x^3 \\ 4y^3-2y+2x = 4\lambda y^3. \end{cases}$$

Para $(x,y)=(1,1)$, se obtiene $4=4\lambda$ en las dos ecuaciones y por tanto la ecuación de multiplicadores se cumple para $\lambda = 1$.
Para estudiar si se trata de un máximo o un mínimo, consideramos la función auxiliar

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda h(x,y) = x^2+y^4-y^2+2xy-(x^4+y^4-2) = x^2-y^2+2xy-x^4+2.$$

El gradiente de F es $\nabla F(x,y) = (2x+2y-4x^3, -2y+2x)$ y la correspondiente matriz hessiana es

$$HF(x,y) = \begin{pmatrix} 2-12x^2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow HF(1,1) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como $HF(1,1)$ es definida negativa, el punto $(1,1)$ corresponde a un máximo local de f sujeto a la restricción $x^4+y^4=2$.