Problemas resueltos de espacios vectoriales y aplicaciones lineales

EDUARDO LIZ MARZÁN

Los problemas que se incluyen en esta colección se han extraído de pruebas parciales y exámenes finales de la asignatura Álgebra lineal de las titulaciones de *Ingeniería de la energía* e *Ingeniería de los recursos mineros y energéticos* en la Universidad de Vigo.

Septiembre de 2020

Índice general

Capítulo 1
Bases y dimensiones

1) Calcular la dimensión y una base del siguiente subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;/\; \begin{array}{r} a-b-c=0 \\ a+2b+d=0 \\ 3b+c+d=0 \end{array} \right\}$$

Solución:

Realizando operaciones elementales sobre las filas de la matriz de coeficientes del sistema, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el sistema equivalente es

$$\left.\begin{array}{r} a-b-c=0 \\ 3b+c+d=0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} a=b+c \\ d=-3b-c \end{array}\right\}$$

Así,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} b+c & b \\ c & -3b-c \end{pmatrix} \;/\; c,d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;/\; c,d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$=< \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} >$$

La dimensión de U es 2 y una base es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2) Se considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$U = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, BX = 3X\}.$$

Solución:

Denotando $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, tenemos:

$$X \in U \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - z = 3x \\ -x + 2z = 3z \\ 2y - t = 3y \\ -y + 2t = 3t \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ t = -y. \end{array} \right.$$

Por tanto:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, \begin{array}{l} z = -x \\ t = -y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} / \, x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} / \, x, y \in \mathbb{R} \right\} = < \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} > .$$

El conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de U y $\dim(U) = 2$.

3) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar la dimensión y una base del subespacio

$$U = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, XA = 0\}.$$

Solución:

a) Sea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$X \in U \iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x + y & -x - y & x + y \\ z + t & -z - t & z + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ t = -z \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix} \,/\, x, z \in \mathbb{R} \right\} =< \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} >$$

El conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de U y $\dim(U) = 2$.

4) Calcular la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales:
a) $U_1 = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, X^t = -X\}$.
b) $U_2 = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \,/\, x_1 + x_2 = x_9 + x_{10} = 0\big\}$.

Solución:

a) Si $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_1 \Longleftrightarrow X^t = -X \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = d = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

Por tanto,

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \,/\, b \in \mathbb{R} \right\} =< \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} > \Longrightarrow \dim(U_1) = 1.$$

b) Como U_2 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{10}$ definido por dos ecuaciones linealmente independientes ($x_1 + x_2 = 0$, $x_9 + x_{10} = 0$), se deduce que $\dim(U_2) = 10 - 2 = 8$.

5) Calcular la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$):
a) $U_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$.
b) $U_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_1 = x_n = 0\}$.
c) $U_3 =< \{(1, 1, 1, \ldots, 1), (1, 2, 2, \ldots, 2), (1, 3, 3, \ldots, 3), \ldots, (1, n, n, \ldots, n)\} >$.

Solución:

a) Es claro que

$$U_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_1 = x_2 = \cdots = x_n\} = \{(x_1, x_1, \ldots, x_1) \,/\, x_1 \in \mathbb{R}\} =< \{(1, 1, \ldots, 1)\} >$$

y por tanto $\dim(U_1) = 1$.

b) El subespacio U_2 está definido por dos ecuaciones linealmente independientes: $x_1 = 0$, $x_n = 0$. Por tanto,

$$\dim(U_2) = \dim(\mathbb{R}^n) - 2 = n - 2.$$

c) Colocando los generadores de U_3 como filas de una matriz $n \times n$, se tiene:

$$\dim(U_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n \end{pmatrix} = 2,$$

ya que las dos primeras columnas de la matriz son linealmente independientes y a partir de la segunda todas son iguales.

