Problemas resueltos de matrices y determinantes

Eduardo Liz Marzán

Los problemas que se incluyen en esta colección se han extraído de pruebas parciales y exámenes finales de la asignatura Álgebra lineal de las titulaciones de *Ingeniería de la energía* e *Ingeniería de los recursos mineros y energéticos* en la Universidad de Vigo.

Septiembre de 2020

Índice general

1. Propiedades de matrices y determinantes 5

2. Formas cuadráticas 9

Capítulo 1
Propiedades de matrices y determinantes

1) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular X para que $AX - X = B$.
b) Hallar una matriz $Y \neq 0$ tal que $(A - B)Y = 0$.
c) Probar que no existe ninguna matriz $Z \neq 0$ tal que $AZ = 0$.

Solución:

a) Despejamos X en la expresión:

$$AX - X = B \Longleftrightarrow (A - I)X = B \Longleftrightarrow X = (A - I)^{-1}B.$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) Si denotamos $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la ecuación matricial $(A - B)Y = 0$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 2c = 0 \\ b - 2d = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ -b + 2d = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2c \\ b = 2d. \end{array} \right.$$

Tomando $c = d = 1$, se obtiene $a = b = 2$ y por tanto una solución es $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Como $|A| = 9 \neq 0$, A es inversible y por tanto:

$$AZ = 0 \Longleftrightarrow A^{-1}AZ = A^{-1}0 = 0 \Longleftrightarrow Z = 0.$$

2) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular la matriz $M = A^t A - BB^t$, donde A^t y B^t representan las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.
b) Probar que M es inversible y calcular su inversa M^{-1}.
c) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XM = C$.

Solución:

a)
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Como $|M| = -2 \neq 0$, la matriz M es inversible. Además,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Como M es inversible:

$$XM = C \Longleftrightarrow X = CM^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular X para que $AX = A - BX$.
b) Calcular el determinante de C sabiendo que $AC^2 = -CB$ y C es inversible.
c) Razonar si es posible encontrar una matriz M de rango 1 tal que $AM = B$.

Solución:

a) Despejamos X en la expresión:

$$AX = A - BX \Longleftrightarrow (A + B)X = A \Longleftrightarrow X = (A + B)^{-1} A.$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Calculando determinantes en la expresión $AC^2 = -CB$ se tiene:

$$|AC^2| = |-CB| \Longleftrightarrow |A|\,|C|^2 = (-1)^2|C|\,|B| \Longleftrightarrow -|C|^2 = |C|.$$

Como C es inversible, podemos dividir por $|C|$ y obtener $|C| = -1$.

(c) No es posible porque de la expresión $AM = B$ se obtiene $|A|\,|M| = |B|$ y por tanto $|M| = -1 \neq 0$. Esto implica que el rango de M es 2.

4) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

donde λ es un parámetro real.

a) Calcular los determinantes de las matrices A y B.

b) Hallar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A tiene rango 3. Probar que en ese caso la ecuación

$$AX = B^{-1}A^2$$

tiene solución única.

c) Hallar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la única solución X de la ecuación

$$AX = B^{-1}A^2$$

tiene determinante 3. (Usar las propiedades de los determinantes, sin calcular la matriz X).

Solución:

a) Desarrollando los determinantes, se obtiene que

- $|A| = 2\lambda - \lambda^2$.
- $|B| = -1$.

b) La matriz A tiene rango 3 si y sólo si su determinante es distinto de cero. Por tanto,

$$\text{rg}(A) = 3 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda(\lambda - 2) \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq 2.$$

En este caso la matriz A es inversible y por tanto la ecuación $AX = B^{-1}A^2$ tiene solución única $X = A^{-1}B^{-1}A^2$.

c) Estamos suponiendo que la solución es única y por tanto $|A| \neq 0$. Tomando determinantes en la expresión $AX = B^{-1}A^2$, se obtiene:

$$AX = B^{-1}A^2 \Longrightarrow |A|\,|X| = |B^{-1}|\,|A^2| = \frac{|A|^2}{|B|} \Longrightarrow |X| = \frac{|A|}{|B|} = \lambda^2 - 2\lambda.$$

(Hemos utilizado que el determinante del producto es el producto de los determinantes y que el determinante de la inversa es el inverso del determinante).
Por tanto,

$$|X| = 3 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene que los valores pedidos son $\lambda = 3$ y $\lambda = -1$.

5) Sean a, b, c tres números reales. Calcular el determinante de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ sabiendo que } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix} = 8.$$

Solución: Aplicando las propiedades de los determinantes, se obtiene:

$$8 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 2(-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4|M|.$$

Por tanto, $|M| = 8/4 = 2$.

6) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar las inversas de A y B y calcular la matriz X que resuelve la ecuación $AXB = C$.

Solución: Las inversas de A y B se obtienen haciendo operaciones elementales o calculando adjuntos (se omiten las cuentas). El resultado es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos despejar X multiplicando por el lado correspondiente por las inversas de A y B:

$$AXB = C \Longleftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2
Formas cuadráticas

1) Clasificar la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x, y, z, t) = 2xz + 2xt + zt - x^2 - y^2 - 2z^2 - 4t^2.$$

Solución: La expresión matricial del sistema es

$$\omega(x, y, z, t) = (x, y, z, t) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Los menores principales de la matriz de la forma cuadrática son:

$$\Delta_1 = -1\,, \quad \Delta_2 = 1\,, \quad \Delta_3 = -1\,, \quad \Delta_4 = \frac{3}{4}\,.$$

Como $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0$, la forma cuadrática ω es definida negativa.

2) Se considera la forma cuadrática

$$\omega(x, y, z) = (\alpha + 1)x^2 - y^2 + (\alpha - 2)z^2 + 2xy + 4xz - 4yz.$$

a) Hallar la matriz M asociada a la forma cuadrática.
b) Calcular los valores de α para los que ω es definida negativa.
c) Calcular el valor de α para el que ω es degenerada.

Solución:

a) La forma cuadrática se puede expresar como $\omega(x) = x^t MX$, donde

$$M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & \alpha-2 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a ω.

b) Los menores principales de M son

$$\Delta_1 = \alpha+1 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha-2 \quad ; \quad \Delta_3 = |M| = -(\alpha+2)^2 \,.$$

Para que ω sea definida negativa es necesario y suficiente que $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$, lo que sucede si y sólo si $\alpha < -2$.

c) La forma cuadrática ω es degenerada $\Longleftrightarrow |M| = 0 \Longleftrightarrow -(\alpha+2)^2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -2$.

3) Se considera la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 4yz.$$

a) Hallar la expresión matricial de ω y clasificarla.
b) Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\}$.
Probar que ω es definida positiva sobre U, es decir:

$$\omega(x,y,z) > 0 \;,\; \forall\,(x,y,z) \in U \;,\; (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Solución:

a) La expresión matricial de la forma cuadrática es

$$\omega(x,y,z) = (x,y,z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v^t M v.$$

Los menores principales de M son $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$, $\Delta_3 = -3 < 0$. Por tanto, ω es indefinida y no degenerada.

b) Si $(x,y,z) \in U$ entonces $x+y+z = 0$ y por tanto $z = -x-y$. Sustituyendo en la expresión de ω:

$$\begin{aligned} \omega(x,y,z) = \omega(x,y,-x-y) &= x^2 + 2y^2 + (-x-y)^2 - 2xy - 4y(-x-y) = \\ &= x^2 + 2y^2 + (x^2+y^2+2xy) - 2xy + 4xy + 4y^2 = 2x^2 + 7y^2 + 4xy = \\ &= (x,y) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v^t N v. \end{aligned}$$

Los menores principales de N son $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 10 > 0$. Por tanto ω es definida positiva sobre U.

4) Se considera la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2axy - 2axz - 2ayz,$$

donde a es un parámetro real.

a) Hallar la expresión matricial $\omega(x) = x^t Ax$.

b) Comprobar que todas las columnas de A suman lo mismo y usar esta propiedad para calcular el determinante de A.

c) Calcular los valores de a para los que ω es no degenerada.

d) Calcular los valores de a para los que ω es definida positiva.

Solución:

a) La expresión matricial de la forma cuadrática es

$$\omega(x, y, z) = (x, y, z) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -a & -a \\ -a & 2 & -a \\ -a & -a & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b) Todas las columnas de A suman $2-2a$. Teniendo en cuenta esta propiedad, calculamos el determinante de A sumando a la primera fila las otras dos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -a & -a \\ -a & 2 & -a \\ -a & -a & 2 \end{vmatrix} \underset{F_{13}(1)}{\overset{F_{12}(1)}{=}} \begin{vmatrix} 2-2a & 2-2a & 2-2a \\ -a & 2 & -a \\ -a & -a & 2 \end{vmatrix} = (2-2a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 2 & -a \\ -a & -a & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{F_{31}(a)}{\overset{F_{21}(a)}{=}} (2-2a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & 2+a \end{vmatrix} = (2-2a)(2+a)^2.$$

c) ω es no degenerada $\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 1, -2$.

d) Los menores principales de A son $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 - a^2$, $\Delta_3 = (2-2a)(2+a)^2$.
Para que ω sea definida positiva, los tres menores principales deben ser positivos. Como $\Delta_2 > 0 \Longleftrightarrow a \in (-2, 2)$ y $\Delta_3 > 0 \Longleftrightarrow a < 1$, se deduce que

$$\omega \text{ es definida positiva} \Longleftrightarrow a \in (-2, 1).$$

5) Para cada valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ -2 & 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores de λ para los que la forma cuadrática $\omega(x) = x^t A x$ es definida positiva.
b) Calcular los valores de λ para los que la forma cuadrática $\omega(x) = x^t A x$ es definida negativa.