6) Se considera la aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$.
a) Calcular la matriz M asociada a L.
b) Calcular la dimensión y una base del subespacio

$$U = \left\{X \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,/\, MX + MX^t = 0\right\}.$$

Solución:

a) Dado que

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

la matriz asociada a L es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Se tiene:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in U \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2t \\ 2x+y+z & y+z+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$U = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,/\, x = 0, z = -y, t = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} \,/\, y \in \mathbb{R}\right\} = < \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} > .$$

Finalmente, $\dim(U) = 1$ y una base es $B'' = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

7) Calcular la dimensión y una base del subespacio vectorial

$$U_\alpha = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, A^t B = BA \right\}, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

distinguiendo los siguientes casos:
a) $\alpha = 1$.
b) $\alpha \neq 1$.

Solución:

Tomemos una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$A \in U_\alpha \Longleftrightarrow A^t B = BA \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -a+c & \alpha a + c \\ -b+d & \alpha b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+\alpha c & -b+\alpha d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a+c = -a+\alpha c \\ \alpha a + c = -b + \alpha d \\ -b+d = a+c \\ \alpha b + d = b + d \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\alpha-1)c = 0 \\ \alpha(d-a) = b+c \\ d = a+b+c \\ (\alpha-1)b = 0. \end{array} \right\}$$

a) Si $\alpha = 1$, la única ecuación independiente es $d = a+b+c$. Por tanto,

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, d = a+b+c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{pmatrix} \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = < \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} > .$$

En consecuencia, $\dim(U_1) = 3$ y una base de U_1 es $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Si $\alpha \neq 1$, las ecuaciones son $b = 0$, $c = 0$, $d = a$. Por tanto,

$$U_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, b = c = 0,\ d = a \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,/\, a \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,/\, a \in \mathbb{R} \right\} = < \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} > .$$

En consecuencia, $\dim(U_\alpha) = 1$ y una base de U_α es $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

8) Sea $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ de la que se sabe que la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$ es

$$P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar la matriz $P_{\mathcal{BC}}$ de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

b) Calcular el vector $w = w_1 + w_2 + w_3$.

Solución:

a) La matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es $P_{\mathcal{BC}} = P_{\mathcal{CB}}^{-1}$. Haciendo operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $(P_{\mathcal{CB}}|I)$ hasta llegar a $(I|P_{\mathcal{CB}}^{-1})$, se obtiene:

$$P_{\mathcal{BC}} = P_{\mathcal{CB}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) El vector $w = w_1 + w_2 + w_3$ tiene coordenadas $(1, 1, 1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Por tanto,

$$w = w_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{BC}}\, w_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9) En $\mathbb{R}^2$ se considera el conjunto $\mathcal{B} = \{(3/5, 4/5), (-4/5, 3/5)\}$.

a) Probar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

b) Calcular la matriz de cambio de base $P = P_{\mathcal{BC}}$ de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y probar que P es una matriz ortogonal.

c) Usar que P es ortogonal para calcular la matriz $P_{\mathcal{CB}}$ de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ y calcular las coordenadas de $v = (2, 1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Solución:

a) Como

$$\begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$\mathcal{B}$ es linealmente independiente y por tanto es una base de $\mathbb{R}^2$.

b) Las columnas de la matriz de cambio de base $P = P_{\mathcal{BC}}$ son los vectores de $\mathcal{B}$. Por tanto:

$$P = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

La matriz P es ortogonal porque

$$P^t\,P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

c) Como P es ortogonal,

$$P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{BC}}^{-1} = P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Si $v = (2, 1)$ entonces

$$v_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{CB}}\, v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y por tanto $v = (2, -1)_{\mathcal{B}}$.

10) Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la dimensión y una base de los subespacios vectoriales U_1 y U_2 definidos por:

$$U_1 = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, MX = 0\} \quad ; \quad U_2 = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{tr}\,(MX) = 0\}.$$

Solución: Comenzamos por U_1.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in U_1 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ -x + z & -y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ t = y \end{array} \right\}$$

Por tanto,

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \,/\, z = x,\, t = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Así, $\dim(U_1) = 2$ y una base es $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Como la traza de MX es $\mathrm{tr}\,(MX) = x - z - y + t$, U_2 se puede escribir como:

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \,/\, t = -x + y + z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x + y + z \end{pmatrix} \,/\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \,/\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por tanto, $\dim(U_2) = 3$ y una base es $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

11) En $\mathbb{R}^2$ se considera la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,3)\}$.

a) Calcular la matriz de cambio de base $P = P_{\mathcal{BC}}$ de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$.

b) Se considera la recta de ecuación $y = 2x + 1$. Calcular la ecuación de la recta en coordenadas (x', y') respecto de la base $\mathcal{B}$.

Solución:

a) Las columnas de la matriz de cambio de base $P = P_{\mathcal{BC}}$ son los vectores de $\mathcal{B}$. Por tanto:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Teniendo en cuenta que $x_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{BC}}\, x_{\mathcal{B}}$, expresamos las coordenadas $(x,y)_{\mathcal{C}}$ en función de $(x',y')_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{\mathcal{BC}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' + 3y'. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación de la recta queda:

$$y = 2x + 1 \Longleftrightarrow x' + 3y' = 2(x' + y') + 1 \Longleftrightarrow y' = x' + 1.$$

12) Calcular la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, (1,1) \in \operatorname{Ker}(A)\}.$$

Solución: Se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c + d = 0. \end{cases}$$

Así, podemos escribir:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,/\, b = -a,\ d = -c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} \,/\, a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \,/\, a, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por tanto, $\dim(U_1) = 2$ y $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de U_1.

13) Se consideran la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{BC}}$ de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
b) Calcular la dimensión y una base del subespacio $U = \operatorname{Ker}(H)$.
c) Sea $v = (1,\alpha,\beta)_{\mathcal{B}}$. Determinar los valores de α y β para los que v pertenece a U.

Solución:

a) Denotando por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz de cambio de base es

$$P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Haciendo operaciones elementales por filas en la matriz H, se obtiene que

$$\operatorname{Ker}(H) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x-3z=0 \\ -y+5z=0 \end{matrix}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{matrix} x=3z \\ y=5z \end{matrix}\right\} =$$

$$= \{(3z,5z,z)\,/\,z\in\mathbb{R}\} = \{z(3,5,1)\,/\,z\in\mathbb{R}\} = < \{(3,5,1)\} > .$$

La dimensión de $U = \operatorname{Ker}(H)$ es 1 y una base es $\mathcal{B}' = \{(3,5,1)\}$.

c) Dado que $v = (1,\alpha,\beta)_{\mathcal{B}}$, se tiene:

$$v_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{BC}}\, v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta \\ 1+\alpha-\beta \\ 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Por tanto, en la base canónica $v = (1+\beta, 1+\alpha-\beta, 1-\alpha)$.
Para que $v \in U$, debe cumplir las ecuaciones $x = 3z$, $y = 5z$, es decir:

$$\left\{\begin{matrix} 1+\beta = 3-3\alpha \\ 1+\alpha-\beta = 5-5\alpha \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3\alpha+\beta = 2 \\ 6\alpha-\beta = 4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = 2/3 \\ \beta = 0. \end{matrix}\right\}$$

Capítulo 2
Bases ortonormales y proyección ortogonal

1) En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (-2,\lambda,0), (-1,1,\lambda)\}$.

a) Hallar los valores de λ para los que $\mathcal{B}$ no es una base de $\mathbb{R}^3$.
b) Para $\lambda = 1$, calcular las coordenadas del vector $v = (2,1,2)$ respecto de $\mathcal{B}$.
c) Para $\lambda = 0$, hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}$.
d) Para $\lambda = 2$, hallar una base ortonormal del subespacio generado por $\mathcal{B}$.