Solución:

a) Los menores principales de A son

$$\Delta_1 = \lambda\,, \quad \Delta_2 = \lambda^2 - 1\,, \quad \Delta_3 = (\lambda+1)^2(\lambda-5)\,.$$

Para que ω sea definida positiva, los tres menores principales deben ser positivos, es decir, $\lambda > 0$, $\lambda^2 > 1$ y $\lambda > 5$. Esto sucede para todo $\lambda > 5$.

b) Para que ω sea definida negativa, los menores principales deben cumplir las condiciones

$$\Delta_1 = \lambda < 0\,, \quad \Delta_2 = \lambda^2 - 1 > 0\,, \quad \Delta_3 = (\lambda+1)^2(\lambda-5) < 0\,.$$

Esto equivale a que $\lambda < 0$, $\lambda^2 > 1$ y $\lambda < 5$. Las tres condiciones se cumplen para todo $\lambda < -1$.

6) Sea $p(x) = a + bx + cx^2$ un polinomio con coeficientes reales.
a) Escribir la expresión $p(1)p(0) + (p(-1))^2$ como una forma cuadrática

$$\omega(a,b,c) = (a,b,c)M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

b) Calcular los menores principales de M y clasificar la forma cuadrática ω.
c) ¿Existe algún polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ para el que $(p(-1))^2 < -p(1)p(0)$? Razonar la respuesta.

Solución:

a) Si $p(x) = a + bx + cx^2$ entonces $p(0) = a$, $p(1) = a + b + c$ y $p(-1) = a - b + c$.
Sustituyendo y agrupando términos se obtiene:

$$p(1)p(0) + (p(-1))^2 = (a+b+c)a + (a-b+c)^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - ab + 3ac - 2bc =$$

$$= (a,b,c) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \omega(a,b,c).$$

b) Los menores principales de M son:

$$\Delta_1 = 2 > 0 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} > 0 \quad ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Por tanto ω es indefinida no degenerada.

c) Como ω es indefinida, existe un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\omega(a, b, c) < 0$. Por tanto, el polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ cumple que

$$\omega(a, b, c) = p(1)p(0) + (p(-1))^2 < 0 \Longrightarrow (p(-1))^2 < -p(1)p(0).$$

7) Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Clasificar la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\omega(x) = x^t M x$.

Solución: Obsérvese que M no es simétrica, de modo que no es la matriz de la forma cuadrática. Desarrollando la expresión de ω, se obtiene:

$$\omega(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sus menores principales son $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = -25/4 < 0$. Por tanto, ω es indefinida y no degenerada.

8) Se considera la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

a) Hallar la expresión matricial de ω y clasificarla.
b) Determinar los valores del parámetro real λ para los que la forma cuadrática ω es definida positiva sobre el plano de ecuación $z = \lambda x + y$.

Solución:

a) La expresión matricial del sistema es

$$\omega(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Los menores principales de la matriz de la forma cuadrática son:

$$\Delta_1 = 1\,, \quad \Delta_2 = 1\,, \quad \Delta_3 = -1.$$

Como $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$, la forma cuadrática ω es indefinida no degenerada.

b) Para los puntos del plano $z = \lambda x + y$, la expresión de la forma cuadrática es

$$\omega(x,y,z) = \omega(x,y,\lambda x + y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x(\lambda x + y) + 2y(\lambda x + y).$$

Reagrupando los términos y expresándolo en forma matricial, se tiene:

$$\omega(x,y,\lambda x + y) = (1+2\lambda)x^2 + 4y^2 + (4+2\lambda)xy = (x,y)\begin{pmatrix} 1+2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Los menores principales de esta matriz son:

$$\Delta_1' = 1 + 2\lambda\,, \quad \Delta_2' = 4\lambda - \lambda^2.$$

La forma cuadrática es definida positiva sobre el plano si y sólo si

$$\Delta_1' = 1 + 2\lambda > 0 \quad ; \quad \Delta_2' = 4\lambda - \lambda^2 > 0.$$

Estas desigualdades se cumplen para $\lambda \in (0,4)$.