Solución:

a) El conjunto $\mathcal{B}$ no es una base si es linealmente dependiente, lo que equivale a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (\lambda+1)(\lambda-2) = 0.$$

Por tanto, $\mathcal{B}$ no es una base de $\mathbb{R}^3$ para $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$.

b) Para $\lambda = 1$, la base es $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (-2,1,0), (-1,1,1)\}$.
Las coordenadas del vector $v = (2,1,2)$ respecto de $\mathcal{B}$ se calculan resolviendo el sistema

$$(2,1,2) = \alpha(1,-1,1) + \beta(-2,1,0) + \gamma(-1,1,1) \longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta - \gamma = 2 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = 2. \end{cases}$$

La única solución es $\alpha = -1$, $\beta = -3$, $\gamma = 3$ y por tanto $v = (-1,-3,3)_{\mathcal{B}}$.

c) Para $\lambda = 0$, la base es $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (-2,0,0), (-1,1,0)\}$. Por tanto, denotando por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{BC}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Para $\lambda = 2$, el rango de $\mathcal{B}$ es 2 y

$$U = < \mathcal{B} > = < \{(1,-1,1),(-2,2,0),(-1,1,2)\} > = < \{(1,-1,1),(-1,1,0)\} > .$$

A continuación ortonormalizamos la base $\{v_1, v_2\} = \{(1,-1,1),(-1,1,0)\}$ de U:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right);$$

$$\tilde{u_2} = v_2 - (v_2^t u_1)u_1 = (-1/3, 1/3, 2/3) ; \quad u_2 = \frac{\tilde{u_2}}{\|\tilde{u_2}\|} = \left(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}\right).$$

Una base ortonormal de U es

$$\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2\} = \left\{\left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)\left(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}\right)\right\}.$$

2) Se considera el plano de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y + 2z\right\}.$$

a) Hallar una base ortonormal de U.
b) Calcular la matriz P de proyección ortogonal sobre U.
c) Hallar la distancia de $v = (1,1,1)$ a U.
d) Hallar una base del subespacio W formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya proyección ortogonal sobre U es $(0,0,0)$.

Solución:

a) En primer lugar calculamos una base de U:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y + 2z\right\} = \{(y+2z, y, z) \,/\, y, z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{y(1,1,0) + z(2,0,1) \,/\, y, z \in \mathbb{R}\} = < \{(1,1,0),(2,0,1)\} > .$$

A continuación ortonormalizamos la base $\{v_1, v_2\} = \{(1,1,0),(2,0,1)\}$ de U.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$$

$$\tilde{u_2} = v_2 - (v_2^t u_1)u_1 = (1,-1,1)$$

$$u_2 = \frac{\tilde{u_2}}{\|\tilde{u_2}\|} = \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right).$$

Una base ortonormal de U es

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\} = \left\{\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right), \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)\right\}.$$

b) La matriz de proyección ortogonal sobre U es

$$P=(u_1|u_2)\begin{pmatrix}u_1^t\\ u_2^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

c) La proyección ortogonal de v sobre U es

$$Pv=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Por tanto, la distancia de v a U es

$$d(v,U)=\|v-Pv\|=\|(-1/3,1/3,2/3)\|=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

d) El subespacio W es el subespacio ortogonal de U y se puede calcular como el núcleo de P. Haciendo operaciones elementales por filas, se obtiene:

$$\text{Ker}\,(P)=\text{Ker}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}=\text{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+y=0,\ 2y-z=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x=-y,\ z=2y\right\}=\{(-y,y,2y)\,/\,y\in\mathbb{R}\}=<\{(-1,1,2)\}>.$$

Por tanto, $\dim(W)=1$ y $\mathcal{B}'=\{(-1,1,2)\}$ es una base de W.

3) Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Hallar una base ortonormal $\mathcal{B}$ del subespacio $U=\{v\in\mathbb{R}^3\,/\,Av=v\}$.
b) Calcular la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio U.
c) Determinar la proyección ortogonal $\mathbf{u}$ del vector $\mathbf{v}=(3,1,1)$ sobre el subespacio U y calcular las coordenadas de $\mathbf{u}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ obtenida en el apartado (a).

Solución:

a) Calculamos una base de U:

$$U=\{v\in\mathbb{R}^3\,/\,Av=v\}=\{v\in\mathbb{R}^3\,/\,(A-I)v=0\}=\text{Ker}\,(A-I)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+z=0\}=$$

$$=\{(x,y,-x)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\}=<\{(1,0,-1),(0,1,0)\}>.$$

Como los vectores $v_1 = (1, 0, -1)$ y $v_2 = (0, 1, 0)$ ya son ortogonales, se obtiene una base ortonormal de $V(1)$ sin más que dividirlos por su módulo. Así, una base ortonormal es

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\} = \left\{ (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0, 1, 0) \right\}.$$

b) La matriz de proyección ortogonal es $P = UU^t$, donde $U = (u_1|u_2)$ es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base ortonormal $\mathcal{B}$. Así,

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

c) La proyección ortogonal de $\mathbf{v} = (3, 1, 1)$ sobre $V(1)$ es

$$\mathbf{u} = P\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular las coordenadas, escribimos

$$\mathbf{u} = (1, 1, -1) = \lambda(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) + \mu(0, 1, 0),$$

de donde $\lambda = \sqrt{2}$, $\mu = 1$. Por tanto,

$$\mathbf{u} = (\sqrt{2}, 1)_{\mathcal{B}}.$$

4) En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio vectorial U generado por dos vectores v_1 y v_2.

a) Calcular los vectores v_1 y v_2 sabiendo que los vectores de coordenadas de $(1, 1, 0)$ y $(2, 1, 1)$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ son

$$(1, 1, 0) = (1, 1)_{\mathcal{B}} \quad ; \quad (2, 1, 1) = (1, 2)_{\mathcal{B}}.$$

b) Hallar una base ortonormal de U.

Solución:

a) Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} (1, 1, 0) = (1, 1)_{\mathcal{B}} \Longrightarrow (1, 1, 0) = v_1 + v_2 \\ (2, 1, 1) = (1, 2)_{\mathcal{B}} \Longrightarrow (2, 1, 1) = v_1 + 2v_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_2 = (2, 1, 1) - (1, 1, 0) = (1, 0, 1) \\ v_1 = (1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (0, 1, -1) \end{array}\right.$$

Por tanto, la base es $\mathcal{B} = \{(0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$.

b) Aplicamos el procedimiento de Gram-Schmidt para transformar la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ en una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2\}$:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) = \left(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right);$$

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \left(v_2^t\, u_1\right) u_1 = (1,0,1) + (0,1/2,-1/2) = (1,1/2,1/2)\ ;\ u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \left(2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right)$$

$\mathcal{B}' = \{u_1, u_2\} = \left\{\left(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right), \left(2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right)\right\}$ es una base ortonormal de U.

5) En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio U generado por los vectores $u_1 = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\right)$ y $u_2 = \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}\right)$.

a) Probar que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal de U.

b) Calcular la matriz P de proyección ortogonal sobre U.

c) Calcular la distancia de $w = (0,1,0)$ a U.

d) Completar el conjunto $\{u_1, u_2\}$ a una base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo que el vector de coordenadas de $(1,0,0)$ en la base $\mathcal{B}'$ sea $\left(2\sqrt{3}, \sqrt{6}, -1\right)_{\mathcal{B}'}$.

Solución:

a) $\mathcal{B}$ es una base ortonormal porque

$$\|u_1\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1 \quad ; \quad \|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1 \quad ; \quad u_1^t\, u_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} = 0.$$

b) La matriz de proyección ortogonal sobre U es $P = QQ^t$, donde $Q = (u_1|u_2)$ es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base ortonormal $\mathcal{B}$. Así,

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) La proyección ortogonal de $w = (0,1,0)$ sobre U es

$$P\,w = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$d(w,U) = \|w - Pw\| = \|(-1/2, 1/2, 0)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d) La igualdad $(1,0,0) = \left(2\sqrt{3}, \sqrt{6}, -1\right)_{\mathcal{B}'}$ es equivalente a $(1,0,0) = 2\sqrt{3}\,u_1 + \sqrt{6}\,u_2 - u_3$. Despejando u_3 se obtiene:

$$u_3 = 2\sqrt{3}\,u_1 + \sqrt{6}\,u_2 - (1,0,0) = (2,2,-2) + (1,1,2) - (1,0,0) = (2,3,0).$$